

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического
образования и просвещения

Год семнадцатый

№ 3 (67)

июль - сентябрь 2013 г.

Москва

И снова о гипотезах Штейнгарца

Д. С. Григорьев, А. Г. Мякишев

В настоящей заметке содержатся некоторые замечания и уточнения к статье Л. А. Штейнгарца «Гипотезы о медианах, высотах, биссектрисах и . . . эллипсах», опубликованной в журнале «Математическое Образование» № 2 (62), 2012.

К Гипотезе 1 (только медианы)

«Три медианы произвольного треугольника разбивают его на 6 треугольников. В эти треугольники вписаны окружности. Тогда центры всех этих шести окружностей лежат на некотором эллипсе»¹.

Комментарий: Мы изготовили соответствующие чертежи, пользуясь динамическими геометрическими программами *The Geometer's Sketchpad* (в России также известной как *Живая Геометрия*) и *GeoGebra*.

Увы, *Гипотеза 1* не подтвердилась, см. рисунки 1, 2, 3.

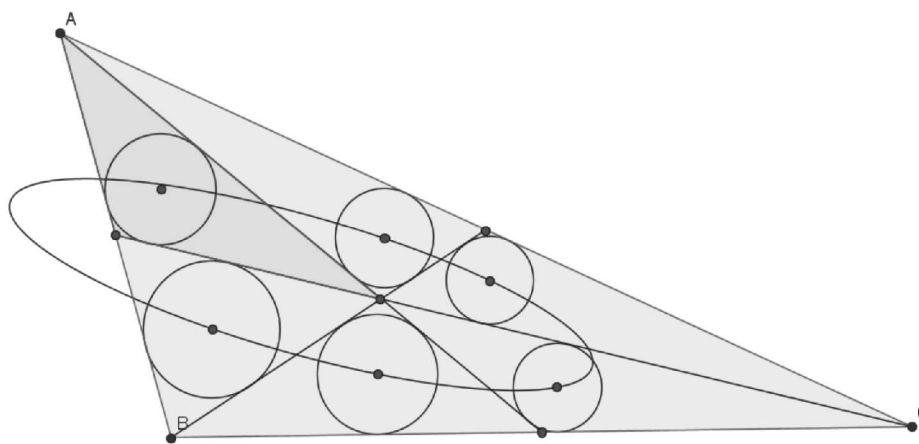


Рис. 1.

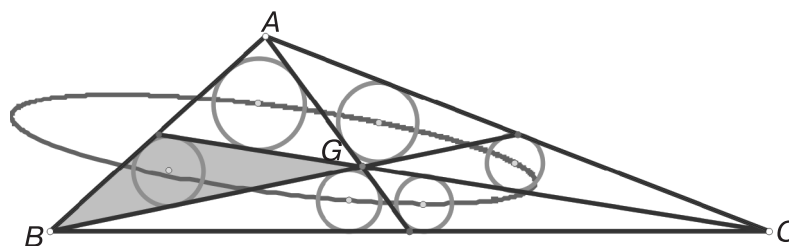


Рис. 2.

¹И здесь, и далее все заковыченные формулировки *Гипотез* и *Определений* — дословные цитаты из статьи Л. А. Штейнгарца.

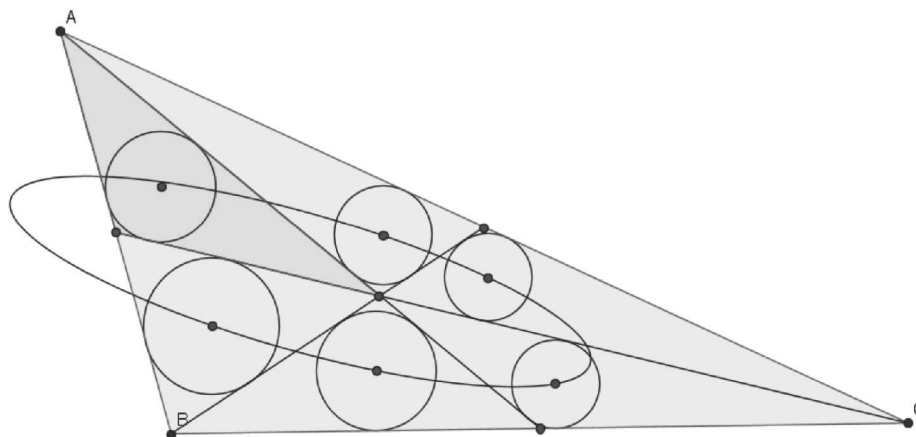


Рис. 3.

Тут, правда, возникает естественный вопрос: насколько «строго» можно считать гипотезу опровергнутой, если для этого приходится ссылаться на некоторые рисунки, полученные при помощи компьютера?

И вообще, следует ли считать доказательством какого-либо математического утверждения — доказательство, в процессе которого отдельные звенья счетно-вычислительного характера «ковались» компьютером и не поддаются «ручной» человеческой проверке?

Насколько известно, впервые подобный прецедент случился в 1976 г., когда Кеннет Аппель и Вольфганг Хейкен из Иллинойского Университета объявили о решении знаменитой *Проблемы Четырех Красок*².

Однако полученный ими утвердительный ответ существенно опирался на компьютерные вычисления, за пределами превосходящие счетные способности любого гуманоида, будь он даже самым расчудесным из всех *чудо-вычислителей на всем белом свете*.

Поскольку разные компьютеры в разных странах уверенно продублировали все эти выкладки, в конце концов *Математическое Сообщество* признало справедливым результат Аппеля, Хейкена и... *Железного Друга*. Но, как говорится, *осадок-то остался* — и потому некоторые математики до сих пор не теряют надежды отыскать «чисто человеческое» доказательство.

Во всяком случае, уличить во лжи как *The Geometer's Sketchpad*, так и *GeoGebra* — никому еще не удалось.

К Гипотезе 2 (только высоты)

«Три высоты произвольного остроугольного треугольника разбивают его на 6 треугольников. В эти треугольники вписаны окружности. Тогда центры всех этих шести окружностей лежат на некотором эллипсе».

Комментарий: Дословно повторяет предыдущий — и эта *Гипотеза* также оказалась несостоятельной.

Заметим, что при этом в остроугольном треугольнике может получиться не только эллипс, проходящий всего лишь через 5 из 6 рассматриваемых точек (см. рисунки 4 и 5), но также гипербола или парабола (см. рисунки 6 и 7).

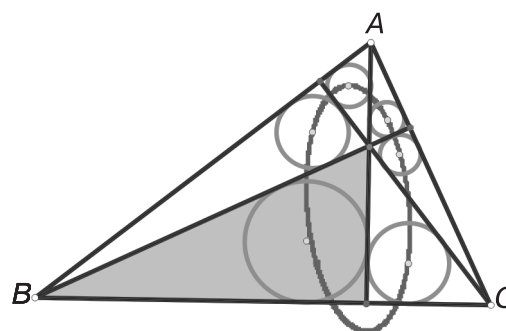


Рис. 4.

²Любую ли карту на плоскости (сфере) можно раскрасить в четыре цвета таким образом, чтобы смежные страны имели разные цвета? (Предполагается, что каждая страна представляет собою *односвязную область* — т. е. любые два пункта на ее территории можно соединить непрерывным путем. При этом граница соседних стран является *линией*, а не просто точкой.)

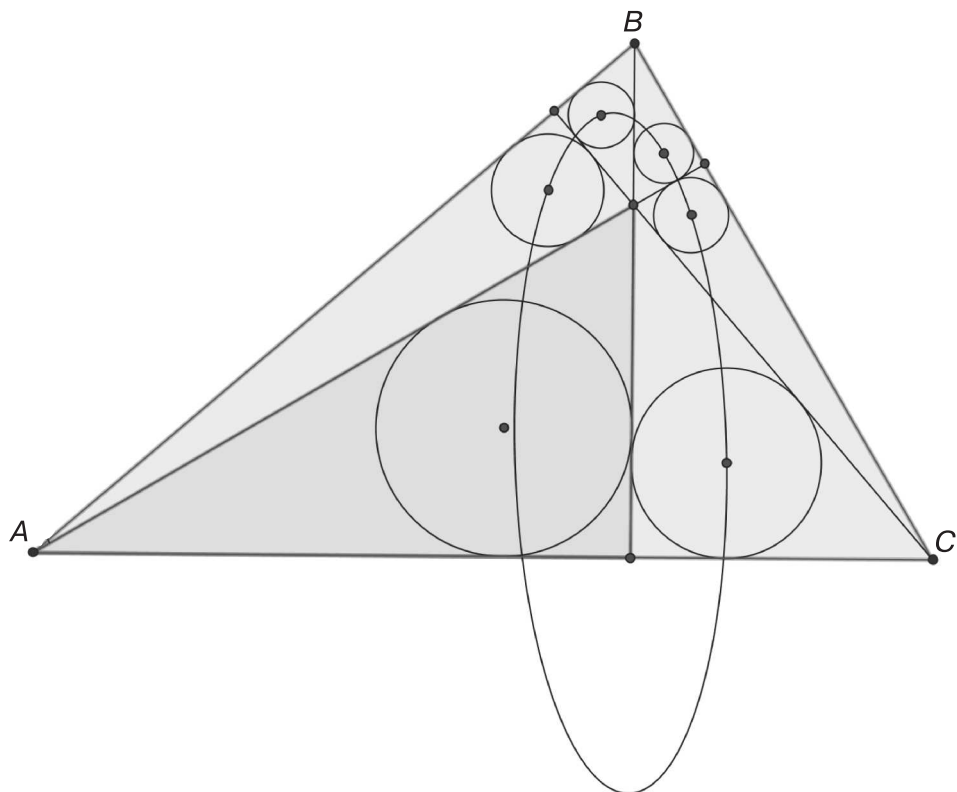


Рис. 5.

