Алексей Мякишев

Элементарная геометрия и компьютер.

Москва, 2006 г.

1. ***Некоторые замечания о Геометрии и Компьютере вообще.***

Понятию «Элементарная Геометрия» (на плоскости) едва ли можно дать точное определение и заключить его в какие-то строгие рамки. С точки зрения большинства школьных учебников, это, по-видимому, дисциплина, изучающая свойства объектов, которые можно построить циркулем и линейкой – причем изучающая « с точностью до подобий» (т.е. среди всех преобразований плоскости рассматриваются лишь движения и подобия).

Однако, если мы присоединим сюда конические сечения, аффинные и проективные преобразования, инверсию, изогональное и изотомическое сопряжения и даже некоторые кубические кривые, естественным образом возникающие при исследовании различных свойств треугольника (также представляющего собой «кубику») – выйдем ли мы за пределы того, что можно еще называть «Элементарная Геометрия»? Все же боязно в этом случае отбросить прилагательное «элементарная» или заменить другим – ведь в сравнении с такими разделами Геометрии, как, скажем, «Алгебраическая» или «Дифференциальная» очень уж скудными представляются применяемые здесь методы.[1]

Как бы оно там ни было, в этой статье мы будем использовать термин «Элементарная Геометрия» скорее в «расширенном» смысле, а для краткости писать, где нужно, просто «Геометрия».

Многие учителя знают: Геометрия доставляет богатейший материал для развития логического мышления, фантазии и математической культуры их подопечных. Но при всем притом, зачастую, увы, сам предмет воспринимается, как нечто вполне завершенное и полностью сформированное, застывшее в своем развитии – нечто вроде *мертвого языка*, наподобие латыни. Такое представление совершенно не соответствует действительности. Рождаются все новые интересные теоремы и конструкции (даря, как и положено, их созидателям, пожалуй, наивысшую радость, доступную человеку – радость Творчества). И порой сопоставимые с общепризнанными шедеврами, ставшими достоянием Мировой Культуры. (Такими, к примеру, как прямая или окружность Эйлера, теорема Морлея и т.д.) Более того, последние 10 -15 лет Геометрия, можно сказать, находится на подъеме[2]. И в этом огромную роль сыграл Компьютер.

Во-первых, Интернет. У людей, разделенных тысячами километров, появилась возможность мгновенного общения друг с другом, доступа к различным книжным раритетам и объединения по интересам. В частности, любители Геометрии создали свой сайт:

---

[1] Вот, кстати, высказывание известного ученого Станислава Улама,
касающееся Элементарной Геометрии. Под ним, вероятно, подписались бы с удовольствием многие профессиональные математики.
Фрагмент заимствован из книги «Приключения математика».
НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва-Ижевск, 2001 .
(Подозреваю, что упомянутый ниже «один французский геометр» - никто иной, как классик жанра Виктор Тебо, слово же «Belanglos» в переводе с немецкого означает «незначительный», «неважный».)
«Наркотическое воздействие может оказать самая маленькая задача, хотя бы в ней с первого взгляда и распознавалась тривиальность или повторяемость. Можно втянуться, начав решать такие задачи. Я помню, как журнал “Mathematical Monthly” время от времени публиковал посылаемые одним французским геометром задачи, которые имели дело с банальными расположениями на плоскости окружностей, прямых и треугольников. “Belanglos” – как говорят немцы, но тем не менее эти картинки могли увлечь вас сразу, как только вы начинали думать о том, как найти решение, даже если вместе с тем вы осознавали, что это решение едва ли повлечет за собой какие-нибудь более увлекательные и более общие вещи.»

[2] Подчеркнем, что речь не идет о повышении уровня преподавания Геометрии в мировом масштабе, или в масштабе нашей страны – скорее здесь наблюдается противоположная тенденция, что весьма печально. Имеется ввиду лишь количество новых результатов, найденных за эти годы.

