

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ISSN 1992-6138

Математическое Образование

**Журнал Фонда математического
образования и просвещения**

Год шестнадцатый

№ 4 (64)

октябрь-декабрь 2012 г.

Москва

О некоторых окружностях, связанных с треугольником (окончание)

Алексей Мякишев

Окончание статьи, начатой в двух предыдущих номерах журнала. Примечания к основному тексту вынесены в конец — в отдельный раздел.

§7. Французская+американская помощь или геометрические свойства точек, порождающих окружности

В этом разделе приводятся формулировки и доказательства трех поистине *изумительных* теорем, связанных с найденными точками¹. Меня, во всяком случае, в своё время они впечатлили изрядно. Говорю об этом, отнюдь не хвастаясь и похваляясь — так как теоремы эти были обнаружены не мною, а (в основном) многократно здесь уже упомянутом выдающимся французским геометром *Жаном-Пьером Эрманном*. Вот как всё было.

Получив *ключевое* уравнение (см. §6, *Утверждение* 6.4) и сообразив, что оно решается, я, наученный горьким опытом, на сей раз отписал *Гиацинтам* не мешкая. В послании #20416 (см. [8]), я описал конструкцию, привел само уравнение и даже его решение² и поинтересовался, уже традиционно, степенью новизны полученного результата. И в смысле новизны конструкция не подкачала; однако теперь меня подкарауливали сюрпризы совсем иного рода. Началось с того, что уже через считанные часы откликнулся феерический Жан-Пьер. В сообщении #20417 он привёл формулировку сильно поразившей меня Теоремы 1³, а в сообщении — и её доказательство — после чего в *Гиацинтах* тема больше не обсуждалась.

И тогда мне подумалось, что неплохо было бы тиснуть статейку — в *Forum Geometricorum*, например, — материала, вроде бы, накопилось достаточно.

— Вот, — строил я планы, — отдохну⁴ дней несколько, обмозгую всё хорошенько, забью в компьютер, а затем поднапрягусь, переложу на свой ломаный английский и отправлю редактору Ю. А редактор Ю, знаток не только геометрии, но и редакторского ремесла, разберётся, и, как оно бывало ранее неоднократно, переведет с моего ломаного на нормальный.

Однако события повернулись так, что напрягаться и перекладывать не пришлось.

Черновик фактически уже готовой статьи [9] (вкупе с парой десятков писем) ожидал меня на почтовом ящике *Yahoo*, который автоматом заводился при регистрации на сайте Гиацинтов, и в который я, повинувшись каким-то смутным наитиям, догадался заглянуть⁵ лишь дней пятнадцать спустя после ознакомления на сайте Гиацинтов с посланием #20424, которое, как мне показалось, закрыло тему.

Не тут-то было. Как выяснилось, интенсивные обсуждения конструкции между Полем Ю, Жаном-Пьером Эрманном и испанским геометром Гарсия Капитаном (не уверен в правильности последней транскрипции) всё это время продолжали вестись, только уже переместившись в индивидуальные почтовые пространства *Yahoo* — поскольку Полю Ю теорема о принадлежности центров окружностей пересечению двух коник настолько понравилась, что он посчитал её достойной немедленной публикации в своем журнале⁶. Копии писем исправно и регулярно отсылались и мне, но оставались (в силу изложенных выше обстоятельств) до поры — до времени безответными. Когда же возможность отвечать появилась — по существу, отвечать было уже не на что — я был поставлен перед лицом свершившегося факта⁷, и оставалось только объяснить *коллегам* (вероятно, несколько озадаченным⁸) причины моего столь затянувшегося молчания.

Такова история возникновения статьи [9]⁹. На этом «исторический обзор» заканчиваем и возвращаемся непосредственно к геометрии.

Теорема 1 (Jean-Pierre Ehrmann). Точки P_1, P_2, P_3 , порождающие окружности, суть точки пересечения (отличные от центроида G) следующих двух гипербол¹⁰: Первая гипербола проходит через вершины антидополнительного треугольника $A'B'C'$, центроид G и центр вписанной окружности I треугольника ABC .

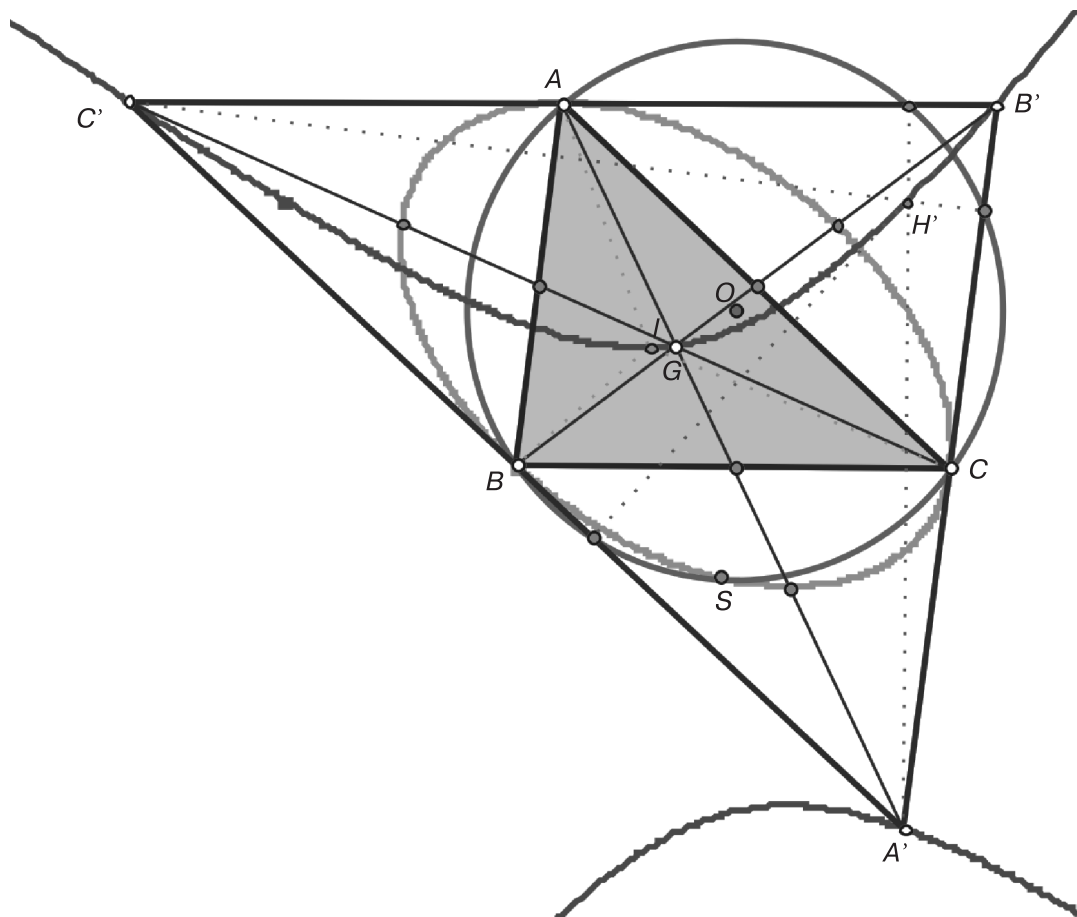


Рис. 1

Эта гипербола — ни что иное, как *гипербола Киперта* антидополнительного треугольника $A'B'C'$, обладающая кучей всяких свойств — см. [1], [7]. Например, она является равнобедренной, проходит также через центры вневписанных окружностей, а центром её служит так называемая *точка Штейнера* S (X_{99} в [5], с координатами $(\frac{1}{b^2-c^2} : \dots : \dots)$, где, как обычно, остальные получаются из первой циклическими сдвигами) — четвертая точка пересечения описанного около ABC эллипса Штейнера с описанной окружностью.

Также она является изогональным (относительно антидополнительного треугольника) образом прямой $O'K'$ и, (довольно неожиданно) геометрическим местом таких точек P , что точка P , изотомически ей сопряженная P_m и изогонально ей сопряженная P_l ¹¹ лежат на одной прямой, [7].

Вторая гипербола проходит через вершины треугольника ABC , его центроид G и точку Лемуана K .

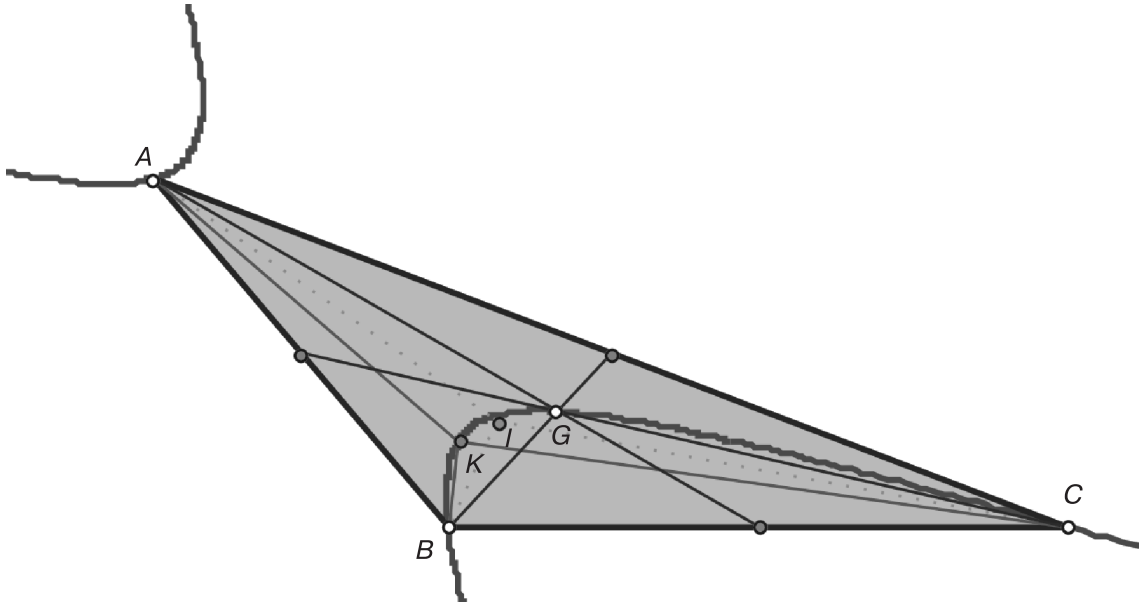


Рис. 2

Эта гипербола (не будучи, отметим, равносторонней) обладает, конечно, значительно меньшим «зарядом замечательности» в сравнении с предыдущей. Тем не менее, укажем на тройку занятых фактов, с нею связанных. Во-первых, она также проходит через точку Парри P (X_{111} в [5], с координатами $(\frac{a^2}{b^2+c^2-2a^2} : \dots : \dots)$), которая, будучи изогональным образом бесконечно удаленной точки прямой GK , лежит также и на описанной около ABC окружности. Во-вторых, центром этой гиперболы является точка X_{1084} в [5], с координатами $(a^4(b^2 - c^2)^2 : \dots : \dots)$.

В третьих, сама гипербола является изогональным образом прямой GK ¹².

Доказательство. Пусть точка P — любая из трех точек, порождающих окружность. То, что такая точка, в случае разностороннего треугольника, не совпадает с центроидом G , уже было показано ранее, см. *Утверждение 6.7 §6*. Пусть, далее, P имеет некие барицентрические координаты $(p : q : r)$.