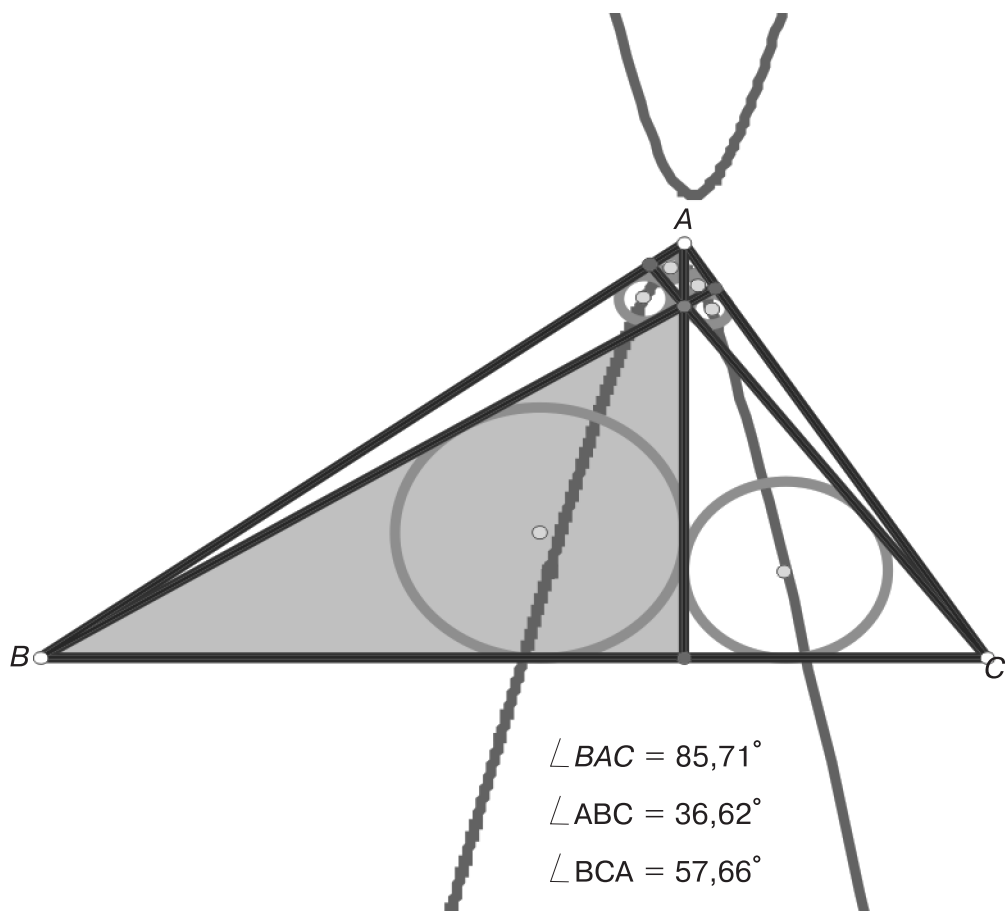


Рис. 6.

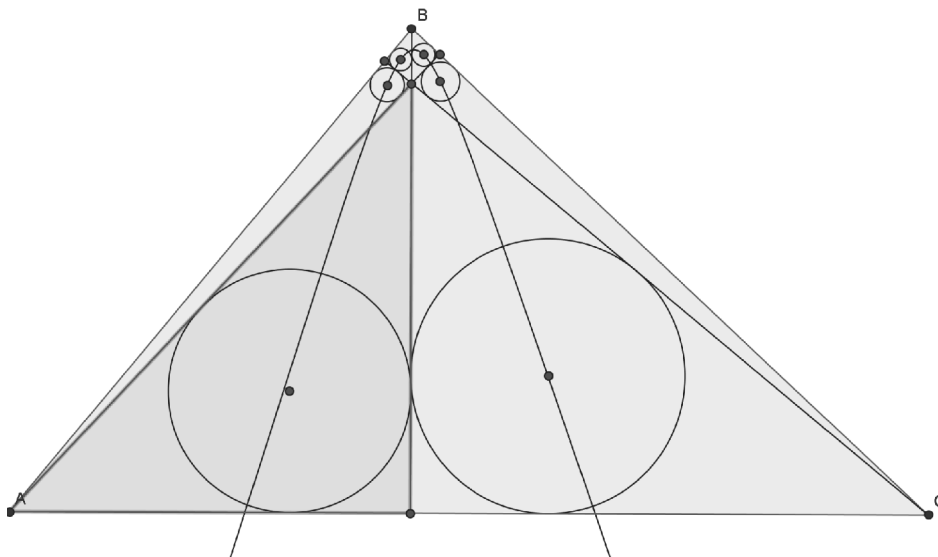


Рис. 7.

К Гипотезе 3 (только биссектрисы)

«Три биссектрисы произвольного треугольника разбивают его на 6 треугольников. В эти треугольники вписаны окружности. Тогда центры всех этих шести окружностей лежат на некотором эллипсе», рис. 8.

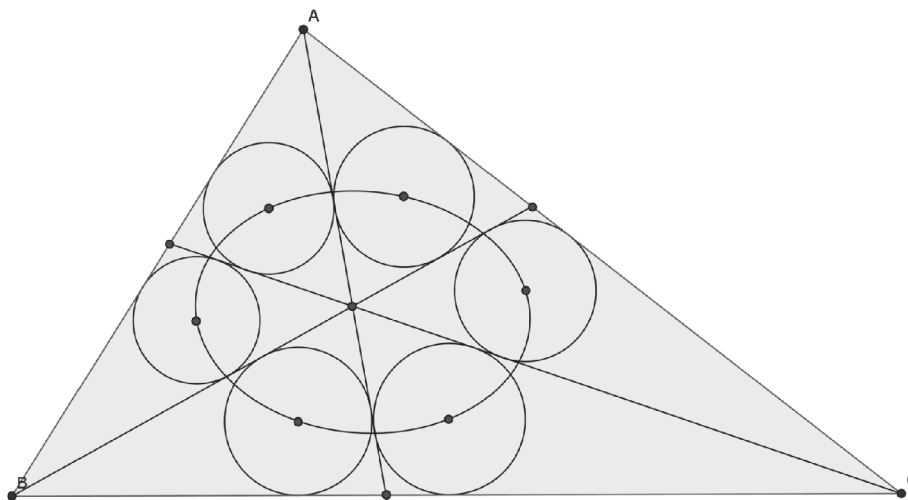


Рис. 8.

Комментарий: А эта гипотеза — верна, и нам даже удалось доказать, что рассматриваемые центры вписанных окружностей принадлежат одной конике, посредством *обратной теоремы Паскаля*³, рис. 9. Правда, доказательство наше — чисто счетное и основано на использовании барицентрических координат, все необходимые сведения о которых читатель сможет почерпнуть в [2], [5], [7], [11].

Приведем далее само доказательство, опуская промежуточные выкладки (их читатель при желании без труда сумеет восстановить самостоятельно) и останавливаясь лишь на ключевых моментах.

Прежде всего, нам понадобится *формула преобразования координат при переходе от одного треугольника к другому*. Вот ее описание.

³Если точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны (т. е. идущие через две) некоторого шестивершинника лежат на одной прямой, то его вершины лежат на одной конике. См. [1],[3],[11]

Пусть нам известны барицентрические координаты некоторой точки P относительно треугольника $A'B'C'$: $P_{A'B'C'} = x' : y' : z'$.