http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/
- Гиацинты.
На этом сайте можно получить авторитетную консультацию по любому вопросу, связанному с Геометрией – будь то ссылка на необходимую Вам литературу, степень новизны того или иного результата и т.д.
Появились и другие сайты, в той или иной мере связанные с Геометрией.
Укажем некоторые адреса:
http://forumgeom.fau.edu/
- электронный журнал, публикующий новые теоремы или доказательства;
http://paideiaschool.org/TeacherPages/Steve_Sigur/geometryIndex.htm
- страничка американского математика Стива Сигура;
http://forumgeom.fau.edu/faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
- электронная энциклопедия замечательных точек треугольника;
http://www.mccme.ru/
- Московский Центр Непрерывного Математического Образования;
http://www.etudes.ru/index.php
- Математические Этюды.
Итак, компьютер подарил возможность практически неограниченного и высокоскоростного обмена информацией.
Во-вторых, были созданы чудо-программы, такие как канадская «*The Geometer's Sketchpad*» (примечательно, что русифицированная версия называется «*Живая Геометрия*») и французская *«Cabri Geometry»*. С их помощью можно проверять *истинность* всевозможных геометрических гипотез.
Для тех, кто с этими программами не знаком, поясним, как это происходит, на простом примере. Предположим, возникла необходимость выяснить, справедливо ли утверждение: «*в любом треугольнике его медианы пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении* 2:1, *считая от вершины*». Допустим далее, что по каким-то причинам мы не знаем, так ли это на самом деле, а поиск непосредственного доказательства считаем мероприятием рискованным, потому что вдруг это не так, и тогда как ни старайся – все равно ничего не докажешь. Выход из этой сложной ситуации, однако, имеется. Запустим *«Живую Геометрию»*, нарисуем *некоторый* треугольник, проведем в нем медианы, и убедимся, что они пересекаются в одной точке и делятся ею в нужном отношении (программа с легкостью справляется с функцией циркуля и линейки, вычисляет отношения длин – будучи, конечно, способной и на гораздо большие подвиги). Теперь наступил *ключевой момент*: программа позволяет *деформировать* треугольник, смещая положения вершин и произвольным образом меняя длины сторон и величины углов. И мы *видим*, что исходное предположение выполняется, как бы мы не деформировали треугольник.[3] Т.е., мы можем не только моделировать ту или иную геометрическую конструкцию, но и наблюдать ее в *динамике*.
Понятно, что эти две, и подобные им, программы являются мощным оружием в руках геометров, жаждущих новых фактов. И теперь даже новичок, не слишком отягощенный бременем знаний, но зато со свежим восприятием предмета, имеет шанс открыть «что-нибудь эдакое». Естественно, у искушенного знатока, располагающего опытом и сильно развитой интуицией, таких шансов больше, но бывали случаи, когда и новичкам везло. (См. **Пример 2** далее.)

[3]Учителю на заметку: подобные вещи в практику внедрять надо с крайней осторожностью. Сергей Маркелов рассказывал, что в свое время ему довелось побывать на уроке в одной из канадских школ (на родине отцов-основателей «*The Geometer's Sketchpad*»). Преподаватель как раз вышеописанным образом убеждал школьников в истинности теоремы о медианах - и убедил настолько глубоко, что после этого всякие разговоры о доказательстве сделались бессмысленными. Дети просто не могли понять – о чем тут еще можно говорить, если все и так видно. Таким образом, в результате непродуманных действий сама идея математического доказательства была уничтожена на корню – если, конечно, то не был изначально вполне сознательный и злой умысел.

Во второй части статьи мы приведем (без доказательств - читатель сможет, при желании, найти их, обратившись к соответствующим ссылкам) несколько примеров новых теорем, открытых с помощью компьютера. Все они родились в начале этого столетия.
А часть первую представляется уместным завершить цитатой из последней статьи выдающегося отечественного Геометра Игоря Федоровича Шарыгина (1937-2004). (Статья озаглавлена «Нужна ли школе 21-го века Геометрия?» и напечатана в журнале «Математическое просвещение», Третья серия, выпуск 8 – М.: МЦНМО, 2004.)
«Заметным явлением сегодняшней цивилизации стал компьютер. И здесь особо следует сказать о взаимоотношениях между геометрией и компьютером. С одной стороны, геометрический тип рассуждений наименее поддается компьютеризации. (А отсюда, в частности, следует, что его сохранение и развитие особенно важно именно в настоящее время.) Геометрия остается одной из немногих сфер интеллектуальной деятельности, где человек еще не проиграл соревнование компьютеру.[4] А с другой, - компьютер является очень полезным инструментом в геометрических исследованиях. С его помощью можно экспериментально обнаруживать новые интересные геометрические факты. Человеку же остается важнейшая роль - эти факты доказывать (всего лишь!)[5]. При этом в геометрическую деятельность с использованием компьютеров могут включаться школьники и сильные и слабые (с точки зрения математики), технари и гуманитарии. И получается, что *первонаука, которой является геометрия, получила новый толчок к развитию, как образовательный предмет и как наука, благодаря самым современным компьютерным технологиям*».

2. Некоторые примеры взаимоотношений.

