А. Полянский **Черная стрела.**

**1.** В треугольнике $ABC$ на стороне $AB$ выбраны точки $K$ и $L$ так, что $AK = BL$, а на стороне $BC$ – точки $M$ и $N$ так, что $CN = BM$. Докажите, что $KN + LM \geqslant AC$.

**2.** Середины противоположных сторон шестиугольника соединены отрезками. Оказалось, что точки попарного пересечения этих отрезков образуют правильный треугольник. Докажите, что проведенные отрезки равны.

**3.** Пусть на сторонах $BA$ и $BC$ треугольника $ABC$ выбраны точки $C_0$ и $A_0$ соответственно, а точки $M$ и $M_0$ — середины отрезков $AC$ и $A_0C_0$. Докажите, что если $AC_0 = CA_0$, то прямая $MM_0$ параллельна биссектрисе $\angle ABC$.

**4.** Трапеция с основаниями $AD$ и $BC$ описана вокруг окружности, $E$ — точка пересечения ее диагоналей. Докажите, что угол $AED$ не может быть острым

**5.** На стороне $AB$ выбраны точки $C_1$ и $C_2$. Аналогично, на стороне $BC$ выбраны точки $A_1$ и $A_2$, а на стороне $CA$ – точки $B_1$ и $B_2$. Оказалось, что отрезки $A_1B_2$, $B_1C_2$, $C_1A_2$ имеют равные длины, пересекаются в одной точке, угол между каждыми двумя из них равен $60°$. Докажите, что

$$\frac{A_1A_2}{BC} = \frac{B_1B_2}{CA} = \frac{C_1C_2}{AB}.$$

**6.** Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = AD$, $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. На сторонах $BC$ и $CD$ выбраны соответственно точки $F$ и $E$ так, чтобы $DF \perp AE$. Докажите, что $AF \perp BE$.

**7.** Четыре перпендикуляра, опущенные из вершин выпуклого пятиугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый такой перпендикуляр проходит через эту точку.

**8.** На столе лежал проволочный треугольник с углами $x°$, $y°$, $z°$. Хулиган Вася согнул каждую сторону треугольника на один градус, в результате чего получился невыпуклый шестиугольник с внутренними углами $(x-1)°$, $181°$, $(y-1)°$, $181°$, $(z-1)°$, $181°$. Докажите, что точки изгиба делили стороны в одинаковом отношении.

**9.** В правильном треугольнике $ABC$ на сторонах $AB$, $BC$, $CA$ выбраны точки $C_1$ и $C_2$, $A_1$ и $A_2$, $B_1$ и $B_2$ соответственно так, чтобы все стороны выпуклого шестиугольника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ были одинаковыми. Докажите, что диагонали $A_1C_2$, $B_1A_2$ и $C_1B_2$ пересекаются в одной точке.

**10.** Докажите, что в выпуклом $k$-угольнике сумма расстояний от любой внутренней точки до сторон постоянна тогда и только тогда, когда сумма векторов единичных внешних нормалей равна нулю.

**11.** Докажите, что для любого тетраэдра его самый маленький двугранный угол (из шести) не больше, чем двугранный угол правильного тетраэдра.

**12.** а) Внутри окружности находится некоторая точка $A$. Через $A$ провели две перпендикулярные прямые, которые пересекли окружность в четырех точках. Докажите, что центр масс этих точек не зависит от выбора этих двух прямых.

б) Внутри окружности находится некоторая точка $A$. Через $A$ провели $n$ таких прямых, что углы между соседними из них равны $\dfrac{2\pi}{n}$. Докажите, что центр масс точек пересечения этих прямых с окружностью не зависит от выбора этих $n$ прямых.

**13.** а) Внутри сферы находится некоторая точка $A$. Через неё провели три перпендикулярные прямые, которые пересекают сферу в шести точках. Докажите, что центр масс этих шести точек не зависит от выбора этих трех прямых.

б) Внутри сферы находится икосаэдр, его центр $A$ не обязательно совпадает с центром сферы. Лучи, выпущенные из $A$ в вершины икосаэдра высекают 12 точек на сфере. Икосаэдр повернули так, чтобы его центр остался на месте. Теперь лучи высекли 12 новых точек. Докажите, что их центр масс совпадает с центром масс старых 12 точек.

**14.** Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ с $AB = DE$, $BC = EF$, $CD = FA$, $\angle A - \angle D = \angle B - \angle E = \angle C - \angle F$. Докажите, что диагонали $AD$, $BE$ и $CF$ пересекаются в одной точке.