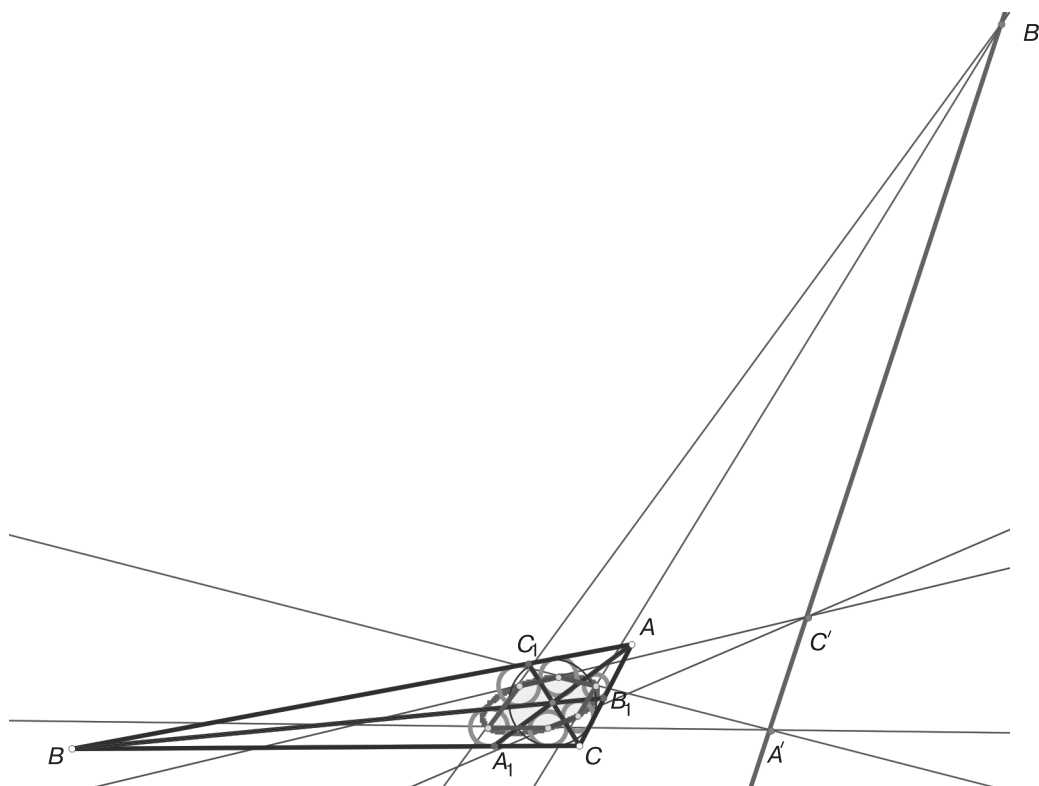


Рис. 9.

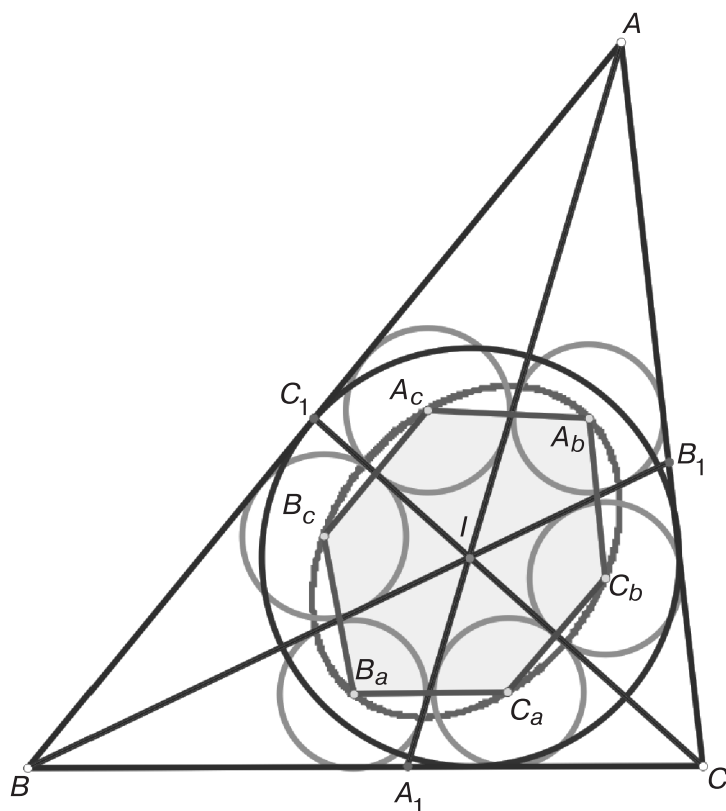


Рис. 10.

И пусть нам также известны *абсолютные* (или *нормированные*)⁴ барицентрические координаты вершин «нового» треугольника $A'B'C'$ относительно исходного треугольника ABC :

$$\begin{aligned} A'_{ABC} &= a_x : a_y : a_z, & a_x + a_y + a_z &= 1. \\ B'_{ABC} &= b_x : b_y : b_z, & b_x + b_y + b_z &= 1. \\ C'_{ABC} &= c_x : c_y : c_z, & c_x + c_y + c_z &= 1. \end{aligned}$$

Тогда барицентрические координаты точки P относительно исходного треугольника ABC имеют вид⁵: $P_{ABC} = a_x \cdot x' + b_x \cdot y' + c_x \cdot z' : a_y \cdot x' + b_y \cdot y' + c_y \cdot z' : a_z \cdot x' + b_z \cdot y' + c_z \cdot z'$.

Введем обозначения, как показано на рисунке 10. И найдем координаты, например, инцентра B_a треугольника BIA_1 .

Как известно, координаты инцентра пропорциональны синусам соответствующих углов треугольника:

$$I_{ABC} = \sin A : \sin B : \sin C.$$

Углы же треугольника BIA_1 легко выразить через углы исходного:

$$\begin{aligned} \angle IBA_1 &= \frac{B}{2}; \angle IA_1B = \pi - B - \frac{A}{2} = \pi - \frac{B}{2} - \left(\frac{A+B}{2}\right) = \pi - \frac{B}{2} - \left(\frac{\pi - C}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{B-C}{2}; \\ \angle BIA_1 &= \pi - \frac{B}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B-C}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$B_{aBIA_1} = \sin \frac{B}{2} : \cos \frac{B-C}{2} : \cos \frac{C}{2}.$$

Подсчитаем далее нормированные координаты вершин «нового» треугольника относительно исходного:

$$\begin{aligned} B_{ABC} &= 0 : 1 : 0; \\ A_{1ABC} &= 0 : \frac{\sin B}{\sin B + \sin C} : \frac{\sin C}{\sin B + \sin C}; \\ I_{ABC} &= \frac{\sin A}{\sin A + \sin B + \sin C} : \frac{\sin B}{\sin A + \sin B + \sin C} : \frac{\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}. \end{aligned}$$

И, повозившись какое-то время с тригонометрией и по достоинству воздав ей должное, по формулам перехода в конце концов получим, что:

$$B_{aABC} = \sin A : \sin B \cdot \left(2 \cos \frac{A}{2} + 2 \cos \frac{B}{2} + 1\right) : \sin C \cdot \left(2 \cos \frac{B}{2} + 1\right).$$

(В частности, мы пользовались тем, что если $A + B + C = \pi$, то $\sin B + \sin C = 2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2}$ и $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$. Первое равенство очевидно, а второе — одно из классических тригонометрических соотношений в треугольнике, на которые столь щедро *тригонометрия треугольника*, см. [4]. Впрочем, если только знать о его *существовании*(!), то вывести — уже дело довольно нехитрое.)

⁴Т.е. сумма координат точки должна равняться единице. Для этого достаточно найти любую тройку барицентрических координат этой точки (которые, в силу *однородности*, определены с точностью до произвольного ненулевого множителя), а затем каждую координату разделить на сумму всех трех.