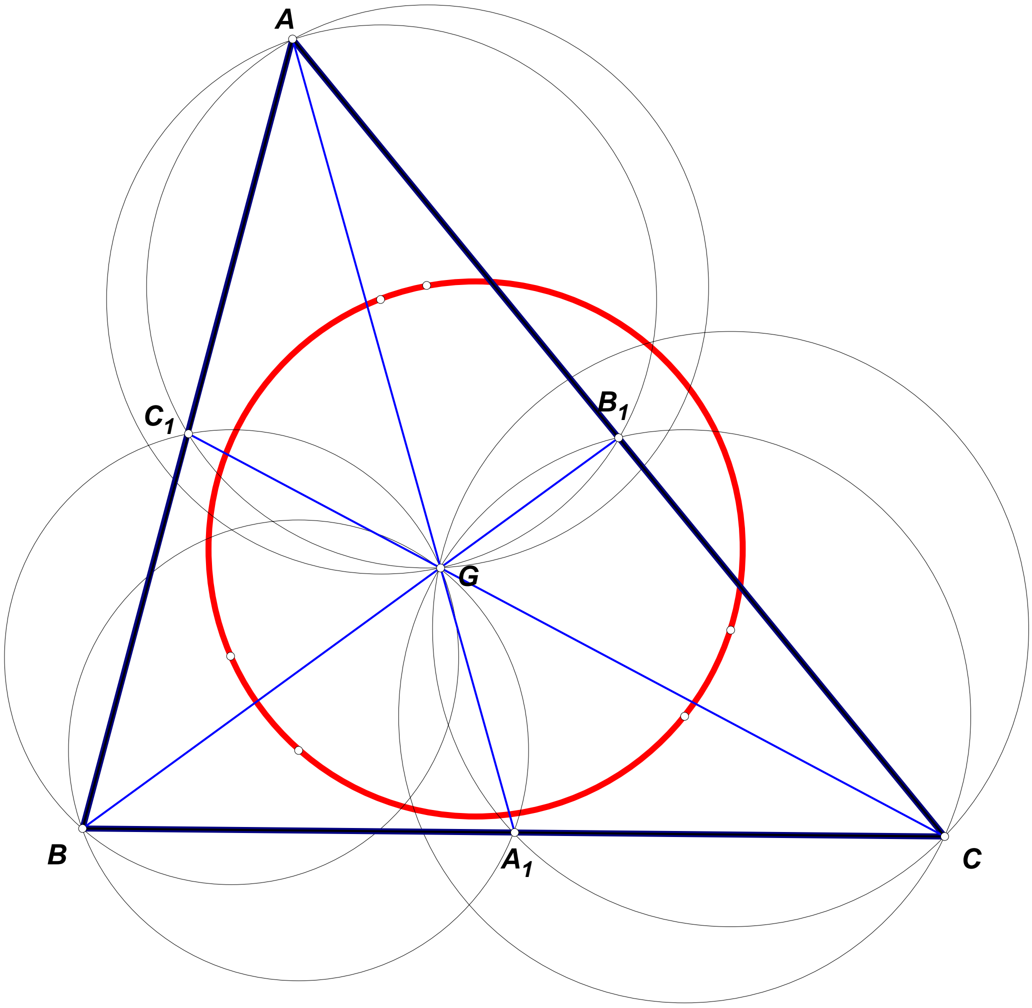
Пример 1. *Окружность Ламуна.*
Автор: Floor van Lamoen**.**
Центры окружностей, описанных около шести треугольников, на которые произвольный треугольник разбивается своими медианами, лежат на одной окружности.
Об истории открытия этой замечательной теоремы можно узнать из переписки между автором открытия и знаменитым математиком Джоном Конвеем.
Вот фрагмент (полный текст хранится в архивах Гиацинтов):
[JHC]: May I ask, Floor, whether you found this lovely theorem as a consequence of some theory, or whether it was just conjectured by “drawing the picture”, so to speak?
[FVL]: It was an example that Clark Kimberling gave in TCCT[6] as a conic in a “Cevasix” configuration. When I saw the figure with the six circumcenters, I thought that the conic could be a circle. So it was by drawing the picture. Then I tried to prove syntheticly, and that was not too difficult.
Фраза “by drawing the picture” подразумевает, «по умолчанию», очевидное продолжение: «рукою Железного Друга».
Доказательство самой теоремы (и обратной к ней) можно найти в статье А.Мякишева «Точка пересечения медиан треугольника», опубликованной в газете «Математика» (№43,44,46,48 – 2003).

---

[4] Например, в шахматах человек явно проиграл. Может быть, еще остались два-три супергроссмейстера, способных выдержать единоборство с такими монстрами, как *“Fritz”,”Rybka”,”Junior”* или *“Hydra”* – но очевидно, что это ненадолго. Компьютер доказал, что в сущности своей *шахматы - игра не творческая*. Чтобы хорошо играть в шахматы (человек против человека) нужны, разумеется, и фантазия и выдумка. Но, оказалось, чтобы *отлично* в них играть – достаточно тупого счета всевозможных продолжений. Человек пасует, когда глубина машинного перебора ходов достигает 6-8 ходов, и никакое позиционное мастерство уже не спасает.