Поскольку эта точка порождает окружность, координаты должны удовлетворять ключевому уравнению

$$\frac{p}{(q+r)a^2} = \frac{q}{(r+p)b^2} = \frac{r}{(p+q)c^2}.$$

Тогда должны выполняться следующие равенства:

$$\begin{cases} f = c^2q(p+q) - b^2r(r+p) = 0 \\ g = a^2r(r+q) - c^2p(p+q) = 0 \\ h = b^2p(p+r) - a^2q(q+r) = 0 \end{cases}$$

Сложив все три равенства и произведя несложную перегруппировку слагаемых, приходим к соотношению

$$0 = f + g + h = (b^2 - c^2)p^2 + (c^2 - a^2)q^2 + (a^2 - b^2)r^2.$$

А это означает, что точка P лежит на конике, задаваемой уравнением

$$(b^2 - c^2)u^2 + (c^2 - a^2)v^2 + (a^2 - b^2)w^2 = 0.$$

Очевидно, что координаты точек

$$G(1:1:1), A'(-1:1:1), B'(1:-1:1), C'(1:1:-1), I(a:b:c)$$

этому уравнению удовлетворяют — и потому эта коника совпадает с первой гиперболой¹³.

Совершенно аналогично, равенство $a^2f + b^2g + c^2h = 0$ приводит нас к гиперболе, описанной около треугольника ABC и задаваемой уравнением

$$a^2(b^2 - c^2)vw + b^2(c^2 - a^2)wu + c^2(a^2 - b^2)uv = 0.$$

Несложно убедиться в том, что координаты точек $G(1 : 1 : 1)$ и $K(a^2 : b^2 : c^2)$ этому уравнению удовлетворяют.

Замечание. В случае равнобедренного треугольника первая гипербола вырождается в пару прямых, одна из которых содержит высоту треугольника, проведенную к основанию, а вторая — сторону антидополнительного треугольника, параллельную основанию.

Вторая гипербола также вырождается в пару прямых, одна из которых содержит ту же высоту, а вторая — основание треугольника.

Это означает, что, конечно же, указанное построение «работает» и в случае равнобедренного треугольника.

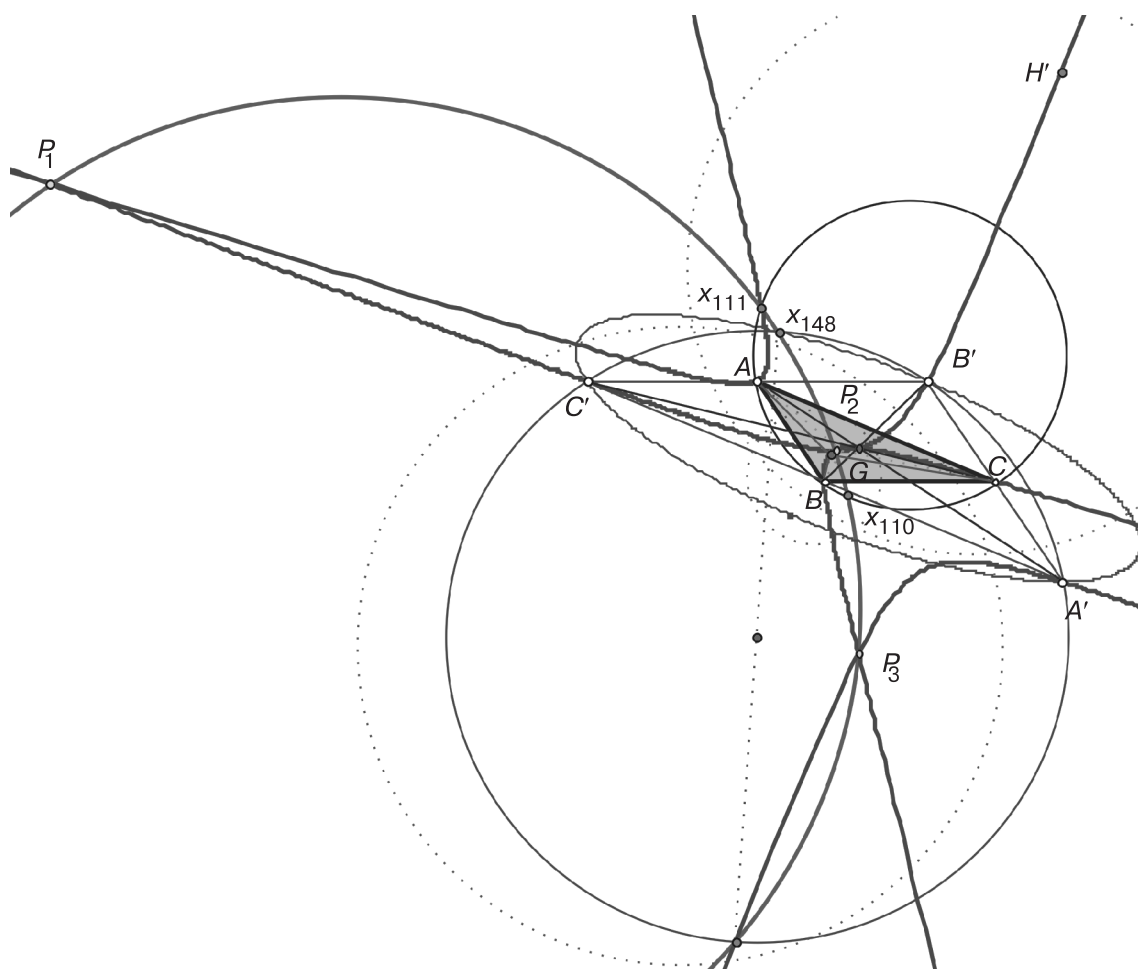


Рис. 3

Теорема 2. (*Jean-Pierre Ehrmann* и *Co*¹⁴). Окружность, проходящая через точки P_1, P_2, P_3 , содержит также следующие четыре точки:

(1) X_{110} ([5]) — фокус параболы Киперта, т. е. параболы, вписанной в треугольник ABC , директриса которой совпадает с прямой Эйлера данного треугольника. Эту точку (расположенную на описанной около ABC окружности) можно также получить, отражая прямую Эйлера относительно сторон треугольника ABC . Полученные отражения пересекутся как раз в ней. Кроме

того, X_{110} является *антиподом* (т. е., диаметрально противоположной) точки, изогонально сопряженной бесконечно удаленной точке прямой Эйлера;

(2) X_{111} ([5]) — *точка Парри (Parry point)*, лежащей на описанной около треугольника ABC окружности и на второй гиперболе, описанной в условии предыдущей теоремы. Она, как уже было отмечено, является точкой, изогонально сопряженной бесконечно удаленной точке прямой GK ;

(3) X_{147} ([5]) — *точка Тарри (Tarry point)* антидополнительного треугольника $A'B'C'$. Она является четвертой точкой пересечения описанной около треугольника $A'B'C'$ окружности и описанной около него же *гиперболы Киперта* — т. е. на первой из гипербол, описанных в условии теоремы 1.

(4) X_{148} ([5]) — *точка Штейнера* антидополнительного треугольника $A'B'C'$. Это — четвертая точка пересечения описанной около треугольника $A'B'C'$ окружности и *описанного* около него же *эллипса Штейнера* (см. *утверждение 5.5*). При этом X_{147} и X_{148} — антиподы относительно описанной около $A'B'C'$ окружности.

Доказательство. Используем те же идеи, что и при доказательстве теоремы 1.

(А вот попытка доказательства в «лоб», связанная с составлением уравнения окружности по координатам точек P_1, P_2, P_3 (такое есть — см. [4], [7]), наверняка привела бы к серьезным вычислительным затруднениям — уж больно тяжеловесны эти координаты^{15!})

А именно, рассмотрим следующее равенство (правда, более затейливое):

$$a^2(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)f + b^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)g + c^2(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)h = 0.$$

Это равенство, после соответствующей группировки слагаемых, можно представить в виде:

$$(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2yz + b^2zx + c^2xy) + (x + y + z) \cdot (...) = 0,$$

где выражение в последних скобках (...) представляет собой следующее выражение:

$$b^2c^2(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - 2a^2)x + c^2a^2(c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - 2b^2)y + a^2b^2(a - b^2)(a^2 + b^2 - 2c^2)z.$$

Это уравнение, конечно, относится к типу уравнений

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + x)(u_0x + v_0y + z_0x) = 0,$$

а они-то и задают окружности (см. [4],[7]).

Теперь, во-первых, заметим, что уравнение $(a^2yz + b^2zx + c^2xy) = 0$ задает описанную около треугольника ABC окружность (см. [4],[7]) и потому координаты точек X_{110} и X_{111} «обнуляют» первую тройку слагаемых левой части уравнения коники, выписанного выше, поскольку обе точки принадлежат описанной окружности.

А во-вторых, легко убедиться непосредственной подстановкой, что координаты этих точек также удовлетворяют уравнению $(...) = 0$ (задающего, отметим, некоторую прямую), ведь (см. [5]):

$$X_{110} = \left(\frac{a^2}{b^2 - c^2} : \frac{b^2}{c^2 - a^2} : \frac{c^2}{a^2 - b^2} \right)$$

и

$$X_{111} = \left(\frac{a^2}{b^2 + c^2 - 2a^2} : \frac{b^2}{c^2 + a^2 - 2b^2} : \frac{c^2}{a^2 + b^2 - 2c^2} \right).$$

Осталось ещё разобраться с точками X_{147} и X_{148} .

Здесь, применив некий довольно остроумный трюк, можно счастливо избежать прямой подстановки координат (также, надо сказать, далеко не сахарных) этих точек в уравнение найденной окружности (обозначим ее буквой ω). А именно, рассмотрим окружность ω_0 , полученную из окружности ω посредством гомотетии $H_G^{-\frac{1}{2}}$. Тогда, естественно, ω получается из ω_0 посредством обратной гомотетии H_G^{-2} . Вспомнив теперь лемму из *Утверждения 3.5* (пусть заданы

две точки Q и Q' , имеющие относительно треугольника ABC следующие барицентрические координаты:

$$Q = (p : q : r), \quad Q' = (q + r - p : r + p - q : p + q - r).$$

Тогда гомотетия с центром в центреиде G и коэффициентом -2 переводит точку Q в $Q' : Q' = H_G^{-2}(Q)$, приходим к такому выводу:

$$\text{Точка } P(x : y : z) \in \omega_0 \Leftrightarrow P'(y + z - x : z + x - y : x + y - z) \in \omega.$$

Отсюда следует, что уравнение окружности ω_0 мы получим, если в уравнении окружности ω совершим замены

$$(x \leftrightarrow y + z - x; y \leftrightarrow z + x - y; z \leftrightarrow x + y - z).$$

И, после соответствующей перегруппировки слагаемых, придем к следующему уравнению окружности ω_0 :

$$2(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)(a^2yz + b^2zx + c^2xy) - (x + y + z) \cdot (...) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} (...) = & a^2(b^2 - c^2)(b^4 + c^4 - a^2(b^2 + c^2))x + \\ & + b^2(c^2 - a^2)(c^4 + a^4 - b^2(c^2 + a^2))y + c^2(a^2 - b^2)(a^4 + b^4 - c^2(a^2 + b^2))z. \end{aligned}$$

Если теперь удастся показать, что на этой окружности лежат: точка

$$X_{98} \left(\frac{1}{b^4 + c^4 - a^2(b^2 + c^2)} : \frac{1}{c^4 + a^4 - b^2(c^2 + a^2)} : \frac{1}{a^4 + b^4 - c^2(a^2 + b^2)} \right)$$

— точка *Тарри* исходного треугольника ABC , см. [5], и ее антипод относительно описанной около ABC окружности — точка *Штейнера* $X_{99} \left(\frac{1}{b^2 - c^2} : \frac{1}{c^2 - a^2} : \frac{1}{a^2 - b^2} \right)$, см. [5], то теорема 2 будет доказана полностью. Ведь тогда на окружности ω будут лежать гомотетичные образы этих точек (при гомотетии H_G^{-2}), т. е. как раз точки X_{147} и X_{148} .