⁵Читателю, знакомому с основами линейной алгебры и аналитической геометрии, конечно, понятно, что речь идет о преобразовании координат вектора при переходе от нового базиса к старому: для этого нужно транспонировать матрицу перехода и умножить ее на «новый» вектор: $(x : y : z) = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Координаты остальных инцентров получаются из найденных соответствующими циклическими сдвигами и перестановками:

$$\begin{aligned} C_a &= \sin A : \sin B \cdot \left(2 \cos \frac{C}{2} + 1\right) : \sin C \cdot \left(2 \cos \frac{A}{2} + 2 \cos \frac{C}{2} + 1\right). \\ C_b &= \sin A \cdot \left(2 \cos \frac{C}{2} + 1\right) : \sin B : \sin C \cdot \left(2 \cos \frac{B}{2} + 2 \cos \frac{C}{2} + 1\right). \\ A_b &= \sin A \cdot \left(2 \cos \frac{B}{2} + 2 \cos \frac{A}{2} + 1\right) : \sin B : \sin C \cdot \left(2 \cos \frac{A}{2} + 1\right). \\ A_c &= \sin A \cdot \left(2 \cos \frac{C}{2} + 2 \cos \frac{A}{2} + 1\right) : \sin B \cdot \left(2 \cos \frac{A}{2} + 1\right) : \sin C. \\ B_c &= \sin A \cdot \left(2 \cos \frac{B}{2} + 1\right) : \sin B \cdot \left(2 \cos \frac{C}{2} + 2 \cos \frac{B}{2} + 1\right) : \sin C. \end{aligned}$$

Теперь найдем координаты точки $A' = (B_a C_a) \cap (A_b A_c)$

Нам понадобятся уравнения прямой по двум точкам и координаты точки пересечения двух прямых, а также условие *коллинеарности*⁶ *трех точек*

$$T_1 = p_1 : q_1 : r_1, \quad T_2 = p_2 : q_2 : r_2.$$

$$l = (T_1 T_2) : \begin{vmatrix} x & y & z \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (q_1 \cdot r_2 - r_1 \cdot q_2)x + (p_2 \cdot r_1 - r_2 \cdot p_1)y + (p_1 \cdot q_2 - q_1 \cdot p_2)z = 0.$$

$$l_1 : p_1 x + q_1 y + r_1 z = 0, \quad l_2 : p_2 x + q_2 y + r_2 z = 0.$$

$$T = l_1 \cap l_2 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = (q_1 \cdot r_2 - r_1 \cdot q_2) : (p_2 \cdot r_1 - r_2 \cdot p_1) : (p_1 \cdot q_2 - q_1 \cdot p_2).⁷$$

$$T_1 = p_1 : q_1 : r_1, \quad T_2 = p_2 : q_2 : r_2, \quad T_3 = p_3 : q_3 : r_3$$

$$T_1, T_2, T_3 \in l \Leftrightarrow \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Теперь мы полностью готовы сосчитать координаты A' . Для удобства введем обозначения:

$$\cos \frac{A}{2} = p, \quad \cos \frac{B}{2} = q, \quad \cos \frac{C}{2} = r.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (B_a C_a) &= -\frac{2p \cdot (p + q + r + 1)}{\sin A} : \frac{p + r - q}{\sin B} : \frac{p + q - r}{\sin C} \\ (A_b A_c) &= -\frac{2p \cdot (p + 1)}{\sin A} : \frac{2p \cdot (p + r) + p + r - q}{\sin B} : \frac{2p(p + q) + p + q - r}{\sin C} \end{aligned}$$

⁶То есть, принадлежности их одной прямой

⁷Одинаковые выражения для уравнения прямой по двум точкам и точки пересечения двух прямых отражают великий Принцип Двойственности Проективной Геометрии (в которой, если коротко, пучки параллельных прямых пересекаются в так называемых бесконечно удаленных точках, а бесконечно удаленные точки замечают так называемую бесконечно удаленную прямую — см. [1], [3], [5], [11]): если в какой-то теореме Проективной Геометрии в ее условии всюду поменять местами фразы «прямая проходит через две точки» и «две прямые пересекаются в одной точке» — опять получится верное утверждение.

$$\begin{aligned} A' &= (B_a C_a) \cap (A_b A_c) = \left(\text{после сокращения на общий множитель } \frac{2p}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} \right) = \\ &= (r - q) \cdot \sin A : (q - r + 2p \cdot (1 + p + q)) \cdot \sin B : (q - r - 2p \cdot (1 + p + r)) \cdot \sin C. \end{aligned}$$

И, действуя совершенно аналогично (соответствующими циклическими перестановками):

$$\begin{aligned} B' &= (C_b A_b) \cap (B_c B_a) = \\ &= (r - p - 2q(1 + q + p)) \cdot \sin A : (p - r) \cdot \sin B : (r - p + 2q \cdot (1 + q + r)) \cdot \sin C. \\ C' &= (A_c B_c) \cap (C_a C_b) = \\ &= (p - q + 2r \cdot (1 + r + p)) \cdot \sin A : (p - q - 2r \cdot (1 + r + q)) \cdot \sin B : (q - p) \cdot \sin C. \end{aligned}$$

Наконец, чтобы установить коллинеарность точек пересечения, остается показать, что соответствующий определитель обращается в нуль:

$$\begin{aligned} A', B', C' \in l &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \times \\ &\times \begin{vmatrix} r - q & q - r + 2p \cdot (1 + p + q) & q - r - 2p \cdot (1 + p + r) \\ r - p - 2q \cdot (1 + q + p) & p - r & r - p + 2q \cdot (1 + q + r) \\ p - q + 2r \cdot (1 + r + p) & p - q - 2r \cdot (1 + r + q) & q - p \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Наверное, убедиться в этом можно, доказав линейную зависимость строк (или столбцов)⁸.

Мы, однако, поступим просто⁹. А именно, разложим определитель по первой строке, максимально упрощая каждое из трех слагаемых¹⁰. Каждое из них, как выясняется, приводится соответственно к выражениям:

$$\begin{aligned} &2(1 + q + r) \cdot (q + r - p + 2qr) \cdot (r^2 - q^2); \\ &2(1 + q + r) \cdot (q + r - p + 2qr) \cdot (p + r) \cdot (q - r + 2p \cdot (1 + p + q)); \\ &2(1 + q + r) \cdot (q + r - p + 2qr) \cdot (p + q) \cdot (q - r - 2p \cdot (1 + p + r)); \end{aligned}$$

Теперь остается только вынести общий множитель и убедиться в справедливости равенства

$$q^2 - r^2 = (p + r) \cdot (q - r + 2p \cdot (1 + p + q)) + (p + q) \cdot (q - r - 2p \cdot (1 + p + r)),$$

что уже совсем несложно.

Вообще этот определитель¹¹ обладает многими интересными особенностями.

В частности, сумма всех его элементов равна нулю (поскольку суммы по строкам равны $(q - r)(1 + 2p); (r - p)(1 + 2q); (p - q)(1 + 2r)$ соответственно).

Интересно также было бы попробовать сконструировать аналогичный определитель бóльших размерностей и понять, какая геометрия прячется в нем.

Конечно, приведенное выше доказательство у подлинного ценителя Геометрии ничего, кроме чувства негодования (а то и отвращения) вызывать не может, ввиду своей исключительной алгебраичности. Что делать — у нас пока по-другому не получилось¹².

⁸Т. е. если рассматривать их как координаты векторов, то требуется найти линейную комбинацию, обращаящуюся в нулевой вектор

⁹Как говорится, туго — но не совсем; совсем — это было бы раскрытие определителя «в лоб», составляя всевозможные произведения элементов, стоящих в разных строках и столбцах, взятые по три с нужным знаком, определяемым четностью соответствующей перестановки. Что, впрочем, также привело бы к успеху — если запастись терпением и выдержкой.

¹⁰Разложение определителя по i -ой строке: $\det(a_{ij}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \Delta_{ij}$, где Δ_{ij} — определитель $(n - 1)$ -го порядка матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца.

¹¹Его стоит назвать *определителем Жукова–Штейнгарца*. Насколько нам известно, все свои «конические» изобретения Л. А. Штейнгарц посвятил памяти выдающегося педагога и популяризатора математики А. В. Жукова, безвременно ушедшего от нас в прошлом году.

¹²*За отсутствием гербовой пишем на простой!*

Надеемся, что кому-нибудь из читателей посчастливится найти чисто геометрическое обоснование *коконичности* инцентров.

Кроме того, мы не сумели показать, что рассматриваемая коника всегда является эллипсом.

Казалось бы, чего проще: зная координаты пяти точек коники и, действуя затем по известным лекалам, реши возникающую линейную систему 5×5 и выпиши условие на вид коники¹³.

Но это только «казалось бы». Дело в том, что выражения здесь получаются прямо-таки *ужасающе* громоздкими и отталкивающими, и определить вид коники по ним абсолютно невозможно¹⁴.

А ведь должно же существовать некое геометрическое объяснение «эллипсовости»!

Вероятно, как-то должна быть использована *выпуклость* шестиугольника с вершинами в инцентрах¹⁵.

Хорошо бы было, скажем, отыскать *аффинное* преобразование, переводящее нашу конику в заведомый эллипс, а лучше — в окружность¹⁶.

К Гипотезе 4 (медианы и биссектрисы)

«В произвольном треугольнике проведены все медианы и все биссектрисы. Тогда основания этих медиан и биссектрис лежат на некотором эллипсе».