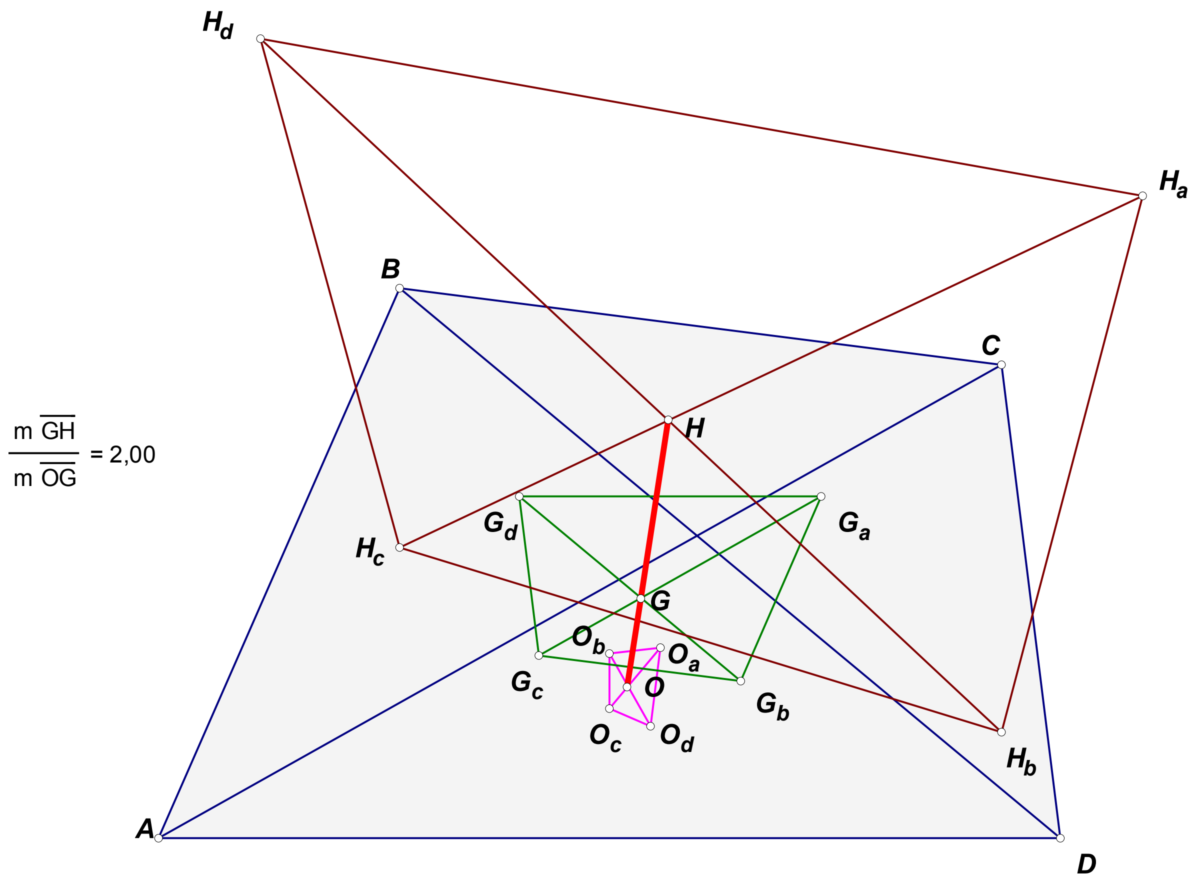
[5] Игорь Федорович, придумавший за свою жизнь несколько сотен задач - насколько мне известно, никогда не использовал (ну, или почти никогда) компьютер для этих целей. Вероятно, поэтому он забыл упомянуть, что сам поиск содержательной геометрической конструкции играет роль не менее важную, чем последующие доказательства. А поиск этот – основанный на опыте, интуиции и чувстве красоты и гармонии, требующий порой немалых творческих усилий – осуществляется все еще человеком, а не компьютером.

[6] “Triangle Centers and Central Triangles”, Congressus Numerantium, Vol. 129,Winnipeg, Canada



Пример 2. *Прямая Эйлера четырехугольника.*
Автор: Ярослав Ганин.
В произвольном четырехугольнике ABCD ортоцентр[7] *треугольника BCD обозначим H_a, треугольника CDA - H_b, треугольника DAB - H_c и треугольника ABC - H_d. Пусть H – точка пересечения диагоналей четырехугольника $H_aH_bH_cH_d$. Рассматривая далее вместо ортоцентров – центроиды*[8] *и центры описанных окружностей, аналогично построим точки G и O. Тогда точки H, G, O лежат на одной прямой и HG:GO*=2:1.[9]

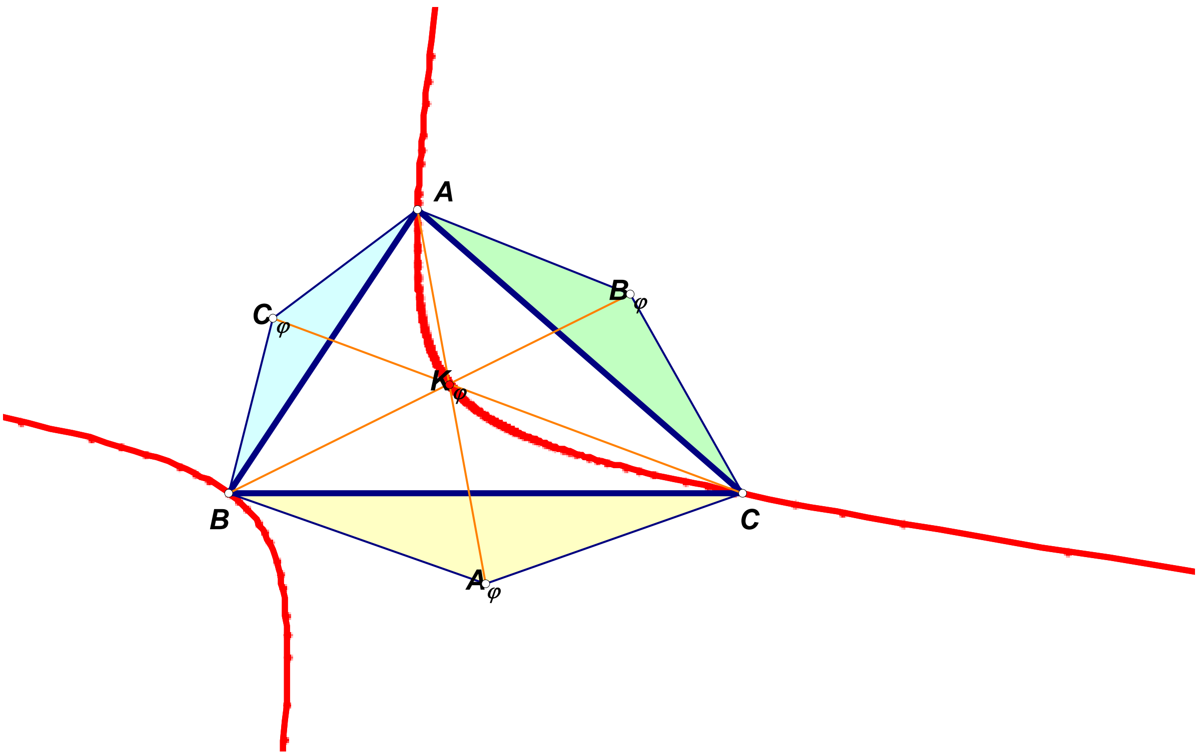
[7] точка пересечения высот
[8] точка пересечения медиан
[9] Напомним, что классическая *прямая Эйлера треугольника* содержит его ортоцентр *H*, центроид *G* , центр описанной окружности *O* и *HG:GO*=2:1.