Но, поскольку обе точки X_{98} и X_{99} лежат на описанной около ABC окружности, при подстановке их координат в ее уравнение $(a^2yz + b^2zx + c^2xy)$ получим нуль. В том же, что и скобка (...) также «зануляется», легко убедиться непосредственной подстановкой.

Теорема 3 (*Jean-Pierre Ehrmann* и *Co*). Окружности, порожденные точками P_1, P_2, P_3 , принадлежат семейству *Тукеровых*. Их центры расположены на одной прямой, а именно, на прямой OK (O — центр описанной около треугольника ABC окружности), так называемой *оси Брокара* треугольника ABC , рис. 4.

Предварительно напомним, что *окружность Тукера* — это окружность, описанная около шестиугольника *Тукера*, который может быть построен следующим образом.

На стороне BC (или ее продолжении) произвольного треугольника ABC выбираем случайным образом некую точку A_1 и из нее проводим *антипараллель*¹⁶ к стороне AC . Пусть она пересекает сторону AB (или ее продолжение) в некоторой точке C_2 . Из этой точки проведем *параллель* к BC и отметим точку B_2 ее пересечения с AC . Далее, чередуя антипараллели с параллелями, получим еще три точки на сторонах (или их продолжениях) треугольника ABC , причем шестой шаг *обязательно* вернет нас в исходную точку A_1 (т. е. процесс замыкается на ней). Полученный шестиугольник и есть шестиугольник *Тукера*. Около него *всегда* можно описать окружность, а его три антипараллели *обязательно* равны друг другу, рис. 5.

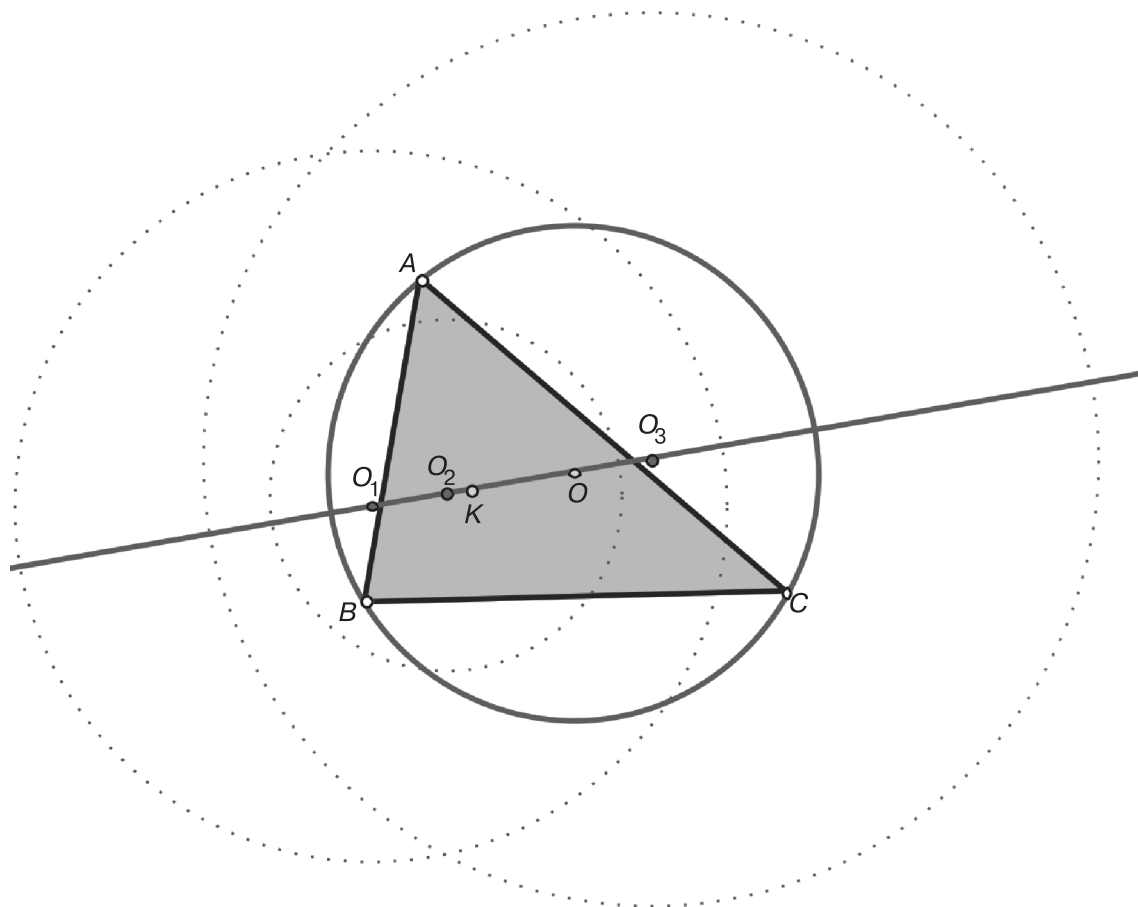


Рис. 4

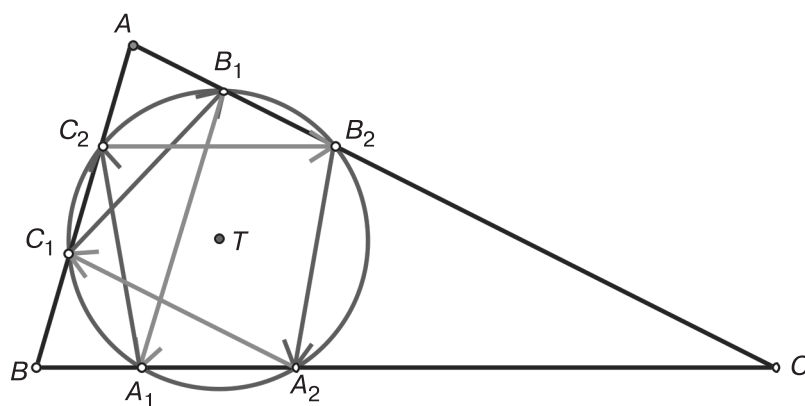


Рис. 5

К Тукеровому семейству, в частности, относятся первая и вторая (когда мы проводим через точку Лемуана не параллели, а антипараллели) окружности Лемуана и окружность Тейлора.

(Обо всем этом и о многих других свойствах окружностей Тукера — см. [6]; [2], з. 5.158–5.162).

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любого представителя семейства построенных нами коник $A_bA_cB_aB_cC_aC_b$ прямые A_bA_c, B_aB_c, C_aC_b будут соответственно параллельны прямым BC, CA, AB , рис. 6.

Действительно, рассмотрим, например, гомотетию с центром в вершине A и коэффициентом $k = \frac{AA_1}{PA_1}$. Очевидно, что она переводит треугольник PBC в треугольник $A_1A_cA_b$, откуда немедленно вытекает параллельность прямых A_bA_c и BC .

Параллельность двух других пар прямых доказывается аналогично.

Значит, каждая из наших окружностей также будет высекать соответствующие параллели как входящая в рассматриваемое семейство коник.

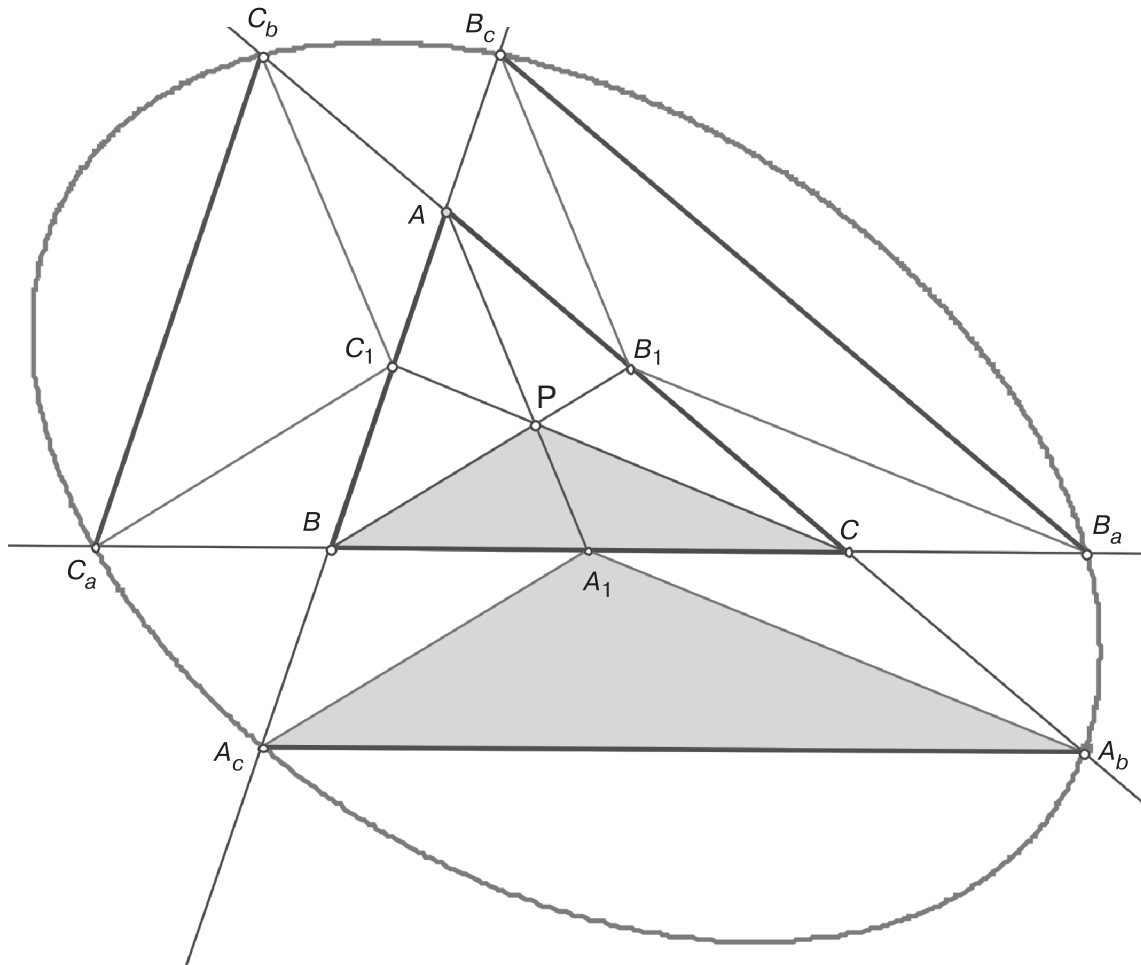


Рис. 6

Однако оказывается справедливым следующее утверждение:

Если некоторая окружность высекает на сторонах (или их продолжениях) треугольника ABC шестиугольник $A_b A_c B_a B_c C_a C_b$ таким образом, что прямые $A_b A_c, B_a B_c, C_a C_b$ соответственно параллельны прямым BC, CA, AB , то такой шестиугольник является Тукеровым, рис. 7.