Комментарий: Существование этой коники вытекает из одного следствия *теоремы Карно*.

Теорема Карно. Пусть $A_1, A_2 \in (BC)$; $B_1, B_2 \in (CA)$; $C_1, C_2 \in (AB)$. Тогда эти шесть точек лежат на одной конике, если и только если выполнено *условие Карно*:

$$\left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}} \right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}} \right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}} \right) = 1$$

(см. [1], [11]).

Следствие. Если шесть точек, расположенных на сторонах (или их продолжениях) некоторого треугольника, можно разбить на две тройки, каждая из которых является основаниями *конкурентных*¹⁷ *чевиан*¹⁸, то существует коника, содержащая эти шесть точек, рис. 11.

Для доказательства дважды применим *обратную теорему Чевы* (см. [2], [5], [7], [8], [11]), а затем — теорему Карно:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}} \right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}} \right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}} \right) = \\ & = \left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} \right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}} \right) = \\ & = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

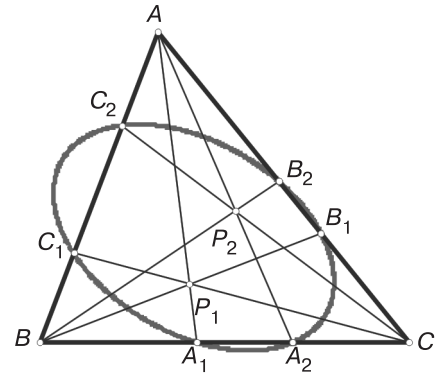


Рис. 11.

Теперь покажем, что рассматриваемая коника является эллипсом. Для этого сначала выведем ее уравнение¹⁹.

¹³ см. далее *Комментарий* к Гипотезе 4

¹⁴ Не помогли и имеющиеся в нашем распоряжении вычислительные программы (довольно мощные), типа *Mathematica for Students* или *Math Lab*. Даже они оказались бессильны.

¹⁵ Но одной выпуклости недостаточно — см. далее *Комментарий* к Гипотезе 6.

¹⁶ Аффинные преобразования характеризуются как преобразования плоскости, переводящие прямые в прямые. Можно показать, что они сохраняют параллельность прямых и отображают коники друг на друга, не меняя их вид. Любой треугольник подходящим аффинным преобразованием может быть переведен в правильный и т.д. Подробнее о них см. [1],[3],[7].

¹⁷ То есть, пересекающихся в одной точке.

¹⁸ Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками на *прямых*, содержащих противолежащие стороны.

¹⁹ В отличие от предыдущей конструкции, здесь это легко, поскольку точки, через которые коника проходит, лежат на сторонах треугольника, и соответствующая линейная система содержит много нулевых коэффициентов.

Известно, что в барицентрических координатах уравнение коники имеет вид²⁰:

$$ux^2 + vy^2 + \omega z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0.$$

(см. [11]). В нашем случае, очевидно, пять точек, задающих конику, имеют следующие координаты:

$$A_0 = 0 : 1 : 1; \quad A_1 = 0 : b : c; \quad B_0 = 1 : 0 : 1; \quad B_1 = a : 0 : c; \quad C_0 = 1 : 1 : 0;$$

План действий далее следующий:

- Положим $f = 1$ (в силу однородности уравнения коники так можно поступить).
- Подставим в уравнение коники первые две координаты. Получим линейную систему с двумя неизвестными, откуда найдем v и w . Подставляя следующие две, опять получаем линейную систему с двумя неизвестными, из которой определяем u и g .
- Наконец, подставив координаты пятой точки, найдем h — после чего умножим все координаты на какой-нибудь хороший общий множитель, чтобы придать им достойный симметрический вид.

В данном конкретном случае приходим к следующему:

$$u = 2bc; \quad v = 2ca; \quad w = 2ab; \quad f = -a(b + c); \quad g = -b(c + a); \quad h = -c(a + b).$$

Коэффициенты коники, что называется, радуют глаз и греют душу.

Определить вид коники поможет

Теорема об определении вида коники и координат ее центра по уравнению (см. [11]). Пусть уравнение коники задано: $ux^2 + vy^2 + \omega z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$.

Введем следующие обозначения: $U = vw - f^2$, $V = wu - g^2$, $W = uv - h^2$, $F = gh - uf$, $G = hf - vg$, $H = fg - wh$. Тогда вид коники зависит от знака выражения $\Phi = U + V + W + 2(F + G + H)$:

Если $\Phi > 0$, то коника является эллипсом, если $\Phi = 0$ — параболой²¹, а если $\Phi < 0$ ²² — гиперболой.

Центр коники имеет координаты $(U + G + H : V + F + H : W + F + G)$.

Дальнейшие выкладки продолжают радовать и греть:

$$\begin{aligned} U &= -a^2(b - c)^2; & V &= -b^2(c - a)^2; \\ W &= -c^2(a - b)^2; & F &= bc(a^2 + bc + 3a(b + c)); \\ G &= ca(b^2 + ca + 3b(c + a)); & H &= ab(c^2 + ab + 3c(a + b)). \end{aligned}$$

И тогда $\Phi = 16abc(a + b + c) > 0$, т. е. наша коника всегда является эллипсом.

Заодно отыщем и координаты центра. Они приводятся к виду

$$4abc(2a + b + c) : 4abc(a + 2b + c) : 4abc(a + b + 2c) = (2a + b + c) : (a + 2b + c) : (a + b + 2c).$$

Эта точка наличествует в фундаментальной энциклопедии профессора Кимберлинга *ETC*²³ (см. [9]), ее порядковый номер там — 1125, рис. 12.

²⁰И является *однородным* как относительно коэффициентов, так и относительно переменных, т. е. не меняется (переходит в равносильное), если все коэффициенты (или все переменные) умножить одновременно на любой постоянный ненулевой множитель.

²¹Или парой параллельных (а то и совпадающих) прямых — «вырожденной» параболой. Эти прямые симметричны относительно любой точки, лежащей на прямой, им параллельной и содержащей середины всех отрезков с концами на этих прямых.

²²Или парой пересекающихся прямых — «вырожденной» гиперболой.

²³на данный момент включающей уже около 5,5 тысяч (!) точек

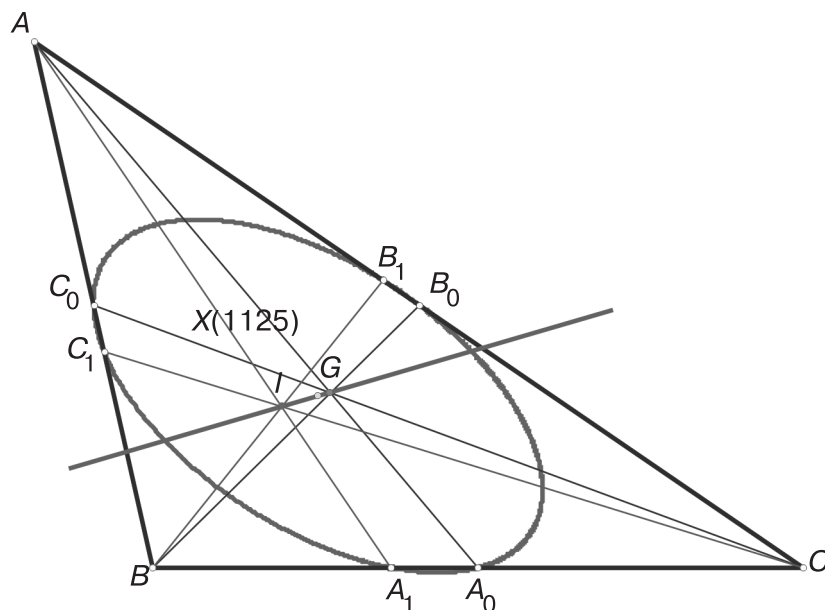


Рис. 12. $X(1125) = (2a + b + c; a + 2b + c; a + b + 2c)$; $IX(1125) = 0,66617\text{см}$, $GX(1125) = 0,22206\text{см}$; $IX(1125)/GX(1125) = 3,00000$; Центр масс системы $(2a + b + c)A$, $(a + 2b + c)B$, $(a + b + 2c)C$ — $X(1125)$ — лежит на прямой GI — прямой Нагеля

Приятно также убедиться и в том, что $X(1125)$ делит отрезок, соединяющий центр масс G и инцентр I ²⁴ в отношении $1 : 3$ внутренним образом: $\frac{GX}{IX} = \frac{1}{3}$.²⁵

Итак, $X = 2a + b + c : a + 2b + c : a + b + 2c$, т. е. X является центром масс системы материальных точек $(2a + b + c)A : (a + 2b + c)B : (a + b + 2c)C$.