Ярослав обнаружил этот красивый факт в начале 2006 года, будучи тогда еще учащимся 11-го класса. Доказательство имеется в сборнике «Учим математике» - М.: МЦНМО, 2004 - в статье А.Мякишева «О некоторых прямых, связанных с четырехугольником».

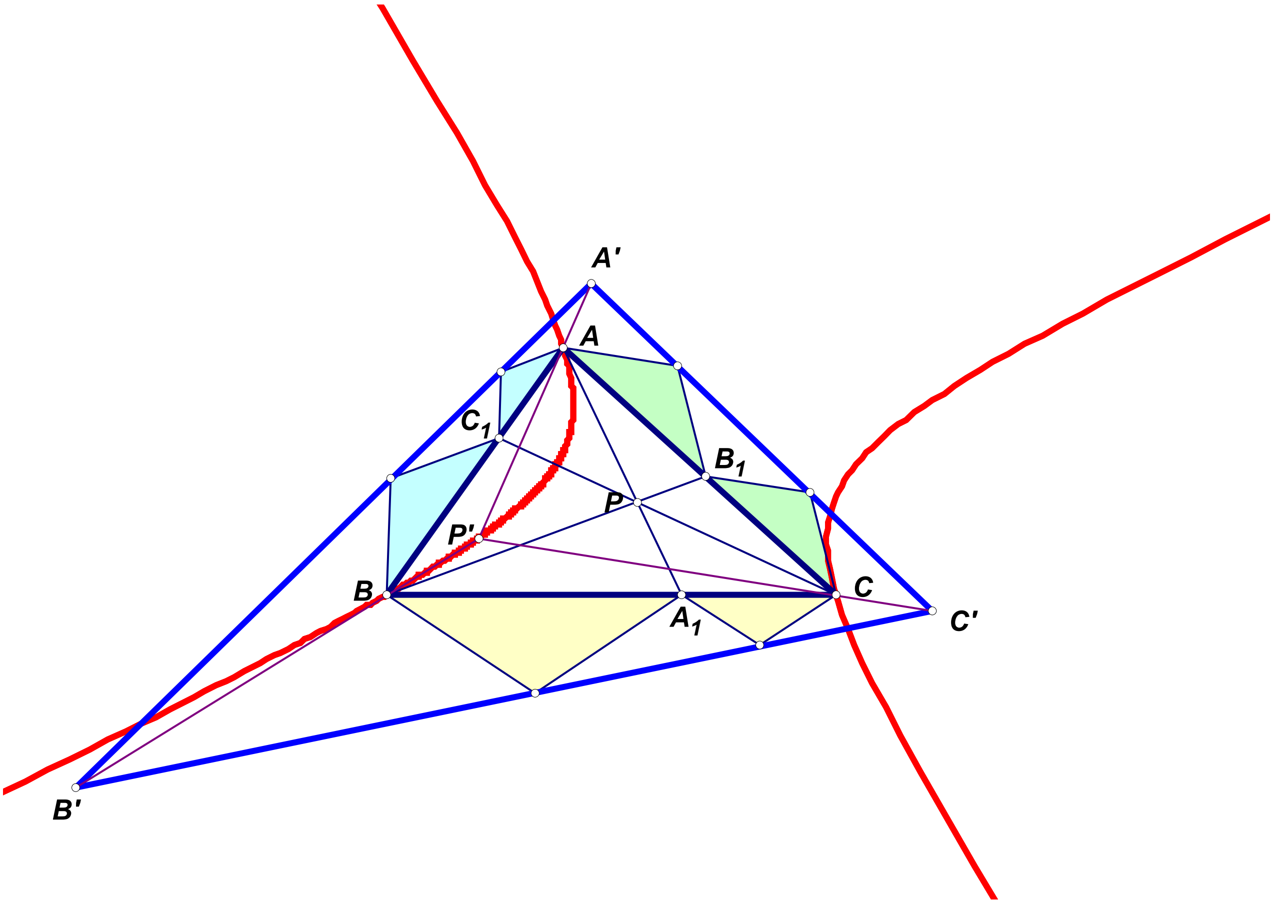
Пример 3. *Обобщение гиперболы Киперта.*

Автор: Алексей Мякишев.