В самом деле, докажем, например, что в этой ситуации прямая $B_a A_b$ антипараллельна прямой AB (для остальных двух пар доказательство будет аналогичным).

Другими словами, нужно показать, что $\angle C A_b B_a = \angle ABC$, $\angle C B_a A_b = \angle BAC$.

Введем следующие обозначения: $\angle A, \angle B, \angle C$ — углы треугольника ABC при соответствующих вершинах, $\varphi = \angle C A_b B_a$, $\psi = \angle C B_a A_b$, $\theta = \angle C_b B_c A$.

Поскольку трапеция, вписанная в окружность — равнобокая, то соответствующие четверки точек шестивершинника $A_b A_c B_a B_c C_a C_b$ образуют три равнобокие трапеции.

Из рассмотрения трапеции $A_b B_a B_c C_b$ следует, что $\psi + \angle C = \theta + \angle A$ (мы еще воспользовались тем, что углы, образованные парами соответственно параллельных прямых, равны). Равнобокость трапеции $A_c C_a B_c C_b$ позволяет «перекинуть» угол θ из правой (верхней) части трапеции в левую (нижнюю). А тогда рассмотрение трапеции $A_c C_a B_a A_b$ дает нам равенство $\varphi + \angle C = \theta + \angle B$. Вычтя из второго равенства первое, получим, что $\varphi - \psi = \angle B - \angle A$. А теорема о сумме углов треугольника, примененная к треугольникам $C A_b B_a$ и ABC , ведет к равенству $\varphi + \psi = \pi - \angle C = \angle A + \angle B$.

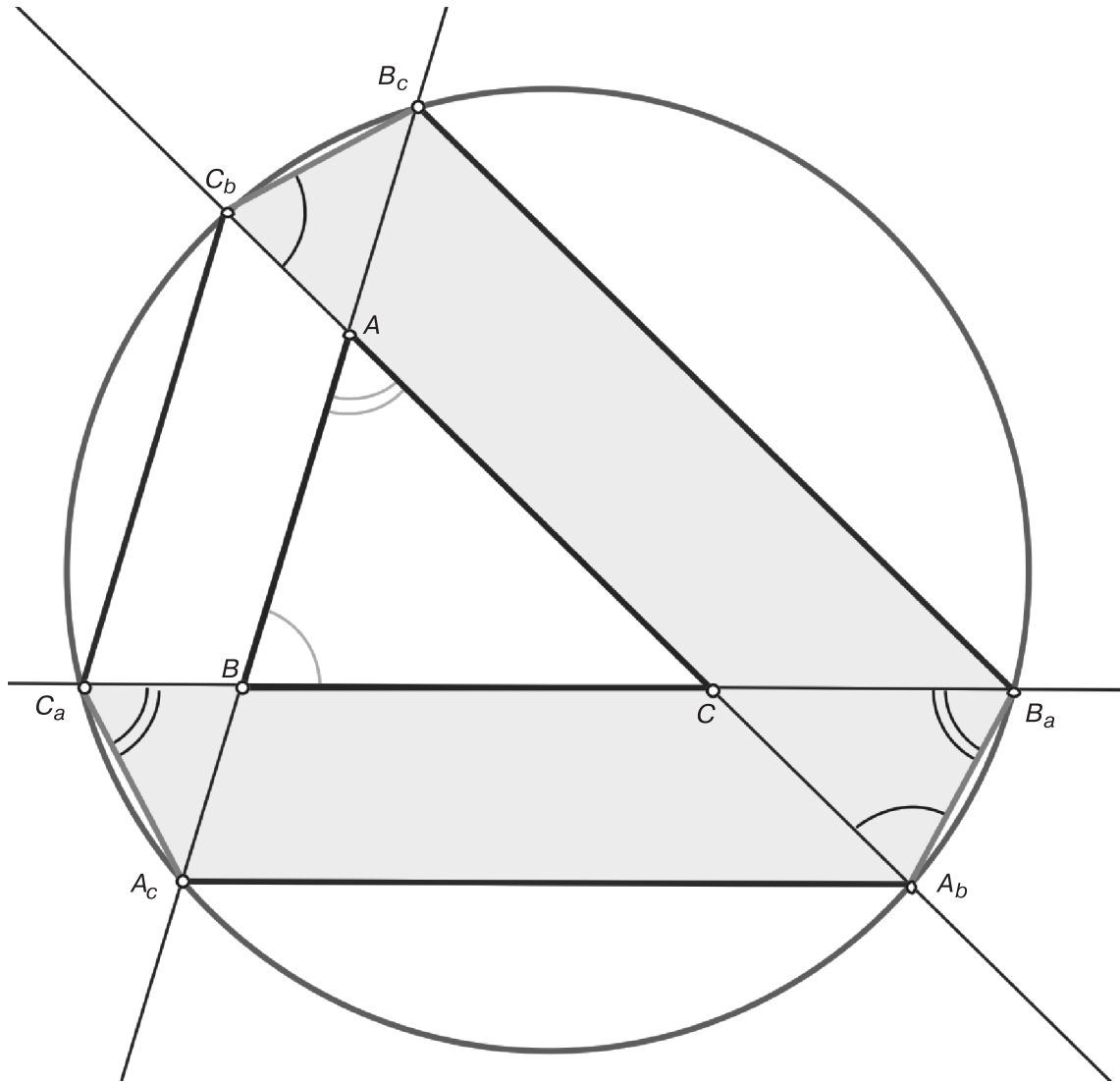


Рис. 7

Пришли, таким образом, к системе:

$$\begin{cases} \varphi + \psi = \angle A + \angle B \\ \varphi - \psi = \angle B - \angle A \end{cases} .$$

Решив ее, убеждаемся в том, что $\varphi = \angle B$, $\psi = \angle A$, что и требовалось.

Наконец, хорошо известно, что центр всякой окружности Тукера, связанной с треугольником ABC , лежит на оси Брокара OK этого треугольника ([2] — 5.160, [6]).

§8. Случай касания во второй конструкции

В заключение обсудим условия вида $s^2 - qr = 0$, $s^2 - rp = 0$, $s^2 - pq = 0$, возникшие как некие «побочные» при выводе уравнения коники в §5 (см. Утверждение 5.3).

Для начала отметим, что в этом случае, в отличие от первой конструкции, одновременное выполнение любых двух равенств попросту невозможно.

В самом деле, пусть, например, справедливы первые два. Тогда, перейдя к абсолютным барицентрическим координатам ($s = p + q + r = 1$), получим следующее:

$$\begin{cases} 1 = qr \\ 1 = rp \end{cases} \Rightarrow qr = rp \Rightarrow p = qi \quad (p + q + r)^2 = qr \Rightarrow \\ \Rightarrow p^2 + q^2 + r^2 + 2qr + 2rp + 2pq = qr \Rightarrow 4p^2 + 3pr + r^2 = 0.$$

Рассмотрев последнее равенство как квадратное уравнение относительно p , видим, что оно не может иметь решений, поскольку его дискриминант $\Delta = 9r^2 - 16r^2 = -7r^2 < 0$.

Пусть теперь выполняется ровно одно равенство из трех, скажем, $s^2 - qr = 0$.

Тогда при выводе уравнения коники по-прежнему выполняются условия $\frac{w}{p} = \frac{u}{r}$ и $\frac{u}{q} = \frac{v}{p}$, из которых (после перемножения) следует, однако, что и $\frac{v}{r} = \frac{w}{q}$. Значит, мы можем рассуждать в точности, как и ранее, и получим в результате все те же окружности, правда с ограничениями на длины сторон исходного треугольника вида $s^2 - qr = 0$.

Геометрически это условие означает, что точки C_a и B_a совпадают, т. е. что наши окружности касаются стороны BC в этой «двоенной» точке.

Действительно,

$$C_a = (0 : s : -r) = (0 : -qs : qr) = (0 : -qs : s^2) = (0 : -q : s) = B_a.$$

И обратно,

$$C_a = (0 : s : -r) = (0 : -q : s) = B_a \Rightarrow -\frac{s}{q} = -\frac{r}{s} \Rightarrow s^2 = qr.$$

Но, оказывается, касание может быть реализовано лишь только для окружности, отвечающей точке P_3 .

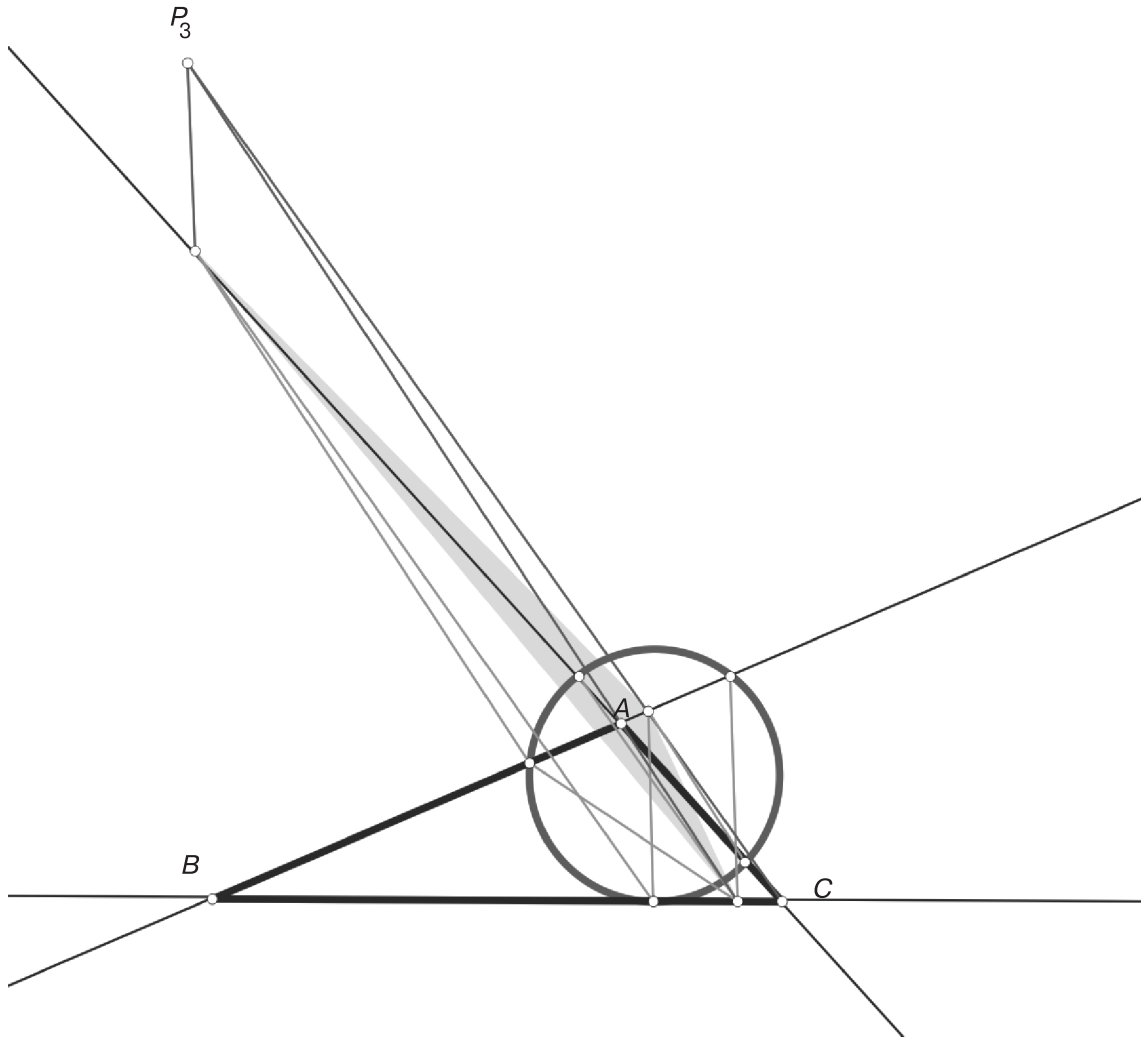


Рис. 8

А именно, справедливо следующее

Утверждение 7.1. Если выполнено равенство $s^2 - qr = 0$, то касание со стороной BC возможно только для окружности, порожденной точкой P_3 , причем существует бесконечное

множество различных треугольников, реализующих случай касания. Их длины сторон при этом удовлетворяют условию $x^3 + 2x^2y + 2y^2x + y^3 - x^2 - y^2 = 0$, где $0 < x = \frac{b^2}{a^2} < 1$ и $0 < y = \frac{c^2}{a^2} < 1$ (т. е. сторона BC обязательно наибольшая в таких треугольниках).