Эту систему можно разбить на две подсистемы: $(a + b + c)A$, $(a + b + c)B$, $(a + b + c)C$ (с центром масс в G и суммарной массой $3(a + b + c)$) и aA , bB , cC (с центром в I и суммарной массой $a + b + c$). Из правил группировки и рычага тогда получим, что $X \in [GI]$ (т.к. суммарные массы одного знака — в данном случае «+», то деление отрезка GI точкой X осуществляется внутренним образом) и $3(a + b + c) \cdot GM = (a + b + c) \cdot IX \Leftrightarrow \frac{GX}{IX} = \frac{1}{3}$.

Нет, что ни говори, но и в алгебраических выкладках порою присутствует свое скромное обаяние!

К Гипотезе 5 (высоты и биссектрисы)

«В произвольном остроугольном треугольнике проведены все высоты и все биссектрисы. Тогда основания этих высот и биссектрис лежат на некотором эллипсе».

Комментарий: Существование этой коники также является *Следствием теоремы Карно*, рис. 13, 14.

При сильном желании читатель может попытаться вывести ее уравнение самостоятельно, а затем попробовать определить ее вид²⁶ и найти центр J — надо только неукоснительно следовать инструкциям, указанным в *Комментарии к Гипотезе 4*²⁷.

Поскольку центр этой коники отсутствует в ETC ²⁸ — на долю читателя, таким образом,

²⁴Прямая GI называется *прямой Нагеля* (см.[1],[2],[5],[7],[8],[11]). Пожалуй, после *прямой Эйлера* (см.[1],[2],[5],[7],[8],[11]), это самая известная в Геометрии прямая.

²⁵все необходимое для понимания последующего рассуждения имеется в [2], [5], [11]

²⁶Компьютер подсказывает, что в остроугольном случае, и правда, всегда получается эллипс. А в тупоугольном — все, что только заблагорассудится.

²⁷Но надо быть готовым к тому, что коэффициенты и координаты окажутся довольно противными. Не столь, конечно, безобразными и *крокодильскими*, как в случае *инцентрического эллипса* (см. *Комментарии к Гипотезе 3*) — но все же.

²⁸Равно как и (разумеется!) центр инцентрического эллипса. О поистине *волшебном искусстве* выявлять наличие или отсутствие точки в ETC по одному лишь верно сделанному рисунку (не выписывая даже координат и тем более, значит, не сравнивая их скрупулезно с имеющимися $\approx 5,500$) — см. [6], §12

выпадает счастливая возможность (и почетное право!) пополнить впечатляющую коллекцию Кимберлинга новой точкой²⁹!

В случае успеха ее можно бы вполне окрестить точкой Штейнгарца — *имярек*.

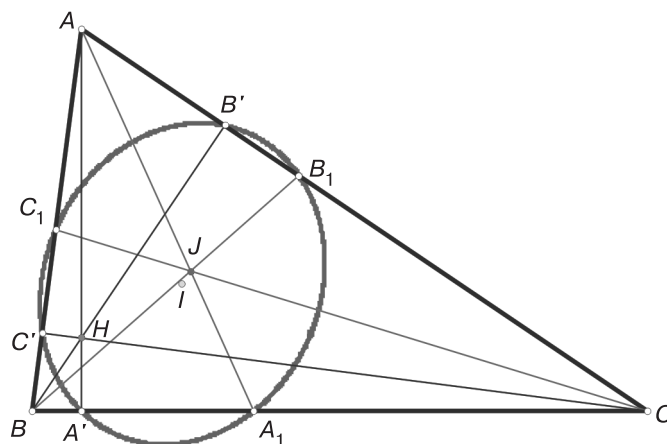


Рис. 13.

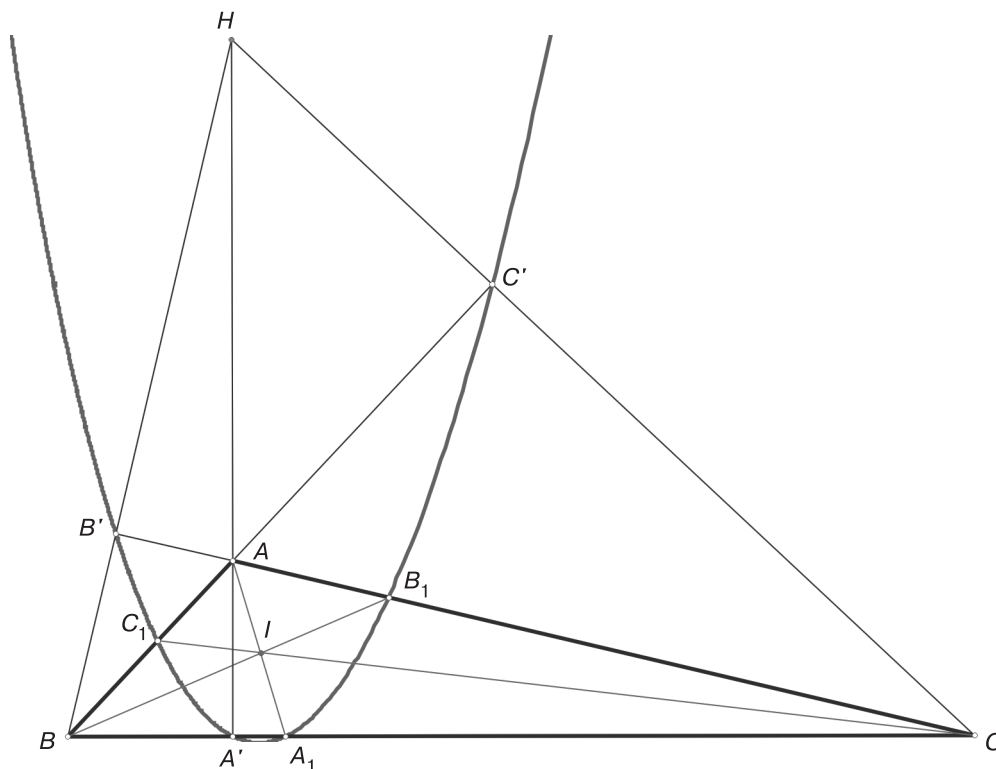


Рис. 14.

Дополнение. Л. А. Штейнгарц продолжил развитие данной тематике в своей статье «Орбиты Жукова и теорема Морлея», опубликованной в журнале «Математика в школе», № 6, 2012.

В частности, там была выдвинута еще одна *Гипотеза*.

²⁹ Другое дело, что такой метод получения новых центров (и коник) — наверное, не из самых лучших.

Во-первых, ввиду его незамысловатости и незатейливости (достаточно выбрать любые две точки из известных — и дело в шляпе).

Во-вторых, далеко не всегда центры так построенных коник будут иметь приличные (а даже и более-менее *сносные* координаты и обладать какими-либо интересными свойствами (т. е. совсем не так, как это получилось давеча, в *Гипотезе 4*) — помимо своей *центральности*. Нужно ли умножать сущности без нужды, причем зачастую сущности монструозные?

Гипотеза 6

«Пусть дан произвольный треугольник, в котором проведены три чевианы (напомним, что это три отрезка, соединяющие вершину треугольника с некоторой точкой на противоположной стороне и проходящие через одну общую точку³⁰). Эти чевианы разбивают данный треугольник на шесть треугольников. Опишем около каждого из полученных треугольников окружность. Тогда центры этих окружностей лежат на некотором эллипсе», рис. 15.

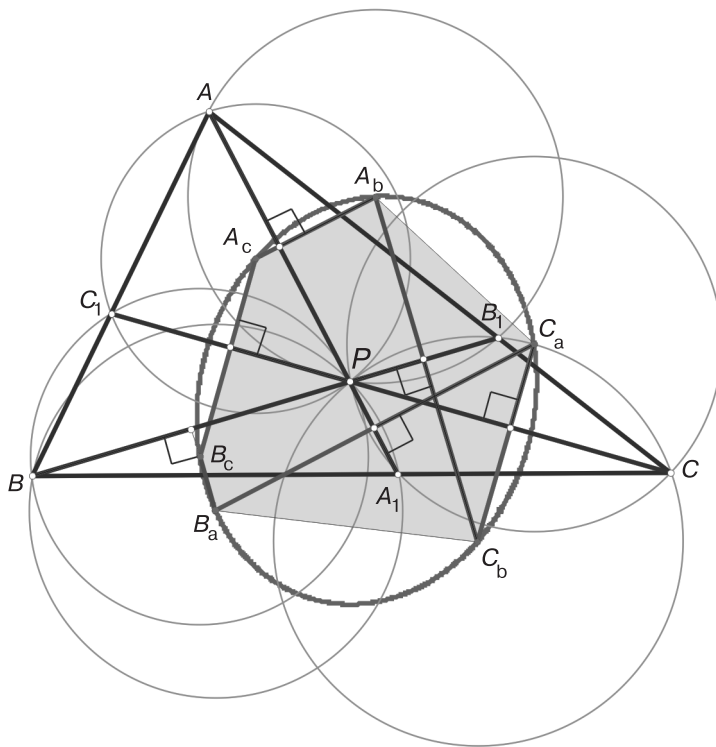


Рис. 15.