Как известно, если построить на сторонах произвольного треугольника равнобедренные треугольники с одним и тем же углом φ при основании (при положительных значениях угла проводим боковые стороны *вовне*, в противном случае – наоборот), а затем соединить их вершины с соответствующими вершинами исходного треугольника, то полученная тройка прямых всегда будет пересекаться в одной точке, а множество всех таких точек заметает некоторую гиперболу – т.н. *гиперболу Киперта.*

Попытки отыскать какие-то схожие утверждения привели к следующей, несколько тяжеловесной, конструкции:



В плоскости треугольника ABC выберем произвольную точку P и рассмотрим прямые, соединяющие эту точку с соответствующими вершинами треугольника. Отметим точки пересечения прямых со сторонами (или продолжениями сторон) треугольника. Каждая такая точка разбивает сторону на два отрезка. Построим теперь на этих отрезках, как на основаниях, равнобедренные треугольники с одинаковым углом φ *при основании.*

Прямые, проходящие через пары соответствующих вершин этих треугольников, образуют новый треугольник, перспективный[10] *исходному. Более того, при фиксированной точке P множество перспекторов будет заметать гиперболу - свою для каждой точки. Если P совпадает с ортоцентром H треугольника ABC, то получится гипербола Киперта.*

Помнится, когда конструкция пришла в голову, я сильно сомневался в ее «прочности» - ведь меняется и угол φ, и положение точки *P*. Но компьютер развеял все сомнения.

Доказательство можно прочитать, обратившись по адресу: http://forumgeom.fau.edu/FG2004volume4/FG200429index.html (в статье Darij Grinberg, Alexei Myakishev «A generalization of the Kiepert hyperbola»).

[10] Т.е., тройка прямых, проходящих через соответственные вершины, пересекаются в одной точке.

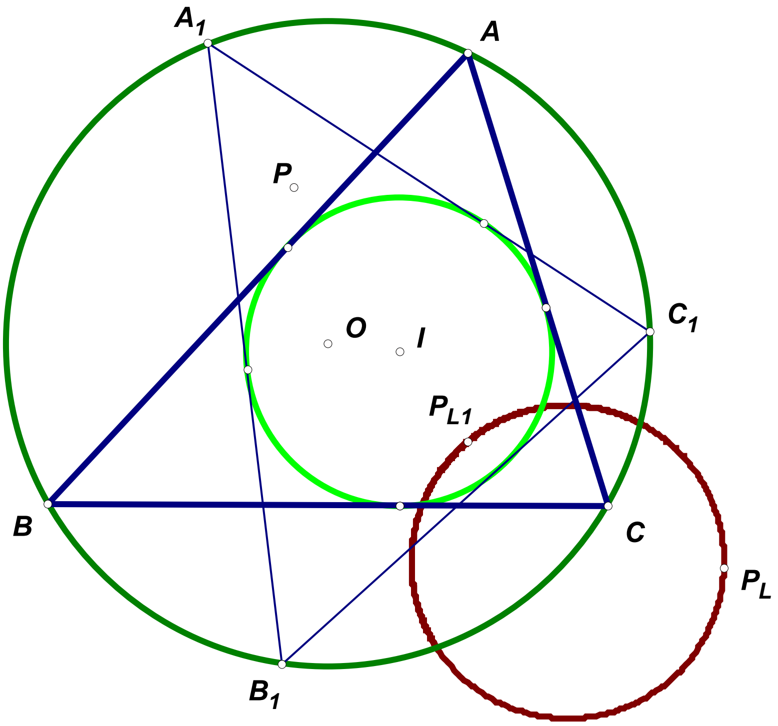
Следующие два примера своим появлением в настоящей публикации обязаны Алексею Заславскому. Он любезно согласился поделиться некоторыми памятными примерами: «Я вспомнил два факта, найденных с помощью компьютера. Правда, для первого нет геометрического доказательства, а для второго – вообще никакого.

Первый факт обнаружил Акопян. Я умею доказывать его с помощью алгебраической геометрии, а кто-то из Гиацинтов нашел доказательство в комплексных числах, потом я обобщил его на случай, когда вписанная коника не окружность».

Пример 4. *Окружности Акопяна.*

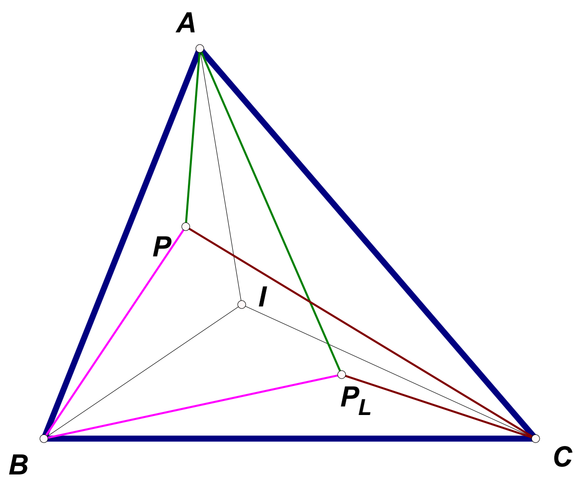
Автор: Арсений Акопян

Рассмотрим множество треугольников с данными описанной и вписанной окружностями и фиксированную точку P. Тогда ГМТ, изогонально сопряженных P относительно рассматриваемых треугольников - окружность.