Доказательство. Все выкладки удобно, разумеется, проводить в абсолютных барицентрических координатах — ведь именно в них мы получили выражения для координат P_k ($k = 1, 2, 3$):

$$P_k = \left(p_k = \frac{1}{1+p'_k} : q_k = \frac{1}{1+q'_k} : r_k = \frac{1}{1+r'_k} \right),$$

где

$$p'_k = \frac{C}{a^2} \sin \left(\frac{\varphi + 2\pi(k-1)}{3} \right), \quad q'_k = \frac{C}{b^2} \sin \left(\frac{\varphi + 2\pi(k-1)}{3} \right), \quad r'_k = \frac{C}{c^2} \sin \left(\frac{\varphi + 2\pi(k-1)}{3} \right)$$

и

$$C = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2},$$

$$\varphi = \arcsin(-8a^2b^2c^2C^{-3}) = \arcsin \left(-3\sqrt{3} \frac{a^2b^2c^2}{(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \right).$$

(Откуда, в частности, получаем оценки $\varphi_1 \in (-\frac{\pi}{6}, 0) \Rightarrow \sin \varphi_1 \in (-\frac{1}{2}, 0)$, $\varphi_2 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \sin \varphi_2 \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$, $\varphi_3 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \sin \varphi_3 \in (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, которые будем использовать в дальнейшем).

Из условия следует, что $q_k r_k = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+q'_k} \cdot \frac{1}{1+r'_k} = 1 \Leftrightarrow (1+q'_k)(1+r'_k) = 1 \Leftrightarrow q'_k + r'_k = -q'_k \cdot r'_k$. Поскольку при $k = 2$ имеем $q'_2 > 0$ и $r'_2 > 0$, точку P_2 сразу можно отбросить, ибо последнее равенство для нее выполняться не может.

А при $k = 1$ или $k = 3$ перепишем сначала эти равенства в несколько ином виде:

$$q'_k + r'_k = -q'_k \cdot r'_k \Leftrightarrow \frac{C}{b^2} \sin \varphi_k + \frac{C}{c^2} \sin \varphi_k = -\frac{C^2 \sin^2 \varphi_k}{b^2 c^2} \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2}{C} = -\sin \varphi_k,$$

а затем избавимся от входящей в них тригонометрии. При $k = 1$ получим:

$$\frac{b^2 + c^2}{C} = -\sin \varphi_1 = -\sin \left(\frac{1}{3} \arcsin \frac{-8a^2b^2c^2}{C^3} \right) = \sin \left(\frac{1}{3} \arcsin \frac{8a^2b^2c^2}{C^3} \right),$$

последнее ввиду нечетности функций $\sin x$ и $\arcsin x$. И, так как $-\varphi_1 \in (0, \frac{\pi}{6}) \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, то

$$\begin{aligned} \frac{b^2 + c^2}{C} = \sin \left(\frac{1}{3} \arcsin \frac{8a^2b^2c^2}{C^3} \right) &\Leftrightarrow \arcsin \left(\frac{b^2 + c^2}{C} \right) = \frac{1}{3} \arcsin \frac{8a^2b^2c^2}{C^3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 \arcsin \left(\frac{b^2 + c^2}{C} \right) = \arcsin \frac{8a^2b^2c^2}{C^3}. \end{aligned}$$

«Просинусировав» теперь обе части этого равенства при помощи формулы $\sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi$, получим уравнение — следствие, или необходимое условие того, что точка P_1 порождает касающуюся окружность:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3 \frac{b^2 + c^2}{C} - 4 \frac{(b^2 + c^2)^3}{C^3} = 8 \frac{a^2b^2c^2}{C^3} &\Leftrightarrow 3C^2 (b^2 + c^2) - 4 (b^2 + c^2)^3 = 8a^2b^2c^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) (b^2 + c^2) - 4 (b^2 + c^2)^3 = 8a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

После сокращения на 4, деления на a^6 и замены $x = \frac{b^2}{a^2}$, $y = \frac{c^2}{a^2}$ получим уравнение некоторой кубики, т.е., кубической кривой на плоскости, задаваемой многочленом от двух переменных третьей степени:

$$(x + y)^3 - (x + y + xy)(x + y) + 2xy = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2y + 2y^2x + y^3 - x^2 - y^2 = 0.$$

И точно такое же необходимое условие получим для точки P_3 при $k = 3$:

$$\frac{b^2 + c^2}{C} = -\sin\left(\frac{1}{3}\left(\arcsin \frac{-8a^2b^2c^2}{C^3} + 4\pi\right)\right),$$

причём

$$\varphi_3 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \subset \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Значит,

$$\begin{aligned} -\arcsin\left(\frac{b^2 + c^2}{C}\right) &= \pi - \frac{1}{3}\left(\arcsin \frac{-8a^2b^2c^2}{C^3} + 4\pi\right) = \\ &= -\frac{1}{3}\left(\arcsin \frac{-8a^2b^2c^2}{C^3} + \pi\right) = \frac{1}{3}\left(\arcsin \frac{8a^2b^2c^2}{C^3} - \pi\right), \end{aligned}$$

т.е.

$$\arcsin\left(\frac{b^2 + c^2}{C}\right) = \frac{1}{3}\left(-\arcsin \frac{8a^2b^2c^2}{C^3} + \pi\right),$$

т.е.

$$3\arcsin\left(\frac{b^2 + c^2}{C}\right) = -\arcsin \frac{8a^2b^2c^2}{C^3} + \pi.$$

А поскольку $\sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi$, получаем всё то же уравнение кривой.

Итак, мы получили кубическую¹⁷ кривую, в общем случае уравнение которой имеет вид

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 + 3Hx + 3Ky + L = 0$$

(а в нашем конкретном: $A = D = 1$, $B = C = \frac{2}{3}$, $E = G = -\frac{1}{3}$, $F = H = K = L$).

Такие кривые одним из первых исследовал великий Исаак Ньютон. Он же предложил и свою систему их классификации. Оказалось, определяющую роль в этой классификации играет уравнение $A + 3Bk + 3Ck^2 + Dk^3 = 0$ — вид кривой существенно зависит от количества его действительных и комплексных корней и их кратности.

Для нашей кубики оно запишется так: $1 + 2k + 2k^2 + k^3 = 0 \Leftrightarrow (k + 1)(k^2 + k + 1) = 0$. Как видим, действительный корень у него ровно один. Ньютон обозвал кубики, удовлетворяющие этому свойству, *hyperbolae defectivae* (дефективными гиперболами!).

Кстати, вышеприведенное уравнение определяет также угловые коэффициенты асимптот, если они имеются. Не откажем себе в удовольствии, и найдем асимптоту в нашем случае.

Итак, пусть уравнение асимптоты $y = kx + b$. Угловой коэффициент мы уже вычислили: $k = -1$.

b определяется из уравнения (см. [3]) $(B + 2Ck + Dk^2)b = -(E + 2Fk + Gk^2)$, т.е. $(\frac{2}{3} - \frac{4}{3} + 1)b = -(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}) \Leftrightarrow \frac{1}{3}b = \frac{2}{3} \Leftrightarrow b = 2$ и асимптота найдена: $y = 2 - x$.

Эскиз графика кривой $x^3 + 2x^2y + 2y^2x + y^3 - x^2 - y^2 = 0$ приведен ниже. (Имеется еще изолированная точка $(0, 0)$). Мы построили его с помощью программы *Advanced Grapher*, но можно поступить и «по-честному».

Дело в том, что кубические кривые вида

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 = 0$$

(имеющие так называемую «двойную» точку) допускают, ввиду однородности, рациональную параметризацию:

$$x = -\frac{3(E + 2Ft + Gt^2)}{A + 3Bt + 3Ct^2 + Dt^3} = \frac{1 + t^2}{(1 + t)(1 + t + t^2)}$$

(в нашем случае), $y = tx$ — и потому легко поддаются стандартным методам построения — с помощью производных¹⁸.

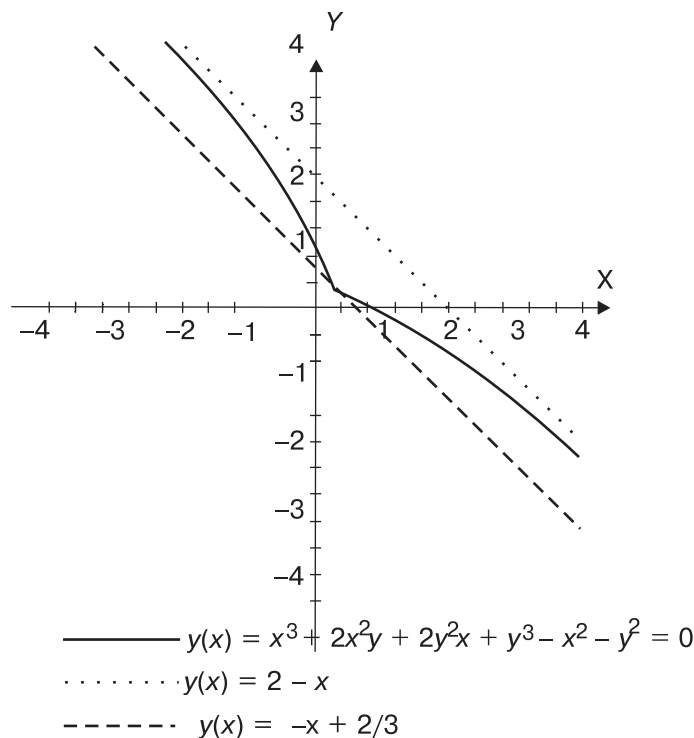


Рис. 9

Итак, порядка ради и справедливости для (математика всё-таки!), построим возникшую кубика «по науке».

Сначала заметим, что она симметрична относительно прямой $y = x$ (так как не меняется при перестановке местами переменных $x \leftrightarrow y$). Назовем точку, в которой прямая $y = x$ пересекает кубика, *вершинной*. Подставив в кубика всюду x вместо y и решив уравнение $6x^3 - 2x^2 = 0$, найдем её координаты: $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Касательная к кубика в этой точке (перпендикулярная прямой $y = x$) имеет уравнение $y = -x + \frac{2}{3}$. Действительно, как указано в любом порядочном учебнике по матанализу, уравнение касательной к неявной функции $F(x, y) = 0$ в точке (x_0, y_0) ищется как $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) = 0$.

У нас же $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x$ и $\frac{\partial F}{\partial x}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{5}{9}$. Аналогично, и $\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{5}{9}$.