Обсудим также и ее.

Комментарий: То, что все шесть центров описанных окружностей лежат на одной конике (даже если точка пересечения чевиан — *внешняя*), следует (как и в *Гипотезе 3*) из *обратной теоремы Паскаля*.

Ведь противоположные стороны шестиугольника³¹ $B_a C_a C_b A_b A_c B_c$ *параллельны* (как пары перпендикуляров к соответствующим чевианам — потому что центр описанной около треугольника окружности лежит на *серединном перпендикуляре* к сторонам треугольника) — т. е., с *проективной точки зрения*, точки пересечения прямых, их содержащих, лежат на *бесконечно удаленной прямой*. См. [1], [3], [5], [7], [11].

Согласно компьютеру, для внутренних точек пересечения чевиан порожденная ими коника всегда принимает форму эллипса. Для внешних же точек возможны как эллипс, так и гипербола, и парабола.

Попробуем разобраться, почему для внутренних точек получается непременно эллипс.

При этом руководствоваться будем исключительно *геометрическими* (наконец-то!) соображениями.

³⁰По поводу этого определения см. сноску 18, в которой приведено несколько другое определение, более распространенное.

³¹Точнее сказать, *шестевршинника* — ибо звенья указанной далее шестизвенной замкнутой ломанной *самопересекаются*. Но теорема Паскаля и обратная ей «работают» и здесь.

На рисунке же серым цветом выделена внутренность т. н. *выпуклой оболочки* множества, образованного центрами описанных окружностей. (В некотором смысле, «наименьшее» выпуклое множество, содержащее данные точки.)

Для начала докажем, что коника, описанная около *выпуклого шестиугольника-параллелограмма*³², есть *эллипс*.

Очевидно, что, в силу выпуклости, такой шестиугольник всегда можно «вписать» (см. рисунок) в треугольник.

Понятно также, что центр описанной около шестиугольника коники (по-прежнему благополучно себе существующей по обратной теореме Паскаля) лежит на пересечении отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

Этот факт вытекает из теоремы о том, что *середины пучка параллельных хорд коники лежат на прямой, проходящей через ее центр*³³ (см. [1], [7], [11]).

Следовательно, центр нашей коники находится внутри шестиугольника и является *конечной* (обычной) точкой плоскости. Поэтому коника не может быть параболой (центр которой — бесконечно удален). Не может она быть и параболой вырожденной, т. е. парой параллельных прямых — хотя центром такого «вырожденца» и можно считать любую (конечную и бесконечную!) точку на «серединой» параллели³⁴, но, ясное дело, вершины выпуклого шестиугольника не могут разместиться на каких-либо *двух* прямых.

Стало быть, описанная коника представляет собой либо эллипс, либо гиперболу.

Будем теперь сдвигать, параллельно соответствующим сторонам треугольника, соответствующие стороны шестиугольника — к вершинам треугольника.

Из соображений непрерывности следует, что при таких деформациях *коника не может изменить свой вид* — ведь для этого она должна пережить «*параболическую катастрофу*», т. е. в какой-то момент обернуться параболой (возможно, вырожденной).

А это-то и невозможно, так как центр по-прежнему конечен (в любой момент деформации) и двух прямых по-прежнему маловато, чтобы разместить на них все вершины.

В предельном случае, когда деформируемые отрезки стянутся в точки, совпадающие с вершинами треугольника, мы получаем описанную около треугольника окружность — частный случай эллипса.

Значит, описанная около изначального шестиугольника коника также представляла собою эллипс.

Вернемся теперь к исходной конструкции этого раздела.

Поскольку для любой *внутренней* точки, порождающей конику, соответствующие вершины могут быть соединены замкнутой ломанной без самопересечений, ограничивающей *выпуклый* шестиугольник³⁵ (он-то и затушеван на рисунке 16 — параллельные отрезки будут его диа-

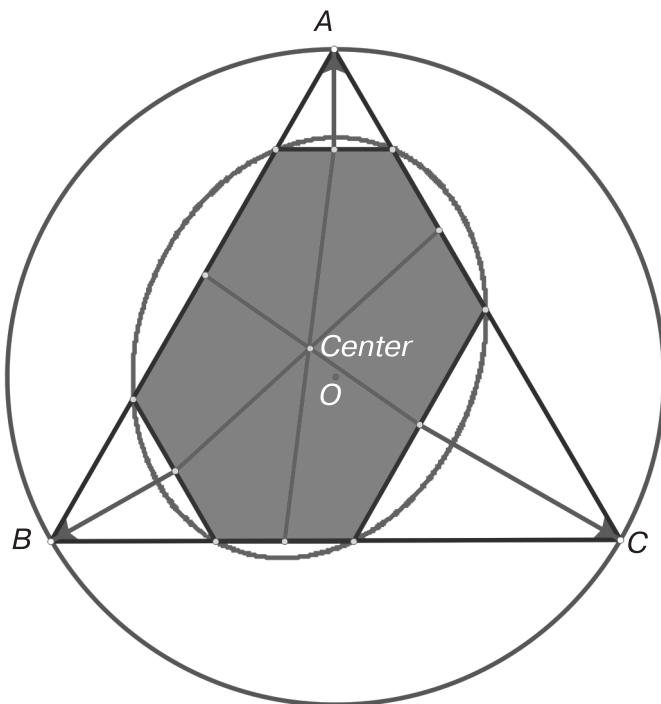


Рис. 16.

³²Шестиугольником-параллелограммом как раз и называют шестиугольник, у которого противоположные стороны параллельны.

³³И прямая эта (или отрезок) называется *сопряженным диаметром* коники. В случае параболы ее центром следует считать бесконечно удаленную точку ее оси. Тогда хордой параболы, проходящей через ее центр, будет являться луч, параллельный оси.

³⁴— см. примечание 21

³⁵На самом деле, довольно деликатный момент. Факт, вроде бы, очевидный — но строго обосновать его мы не умеем.

гоналями), то, рассуждая как только что, приходим к аналогичному выводу — при движении порождающей точки по *внутренности* треугольника вид описанной коники изменится не может!

А «параболическая катастрофа» как раз и происходит при «*нарушении границы*».

На следующих двух картинках (рис. 17, 18) показано, как это происходит: при приближении к стороне треугольника эллипс стремится вытянуться в две параллели, а затем обращается в гиперболу. Остается только указать какое-нибудь положение внутренней точки, про которую достоверно было бы известно, что коника, описанная около порожденного ею шестиугольника, является эллипсом.

И такая точка есть!