То, что треугольник можно «вращать»[11] относительно вписанной и описанной окружности, гарантировано *теоремой Понселе.* (см., например, задачу 615 в книжке И.Ф. Шарыгина «Геометрия, задачник 9 – 11» - М.: «Дрофа», 1996).

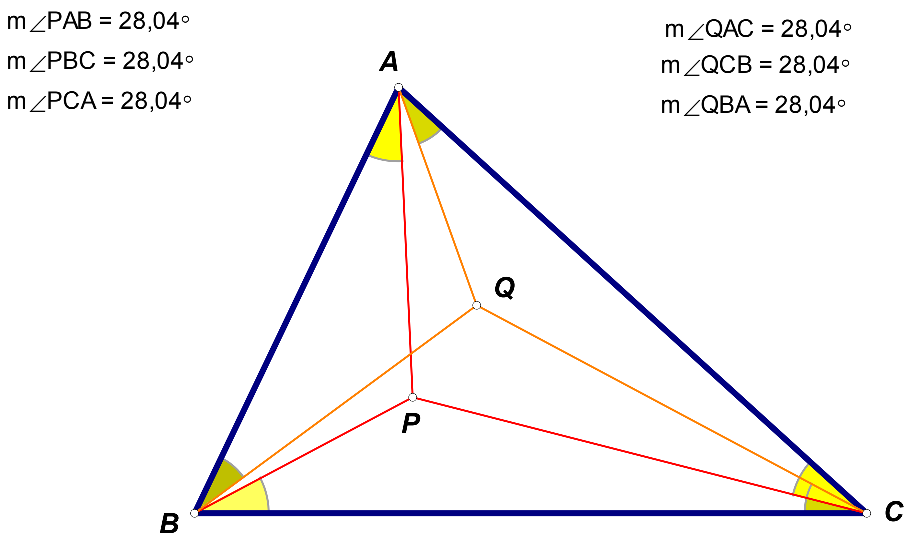
Приведем также, на всякий случай, определение изогонально-сопряженной точки:



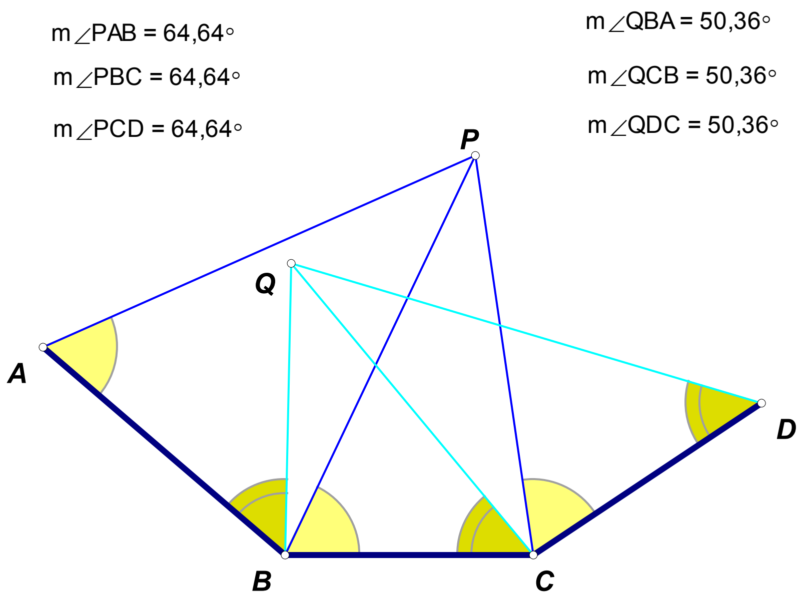
[11] Выражаясь условно, так как треугольники при этом меняются

Пусть три прямые, выходящие из вершин треугольника ABC, пересекаются в точке P. Тогда прямые, им симметричные относительно соответствующих биссектрис треугольника, также пересекаются в одной точке. Эта точка P_L называется точкой, изогонально сопряженной точке P относительно треугольника ABC.

Пример 5. *Равновеликие четырехугольники Брокара.*
Автор: Алексей Заславский.



Известно, что любой треугольник ABC имеет две точки P и Q, такие, что: $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \angle QBA = \angle QCB = \angle QAC$, причем эти точки изогонально сопряжены друг с другом. Их называют, соответственно, *первой* и *второй точкой Брокара*. (О многих интересных свойствах точек Брокара можно прочитать в брошюре В.В.Прасолова «Точки Брокара и изогональное сопряжение» - М.: МЦНМО, 2004). Алексей Заславский ввел понятие точек Брокара для *трехзвенных ломанных*.