А потому, после сокращения на этот общий множитель, как раз получаем уравнение $x + y = \frac{2}{3}$.

Покажем далее, что график кубики расположен *выше* касательной. Для этого воспользуемся рациональной параметризацией:

$$x + y \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1 + t^2}{1 + t + t^2} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 \geq 1 \Leftrightarrow (t - 1)^2 \geq 1.$$

Наконец, покажем, что кубика всюду *убывает* — т. е. что $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} < 0$. Поскольку $y = tx$, то $y'(t) = x(t) + tx'(t)$ и $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{x(t)}{x'(t)} + t$.

Произведенные согласно всем положенным правилам вычисления производных, дают, после надлежащих раскрытий скобок и приведений подобных, следующее выражение для производной:

$$y'(x) = t - \frac{(1 + t^2)(1 + t)(1 + t + t^2)}{t^4 + t^2 + 2t + 2} = -\frac{2t^4 + 2t^3 + t^2 + 1}{t^4 + t^2 + 2t + 2}.$$

Но $t^4 + (t^2 + 2t + 2) > 0$, поскольку дискриминант квадратичной функции, заключенной в скобки, явно отрицателен. По той же причине и

$$2t^4 + 2t^3 + t^2 + 1 = t^2(2t^2 + 2t + 1) + 1 > 0.$$

Стало быть, $y'(x) < 0$.

Можно бы ещё попробовать отыскать точки перегиба, промежутки выпуклости и вогнутости — однако, довольно, пожалуй. На самом деле, для наших целей важнее всего доказанное неравенство о расположении кубики над соответствующей касательной.

Обратимся же теперь к условиям вида $\frac{b^2+c^2}{C} = -\sin \varphi_k$, $k = 1, 3$. Оказывается, что они накладывают на x и y определенные ограничения.

Действительно, поскольку $-\sin \varphi_1 \in (0, \frac{1}{2})$, то для P_1 должно выполняться неравенство $\frac{b^2+c^2}{C} < \frac{1}{2}$. И поскольку $-\sin \varphi_3 \in (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ — для P_3 двойное неравенство $\frac{1}{2} < \frac{b^2+c^2}{C} < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Таким образом, ситуация почти окончательно проясняется после построения двух *граничных коник*:

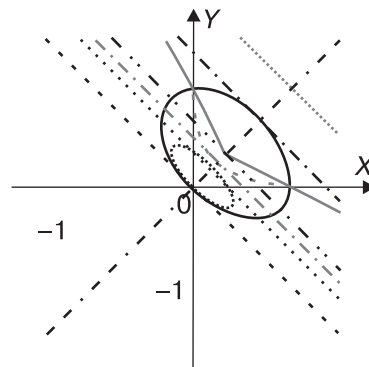
$$\frac{b^2 + c^2}{C} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3(b^2 + c^2)^2 = (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \Leftrightarrow$$

(после деления на a^4)

$$3(x + y)^2 = x + y + xy \Leftrightarrow 3x^2 + 5xy + 3y^2 - x - y = 0.$$

$$\frac{b^2 + c^2}{C} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (b^2 + c^2)^2 = (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 - x - y = 0,$$

Advanced Grapher услужливо нарисует нам два эллипса, касающихся друг друга в начале координат.



————— $y(x) = x^3 + 2x^2y + 2y^2x + y^3 - x^2 - y^2 = 0$

..... $y(x) = 2 - x$

- - - - - $y(x) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 = 0$

..... $y(x) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 - x - y = 0$

————— $y(x) = x^2 + xy + y^2 - x - y = 0$

..... $y(x) = -x + 4/11$

- - - - - $y(x) = -x$

- - - - - $y(x) = -x + 1/2$

- - - - - $y(x) = -x + 2/3$

- - - - - $y(x) = -x + 4/3$

- - - - - $y(x) = x$

Рис. 10

Что же говорит нам эта картинка? А говорит она, во-первых, о том, что точку P_1 также следует исключить, ведь точки плоскости, отвечающие касанию в этом случае, должны обязательно попадать внутрь меньшего эллипса, а он с кубической кривой не пересекается.

Во-вторых, рисунок свидетельствует о том, что если и есть решения для точки P_3 , то они должны удовлетворять условиям $0 < x = \frac{b^2}{a^2} < 1$, $0 < y = \frac{c^2}{a^2} < 1$ — т. е. a — наибольшая сторона треугольника. Потому из трех неравенств треугольника два выполняются автоматически, а третье ведет к появлению неравенства $b + c > a \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} > 1$. Добавим на картинку, для полноты, граничное условие $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (строится как угодно).

И вот, мы видим — для точек типа P_3 никаких противоречий не возникло: соответствующие им точки (x, y) должны лежать на найденной нами кубической кривой, попадать в полосу, ограниченную обоими эллипсами, и находиться выше кривой, определенной неравенством треугольника, и все это вполне возможно.

Наведем и здесь некоторый порядок, т. е. разберемся, почему получается именно такой рисунок — не ссылаясь на безусловно непререкаемый авторитет мудрого *Advanced Grapher*'а.

Остановимся более-менее подробно на уравнении $3x^2 + 5xy + 3y^2 - x - y = 0$, поскольку остальные поддаются аналогичным «разборкам».

Подстановка в уравнение x вместо y дает соотношение $11x^2 - 2x = 0$ и, следовательно, координаты «вершинной» точки $(\frac{2}{11}, \frac{2}{11})$. Уравнение же касательной, сосчитанное по уже известному образцу, в этой точке примет вид: $x + y = \frac{4}{11}$.

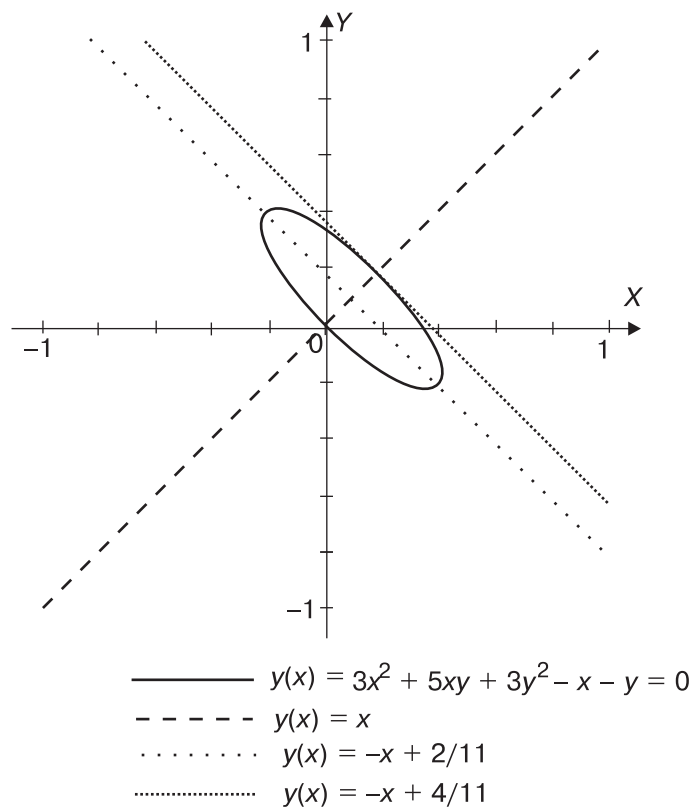


Рис. 11

Покажем, что график соответствующей кривой будет расположен *ниже* касательной, т. е. что для всех её точек справедливо неравенство $x + y \leq \frac{4}{11}$.

Для этого повернем оси вокруг начала координат на $-\frac{\pi}{4}$ и затем перенесем начало в точку $(\frac{1}{11}, \frac{1}{11})$ ¹⁹.

Хорошо известно, что после поворота старые координаты (x, y) и новые (x', y') связаны со-

ОТНОШЕНИЯМИ

$$\begin{cases} x' = x \cos(-\frac{\pi}{4}) - y \sin(-\frac{\pi}{4}) \\ y' = x \sin(-\frac{\pi}{4}) + y \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases} .$$

Подставив последние два равенства в уравнение, получим его вид после поворота на -45° : $\frac{11}{2}x'^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x'y' + y'^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x' - \frac{\sqrt{2}}{11})^2}{(\frac{\sqrt{2}}{11})^2} + \frac{y'^2}{(\frac{1}{\sqrt{11}})^2} = 1$. Или, после еще и переноса: $\frac{x'^2}{(\frac{\sqrt{2}}{11})^2} + \frac{y'^2}{(\frac{1}{\sqrt{11}})^2} = 1$ — уравнение соответствующего эллипса в главных осях.

Но тогда, очевидно, $x \leq \frac{\sqrt{2}}{11} \Leftrightarrow x' - \sqrt{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{11} \Leftrightarrow x' \leq \frac{2\sqrt{2}}{11} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \leq \frac{2\sqrt{2}}{11} \Leftrightarrow x+y \leq \frac{4}{11}$.

Ровно таким же образом можно совершенно строго доказать, что для кривой (эллипса) $x^2 + xy + y^2 - x - y = 0$ «вершинной» является точка с координатами $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, касательная в которой задается уравнением $x+y = \frac{4}{3}$, а все точки кривой расположены ниже этой прямой, т. е. $x+y \leq \frac{4}{3}$. А для кривой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ — точка $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ с касательной $y+x = \frac{1}{2}$ в ней, причем для всех точек кривой справедливо неравенство $y+x \geq \frac{1}{2}$, т. е. она расположена над указанной касательной.

Что же остается ещё? Остаётся только показать, что решение уравнения

$$\arcsin\left(\frac{b^2 + c^2}{C}\right) = \frac{1}{3}\left(-\arcsin\frac{8a^2b^2c^2}{C^3} + \pi\right)$$

(см. выше) всегда существует.

Перейдя к переменным $0 < x < 1, 0 < y < 1$, переформулируем задачу: надо доказать, что уравнение

$$f(x, y) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x+y}{\sqrt{x+y+xy}} + \frac{1}{3}\arcsin 3\sqrt{3} \cdot \frac{xy}{(x+y+xy)\sqrt{x+y+xy}} - \frac{\pi}{3} = 0$$

имеет решение относительно x при любом фиксированном значении y .

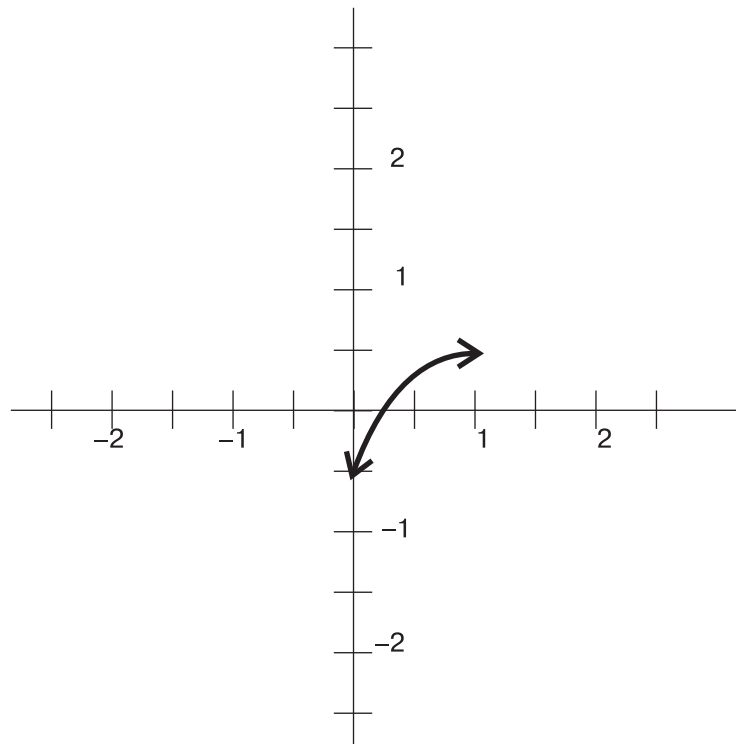


Рис. 12

Вообще-то, прекрасно с этим справляется программа *The Geometer's Sketchpad* (*Живая Геометрия* в отечественной транскрипции), рисующая в числе всего прочего также и семейство графиков функции, зависящей от параметра. Например, график $f(x, y)$ при значении параметра $y = 0,43$ показан на рис. 12.

