

## Узлы. (А. Полянский)

При решении задач этого листика желательно *не использовать* формулу Пика (только от безысходности). Ключевая идея при решении подобных задач состоит в принципе крайнего (т. е. нужно рассмотреть ближайший узел к прямой, самое короткое расстояние, многоугольник минимальной площади, наименьшего периметра и т. п.). Также можно применять 3 нижеприведенных правила (желательно уметь их доказывать!).

**Определение.** Узлом будем называть такую точку на плоскости, у которой её обе координаты (по оси  $x$  и по оси  $y$ ) — целые.

**Определение.** Целым будем называть такой многоугольник (отрезок или вектор) на плоскости, что его вершины (концы) являются узлами.

**Факт 1** (правило параллелограмма). Если вектор  $\overline{AB}$  — целый, а точка  $C$  является узлом, то точка  $D$ , определяемая равенством  $\overline{CD} = \overline{AB}$ , также является узлом.

**Факт 2** (правило отрезка). Если целый отрезок  $AB$  содержит ровно  $n \geq 0$  узлов (не считая концы), то эти узлы делят  $AB$  на  $n + 1$  равный отрезок.

**Факт 3** (правило пяти узлов). Если на плоскости дано 5 узлов, то середина хотя бы одного из отрезков, соединяющих два из этих узлов, также является узлом.

- 1) Докажите, что внутри выпуклого целого пятиугольника найдется узел.
- 2) Докажите, что если внутри и на границе выпуклого целого четырехугольника нет узлов, кроме вершин, то это параллелограмм.
- 3) Строго внутри целого треугольника расположен целый выпуклый четырехугольник. Докажите, что внутри треугольника расположен по крайней мере ещё один узел, отличный от вершин четырехугольника.
- 4) Внутри целого треугольника  $ABC$  расположено ровно  $n > 0$  узлов. Какое наибольшее число узлов может находиться на стороне  $BC$  (не считая вершины)?

**Контрольный вопрос.** Чем плох случай  $n = 0$ ?

- 5) Внутри целого треугольника расположено ровно  $n$  узлов. Докажите, что из этих  $n$  узлов можно выбрать два различных узла таких, что прямая проходящая через них содержит одну из вершин треугольника или параллельна одной из сторон, если а)  $n = 2$ ; б)  $n > 2$ .

Желающие могут решить эту задачу заменив в условии “треугольник” на “выпуклый многоугольник”.

- 6) Внутри целого невыпуклого многоугольника расположено ровно  $n > 1$  узлов. Верно ли, что из этих  $n$  узлов можно выбрать два различных узла таких, что прямая проходящая через них содержит одну из вершин треугольника или параллельна одной из сторон.
- 7) Центр описанной окружности  $O$  неравнобедренного остроугольного целого треугольника  $ABC$  является узлом. Какое наименьшее число узлов может быть внутри этого треугольника  $ABC$ ?
- 8) В выпуклом многоугольнике (возможно не целом) на плоскости содержится не меньше  $m^2 + 1$  узлов. Докажите, что в нем найдется  $m + 1$  узел, которые лежат на одной прямой.