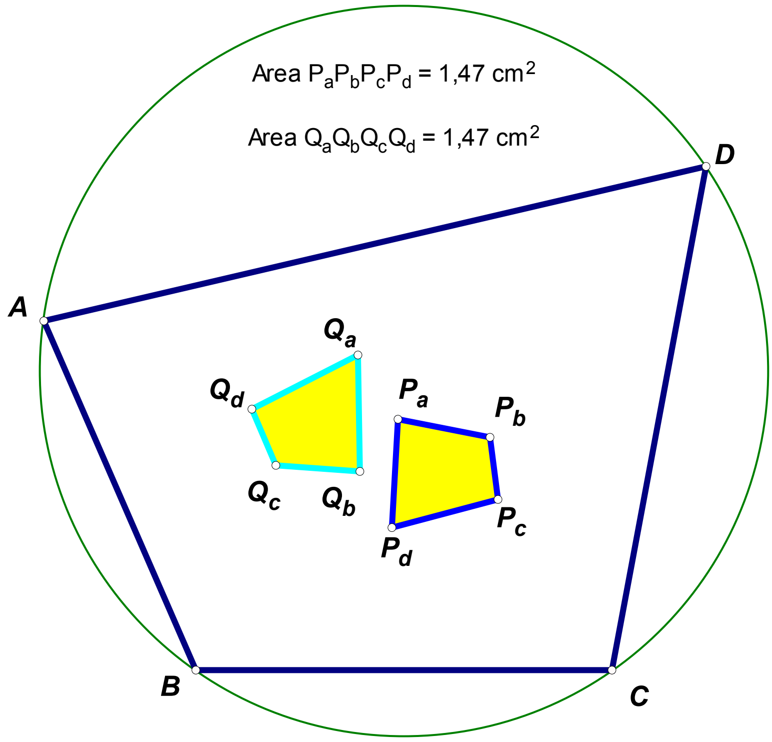


Именно, пусть имеется трехзвенная ломанная $ABCD$. Ее *первой точкой Брокара* P назовем точку, для которой $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD$. *Второй* же *точкой Брокара* Q назовем точку такую, что $\angle QBA = \angle QCB = \angle QDC$ (несложно показать, что у любой трехзвенной ломаной точки Брокара всегда имеются).

Рассмотрим теперь произвольный четырехугольник $ABCD$. Естественным образом с ним связаны четыре первые и четыре вторые точки Брокара: P_a - первая точка Брокара для ломанной $ABCD$, P_b - для $BCDA$, P_c - для $CDAB$, и, наконец, P_d - для $DABC$. Четырехугольник $P_aP_bP_cP_d$ назовем *первым четырехугольником Брокара* четырехугольника $ABCD$. Заменив первые точки Брокара вторыми, аналогично получим *второй четырехугольник Брокара* $Q_aQ_bQ_cQ_d$.

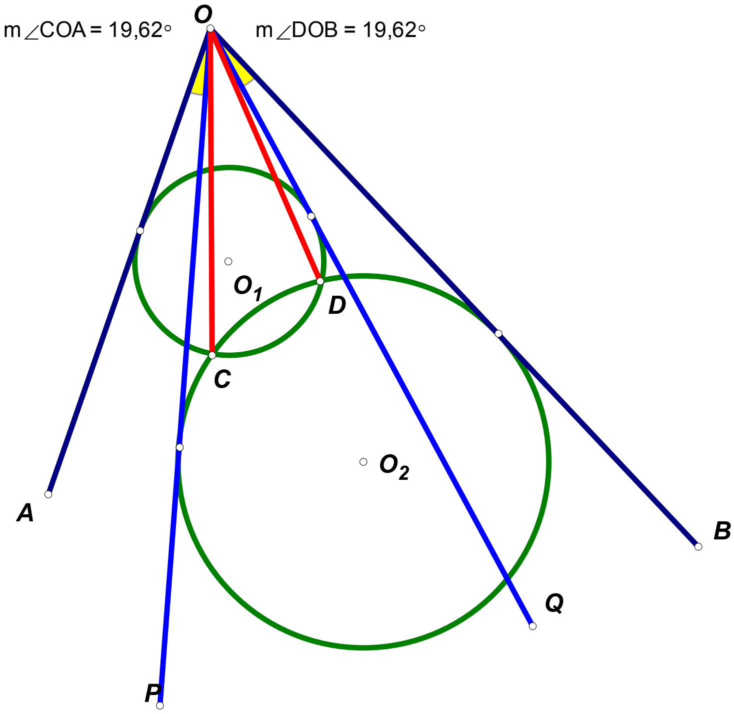
В этих терминах загадочная теорема, открытая Алексеем Заславским, может быть сформулирована следующим образом:

Для любого вписанного в окружность четырехугольника оба его четырехугольника Брокара равновелики.



В самом деле, не совсем понятно (точнее, совсем непонятно), с чем это может быть связано – ведь четырехугольники Брокара даже аффинно не эквивалентны!
Любители нерешенных геометрических проблем получили еще одну.

Пример 6. *Изогональные окружности.*
Авторы: Илья Богданов и Павел Кожевников.



В заключение – изящная миниатюра. Думается, справившись с ее решением, читатель получит удовольствие.

Внутри угла AOB выбраны точки P и Q, так что $\angle POA = \angle QOB$*. Рассмотрим любые две пересекающиеся окружности, одна из которых касается лучей OA и OQ, а другая – OP и OB. Если C и D – точки пересечения окружностей, то* $\angle COA = \angle DOB$.