Но, и здесь поступим «по-честному», т. е. приведем строгое доказательство. Для чего рассмотрим непрерывную на отрезке $[0; 1]$ функцию

$$f(x, y_0) = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x + y_0}{\sqrt{x + y_0 + xy_0}} + \frac{1}{3} \arcsin 3\sqrt{3} \cdot \frac{xy_0}{(x + y_0 + xy_0)\sqrt{x + y_0 + xy_0}} - \frac{\pi}{3}$$

и покажем, что при любом $y_0 \in (0; 1)$ выполнены неравенства $f(0, y_0) < 0$ и $f(1, y_0) > 0$ — тогда из теоремы о нуле непрерывной функции, принимающей на концах отрезка значения разных знаков, будет вытекать разрешимость нашего уравнения.

С первым неравенством просто, поскольку

$$f(0, y_0) = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{y_0} - \frac{\pi}{3}$$

и

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{y_0} - \frac{\pi}{3} < 0 \Leftrightarrow \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{y_0} < \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

(в силу монотонного возрастания арксинуса)

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{y_0} < \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{y_0} < 1 \Leftrightarrow 0 < y_0 < 1.$$

Со вторым же придется немного повозиться:

$$f(1, y_0) = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 + y_0}{\sqrt{1 + 2y_0}} + \frac{1}{3} \arcsin 3\sqrt{3} \cdot \frac{y_0}{(1 + 2y_0)\sqrt{1 + 2y_0}} - \frac{\pi}{3}.$$

Значит, $f(1, y_0) > 0 \Leftrightarrow 3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 + y_0}{\sqrt{1 + 2y_0}} + \arcsin 3\sqrt{3} \cdot \frac{y_0}{(1 + 2y_0)\sqrt{1 + 2y_0}} > \pi$.

Рассмотрим теперь функцию

$$f(y) = 3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (1 + y)(1 + 2y)^{-\frac{1}{2}} + \arcsin 3\sqrt{3} \cdot y(1 + 2y)^{-\frac{3}{2}}$$

при $y \in [0; 1]$ и заметим, что $f(0) = 3 \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi$.

Дело будет, наконец, сделано, если докажем, что $f(y)$ монотонно возрастает на своей области определения — ибо тогда $\forall y_0, 1 > y_0 > 0 \Rightarrow f(y_0) > f(0) = \pi$.

Производная этой функции не из самых приятных, но всё же поддается, как это у них, у производных, водится, вычислению. Применив ряд надлежащих правил, получим после некоторых усилий: $f'(y) = \frac{3\sqrt{3}}{(1+2y)^2} \left(\frac{y\sqrt{4(1+2y)-3(1+y)^2}}{4} + \frac{(1-y)\sqrt{(1+2y)^3-27y^2}}{1+2y} \right)$ (проверьте!).

Очевидно, что $f'(y) > 0$ при $1 > y > 0$.

§9. Продолжение всегда следует

Согласно некоторым литературным канонам, считается *коммифо*, если произведение обладает своеобразной *закольцованностью*, т. е. когда окончание текста перекликается с его началом²⁰.

Появившаяся в *Forum Geometricorum* статья [10]²¹ подарила счастливую возможность завершить данное сочинение подобным образом.

Освежив в памяти конструкцию, связанную с *окружностью Ламуна* (для чего следует на секундочку вернуться в §1, пункт 1.5), пробежимся коротко по содержанию заметки [10].

*DGL-коника*²².

Через произвольную (но не лежащую на прямых, содержащих стороны данного треугольника ABC или на описанной около него окружности) точку P провели прямые AP , BP и CP , а затем отметили точки A_1, B_1, C_1 их пересечения с описанной около ABC окружностью и, наконец, центры окружностей, описанных около шести треугольников $PBA_1, PCA_1, PCB_1, PBB_1, PAC_1, PBC_1$: точки $B_c, C_a, C_b, A_b, A_c, B_a$ соответственно.

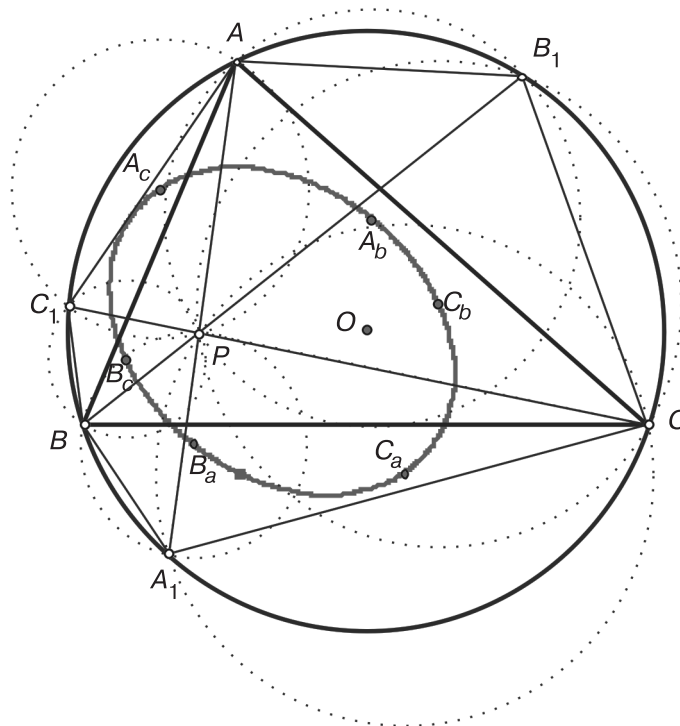


Рис. 13

Тогда все шесть центров лежат на одной конике.

Доказывается, как и в случае конструкции, ведущей к окружности Ламуна: посредством обратной теоремы Паскаля.

Возникает естественный вопрос: а при каких положениях точек P (буде таковые найдутся) коника обращается в окружность?

Авторы дают исчерпывающий ответ на него.

DGL-окружности, рис. 14.

Для любого остроугольного треугольника ABC существуют ровно две точки P_1 и P_2 , порождающие окружности. Обе они точки расположены на прямой Эйлера исходного треугольника и могут быть построены линейкой и циркулем следующим образом:

1. Рассмотрим треугольник $A_0B_0C_0$ — серединный для остроугольного треугольника ABC .
2. Построим три окружности Аполлония треугольника $A_0B_0C_0$ и каждую из них отразим симметрично относительно серединного перпендикуляра к соответствующей стороне серединного треугольника (так, окружность Аполлония, содержащую вершину A_0 , отразим относительно серединного перпендикуляра к отрезку B_0C_0 и т. п.).
3. Три «отраженные» окружности пересекутся в двух точках — аккурат в точках P_1 и P_2 ²³. Если же исходный треугольник ABC не является остроугольным, то таких точек не существует²⁴.

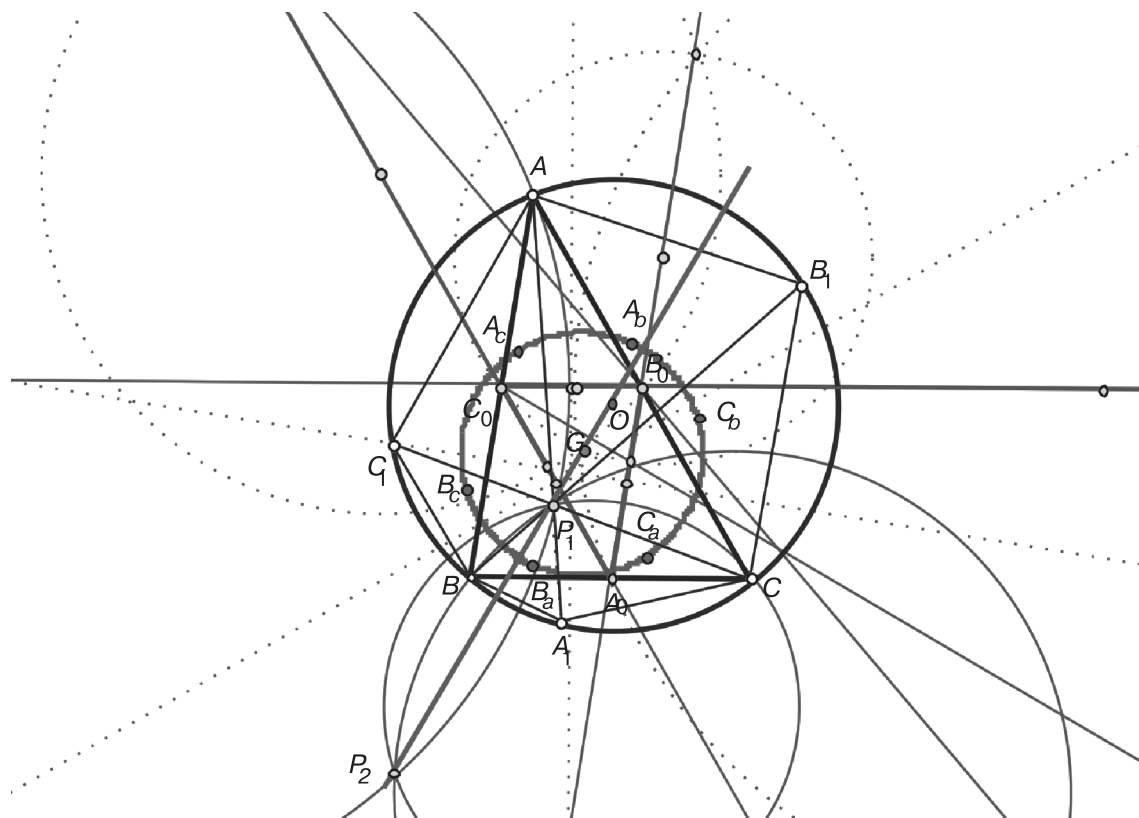


Рис. 14

Для справки.