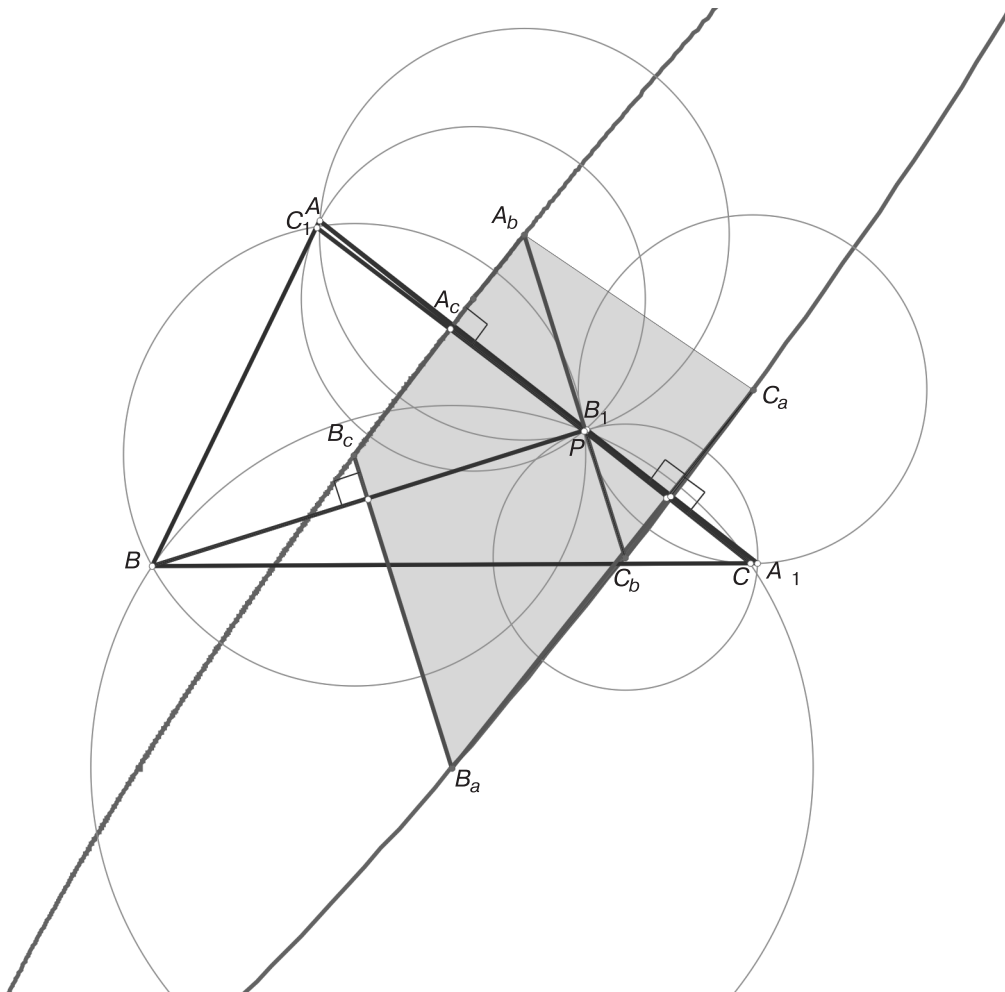


Рис. 17.

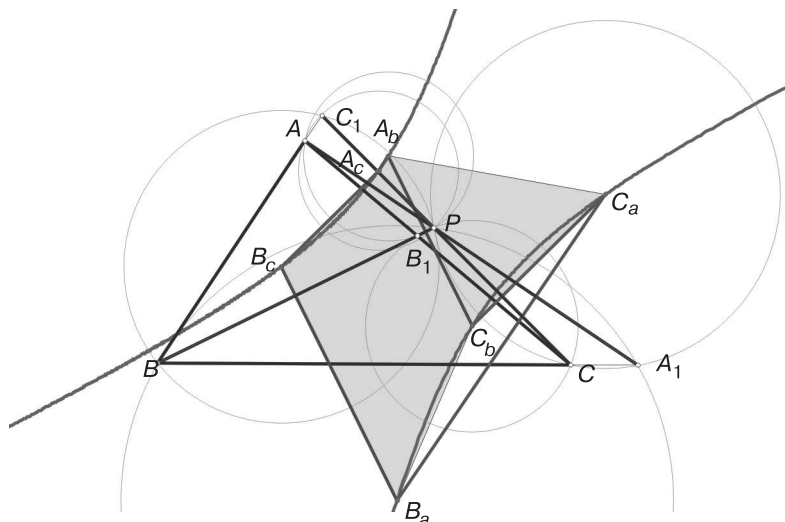


Рис. 18.

Оказывается, если мы выберем точку пересечения медиан (центроид) G , то порожденная ею коника будет не просто эллипсом, но даже окружностью!

Называется она, рис. 19, *окружностью Ламуна* (в честь голландского математика, в 2002 году ее открывшего), а доказательство этого утверждения (не уступающего по красоте самым выдающимся классическим достижениям) прочитать можно, например, здесь: [10], [7].

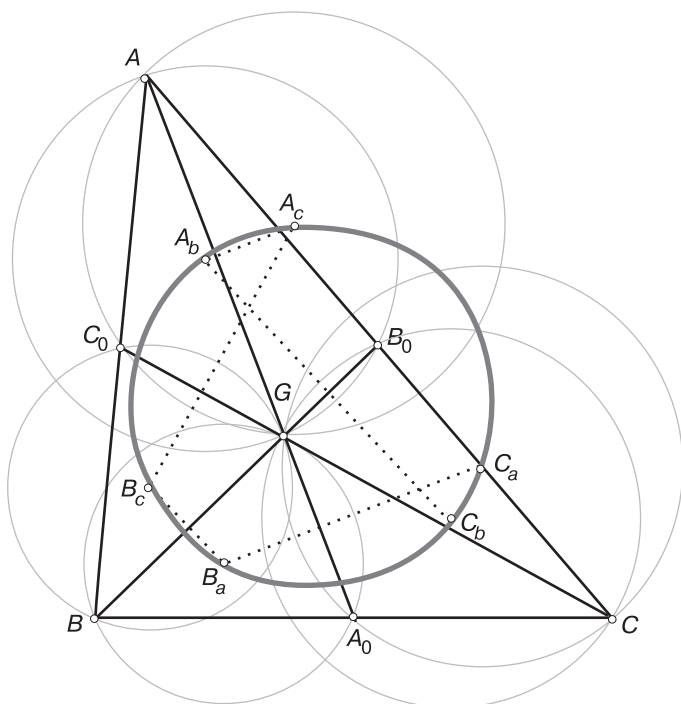


Рис. 19.

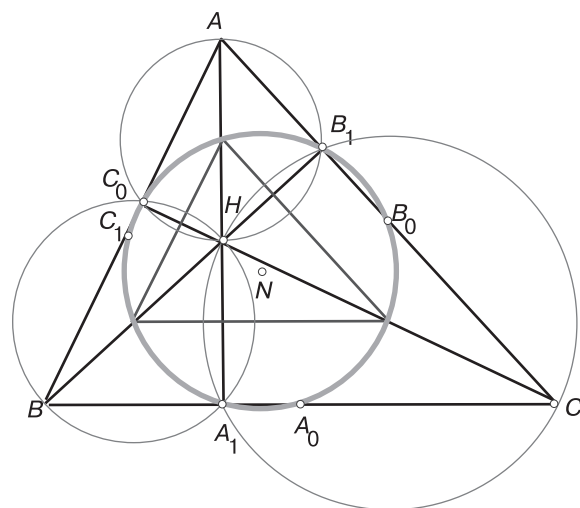


Рис. 20.

В статье [10] доказано также, что есть и еще одна точка, для которой порожденная ею коника вырождается в окружность — а именно, *ортоцентр* (точка пересечения высот) треугольника H (и больше точек с такими свойствами не существует).

В этом случае шестиугольник вырождается в треугольник (поскольку соответствующие пары вершин «слипаются» в середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами).

А коника вырождается в знаменитейшую *окружность Эйлера*, или *окружность девяти точек* — ведь на ней и правда лежат середины сторон, основания высот, а также середины отрезков

ков, соединяющих ортоцентр с вершинами, рис. 20³⁶.

Впрочем, доказывать с помощью ортоцентра эллиптичность коники можно только для остроугольного треугольника, поскольку в тупоугольном случае ортоцентр располагается вне треугольника.

Литература

1. Акопян А., Заславский А. Геометрические свойства кривых второго порядка. - М.: МЦНМО, 2011.
2. Балк М., Болтянский В. Геометрия масс. - М.: Наука, 1987.
3. Заславский А. Геометрические преобразования. - М.: МЦНМО, 2004.
4. Малышев И. Тригонометрические формулы в треугольнике и их обобщения // Фрактал: электронный журнал. - 2013. - №1. URL:
<http://schoolpress.ru/products/rubria/index.php?ID=46934/>
5. Мякишев А. Элементы геометрии треугольника. - М.: МЦНМО, 2009.
6. Мякишев А. Конфигурация равенства // Математическое образование. - 2008. - №2(46). - С. 29-44.
<http://www.geometry.ru/persons/myakishev/text.htm>
7. Прасолов В. Задачи по планиметрии. - М.: МЦНМО, 2007.
8. Шарыгин И. Геометрия. Планиметрия : задачник 9-11. - М.: Дрофа, 2001.
9. Kimberling C. Encyclopedia of Triangle Centers. URL:
<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>
10. Myakishev A., Woo P. On the Circumcenters of Cevian Configurations // Forum Geometricorum. - 2003, №3.
<http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200305index.html>
11. Yiu P. Introduction to the Geometry of the Triangle. URL:
<http://math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf>

*Григорьев Дмитрий Сергеевич,
учащийся 11 класса Лицея № 1303, г. Москва.*

E-mail: d.grigoriev@yahoo.com

*Мякишев Алексей Геннадьевич,
Московский Химический Лицей (школа № 1303).*

E-mail: myakishev62@mail.ru

Статья поступила в редакцию 13 февраля 2013 г.

³⁶Об этих и многих других свойствах окружности Эйлера см. [1], [7], [8], [11].