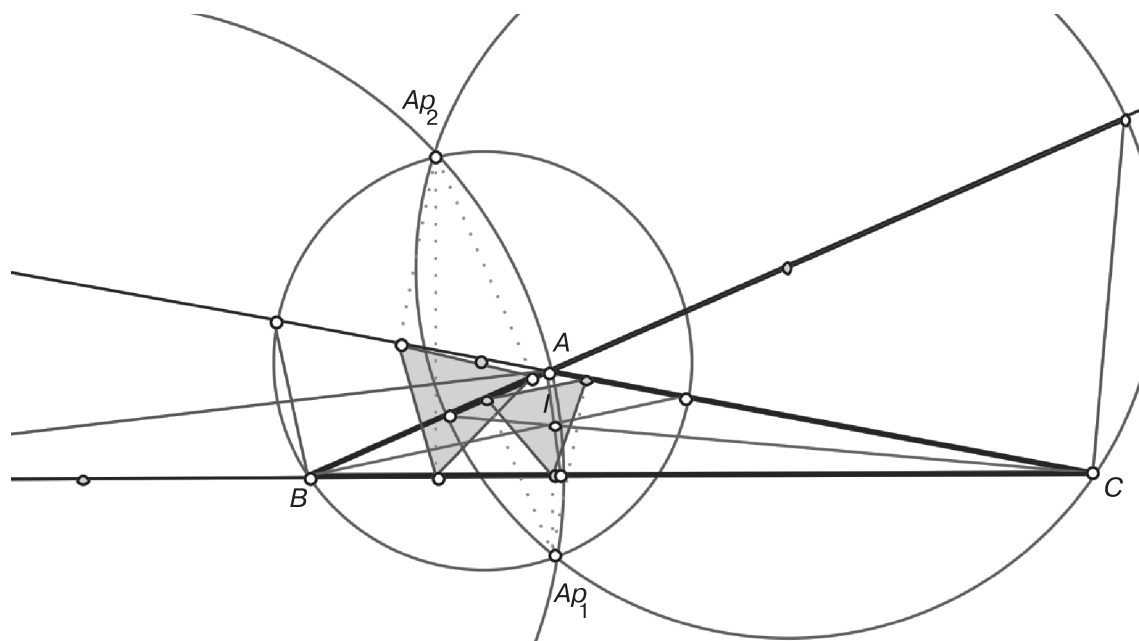


Рис. 15

Если в произвольном треугольнике ABC провести внутреннюю и внешнюю биссектрисы из вершины A , отметить точки их пересечения с прямой BC , и на отрезке с концами в этих точках построить, как на диаметре окружность — такую окружность (проходящую, кстати сказать, через вершину A) и называют *первой окружностью Аполлония* треугольника ABC .

Две другие определяются аналогично, а вся тройка окружностей пересекается в двух точках (так называемые *точки Аполлония* или *изодинамические точки* - $X(15)$, $X(16)$ в [5]), обладаю-

щих различными интересными свойствами, самое знаменитое из которых заключается в том, что *педальные треугольники*, порожденные этими точками — *правильные*.

Примечания

¹ Всюду в этом параграфе исходный треугольник *ABC* берется *полностью* разносторонним, т. е. не имеющим даже пары равных сторон (если специально не оговорено противное). Что означает наличие всех *трех* различных окружностей для рассматриваемой конструкции.

² Но почему-то только одно. Настолько, видать, торопился, что шарики слегка зашли за ролики, и почему-то помстилось, что корни, дающие две внешние точки, не годятся. Ну, не иначе, бес попутал.

³ Поразила не только сама теорема, но и та молниеносная быстрота, с которой Эрманн сумел её получить. Причём, очевидно, безо всякой компьютерной подсказки. Виртуоз, что тут ещё скажешь!

⁴ Признаюсь, что от всей этой *эпистолярки* с зарубежными корифеями довольно неприятный на душе осадок остался, несмотря на, в целом, позитивный итог — уж больно солидная нарисовалась *разница потенциалов*: в скорости и культуре мышления, в эрудиции и т. п., не говоря уже о моём весьма посредственном владении английским. А кому же охота выглядеть дурачком или невеждой? Правда, чего не сделаешь из любви к искусству — см. у классика: *«Как хотите, для науки я жизни не пощажу!»*. Не откажу себе в удовольствии привести *развернутую* цитату, одну из моих любимейших и значимых:

Городничий. *То же я должен вам заметить и об учителе по исторической части. Он ученая голова — это видно, и сведений хватал тьму, но только объясняет с таким жаром, что не помнит себя. Я раз слушал его: ну, покамест говорил об ассириянах и вавилонянах — ещё ничего, а как добрался до Александра Македонского, то я не могу вам сказать, что с ним сделалось. Я думал, что пожар, ей-богу! Сбежал с кафедры и что силы есть хватить стулом об пол. Оно, конечно, Александр Македонский герой, но зачем же стулья ломать? от этого убыток казне.*

Лука Лукич. *Да, он горяч! Я ему это несколько раз уже замечал... Говорит: «Как хотите, для науки я жизни не пощажу!».*

Городничий. *Да, таков уж неизъяснимый закон судеб: умный человек — или пьяница, или рожу такую состроит, что хоть святых выноси.*

Лука Лукич. *Не приведи Бог служить по ученой части! Всего боишься: всякий мешается, всякому хочется показать, что он тоже умный человек.*

(Николай Гоголь. Ревизор).

⁵ Лучше поздно, чем никогда! Хорошо хоть догадался, поскольку пользуюсь как основным, совсем другим адресом.

⁶ Он же и набросал сам текст заметки, являясь, безусловно, её *четвертым* полноправным соавтором.

⁷ Как в поговорке: *Без меня меня женили!*

Что-то отдаленно похожее стряслось с персонажем А. и Б. Стругацких из книжки «Понедельник начинается в субботу» (когда плохо знакомый с азами магии, начинающий чародей Саша Привалов попробовал сотворить бутерброд и чашку кофе):

Остались: блюдо, халат с кристаллами и кружка с черной жидкостью, разросшаяся до размеров кувшина. Я поднял её обеими руками и понюхал. По-моему, это были черные чернила для авторучки. Блюдо за креслом шевелилось, царапая лапами цветной линолеум, и мерзко шипело. Мне было очень неудобно.

В коридоре послушались шаги и голоса, дверь распалзнулась, на пороге появился Янус Полуэктович и, как всегда, произнес: «Так». Я заметался. Янус Полуэктович прошел к себе в кабинет, на ходу небрежно, одним универсальным движением брови ликвидировав всю сотворенную мною кунсткамеру. За ним проследовали Федор Симеонович, Кристофаль Хунта с толстой черной сигаретой в углу рта, насупленный Выбегалло и решительный Роман Ойра-Ойра.

Все они были озабочены, очень спешили и не обратили на меня никакого внимания. Дверь в кабинет осталась открытой. Я с облегченным вздохом уселся на прежнее место и тут обнаружил, что меня поджидает большая фарфоровая кружка с дымящимся кофе и тарелка с бутербродами. Кто-то из титанов обо мне всё-таки позаботился, уж не знаю кто.

⁸ — *oh, those Russians!*

⁹ В которой мне принадлежат лишь основная конструкция и ключевое уравнение окружностей — вообщем-то, не так уж и мало. Положа руку на сердце, уверен в том, что, будучи предоставлен сам себе, без «братской» помощи — навряд ли сумел бы обнаружить и доказать факты, сформулированные в превосходных и содержательных Теоремах 1 и 2. С Теоремой же 3, наверное, бы справился — но не так уж сразу. Поскольку быстротой мышления и в лучшие годы не блистал.

¹⁰ Многое интересное о кониках, связанных с треугольником, можно почерпнуть из книжек [1] и [7]. Эта область геометрии, выходящая за пределы школьных курсов и, как правило, не входящая в университетские, чрезвычайно щедрa на великое множество неожиданных и красивых утверждений. Ну, вот взять хотя бы такое, к примеру: *Гипербола, описанная около треугольника (т. е. проходящая через его вершины), является равносторонней (т. е. асимптоты которой перпендикулярны) тогда и только тогда, когда она содержит ортоцентр H этого треугольника. При этом центр её всегда будет расположен на окружности Эйлера.*

¹¹ Все сопряжения берутся относительно исходного треугольника ABC .

¹² Дело в том, что любая описанная около треугольника коника есть образ некоторой прямой, содержащей изогональные образы любых двух точек коники ([1],[7]). А точки G и K изогонально сопряжены друг другу.

¹³ Именно гиперболой, поскольку, являясь описанной около треугольника $A'B'C'$, она содержит его внутреннюю точку $G = G'$.

¹⁴ *Сотоварищи*, если по нашему — и *Сотрану*, если по ихнему. К теореме этой и следующей приложили руку, помимо Эрманна, ещё и Ю вместе с Гарсия-Капитаном (как можно было усмотреть из *йаховской* переписки, столь запоздало нашедшей одного из своих адресатов).

¹⁵ Это если ковыряться «вручную». А так — какая-нибудь *Mathematica* 5.1 без особого, как говорится, напряжения всё просчитала бы.

¹⁶ Впрочем, начинать можно и с *параллели*. Затем пойдет *антипараллель* и т. п. На всякий случай, ещё напомним: говорят, что отрезок B_1C_1 , где точки B_1 и C_1 лежат на лучах AC и AB (или, одновременно, на продолжениях этих лучей), *антипараллелен* стороне BC , если $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$ и $\angle AC_1B_1 = \angle ACB$.

Очевидно, что при симметрии относительно биссектрисы угла BAC антипараллельный отрезок переходит в отрезок, параллельный стороне BC . (Это — эквивалентное определение антипараллельности).

¹⁷ Все сведенья о кубических кривых, содержащиеся в этом параграфе, заимствованы из [3].

¹⁸ Изолированную точку $(0;0)$ мы исключаем из рассмотрения — она ни на что не влияет.

¹⁹ Эта процедура — ни что иное, как приведение коники к *главным осям*.

²⁰ *In my end is my beginning* (*В моём конце — моё начало*).

Томас Стирнс Элиот.

²¹ Как по заказу — сразу же следом за публикацией [9].

²² Назовём так, в честь авторов статьи: *N. Dergiades, F.J. Garcia Capitan, S.H. Lim*.

²³ Отметим, что доказательство существования окружностей проводится исключительно геометрически. В статье также приводятся барицентрические координаты этих точек и другой остроумный способ их построения.

²⁴ Такие дела нет-нет, а и встречаются в геометрии. Вспомним, например, хрестоматийную задачу *Фаньяно о треугольнике наименьшего периметра*, вписанного в данный (*остроугольный* — в противном случае проблема не решается; см. [2] — з.17.21) треугольник.

Литература

1. А. Акопян, А. Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. М., МЦНМО, 2011.
2. В. Прасолов. Задачи по планиметрии. М., МЦНМО, 2007.
3. А. Савельев. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. Москва-Ижевск, НИЦ: Регулярная и хаотическая динамика, 2002.
4. С. Bradley. The Algebra of Geometry. Cartesian, Areal and Projective Coordinates. UK, Bath, Highperception Ltd, 2007.
5. С. Kimberling. Encyclopedia of Triangle Centers.
<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>
6. R. Honsberger. Episodes in Nineteenth and Twenties Century Euclidean Geometry. (New Mathematical Library, issue 37). The Mathematical Association of America, 1995.
7. P. Yiu. Introduction to the Geometry of the Triangle.
<http://math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf>
8. Hyacinthos messages.
<http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/>
9. J.-P. Ehrmann, F.J. Garcia Capitan, A. Myakishev, Construction of Circles Trough Intercepts of Parallels to Cevians, *Forum Geom.*, 30 (2011) 261–268.
<http://forumgeom.fau.edu/>
<http://forumgeom.fau.edu/FG2011volume11/FG201130index.html>
10. N. Dergiades, F.J. Garcia Capitan, S.H. Lim, On Six Circumcenters and Their Concurrency, *Forum Geom.*, 31 (2011) 269–275.
<http://forumgeom.fau.edu/>
<http://forumgeom.fau.edu/FG2011volume11/FG201131index.html>

Июль, 2011 — Март, 2012, Москва

Мякишев Алексей Геннадьевич,
преподаватель математики
Химического Лицея № 1303, г. Москва.

Email: myakishev62@mail.ru