Касающиеся окружности и лемма Саваямы.

(составил П. Кожевников)

Для решения многих задач о касающихся окружностях может быть полезна следующая

лемма Саваямы. Пусть A, B, C, D — точки на окружности Ω, окружность Γ касается Ω, а также касается прямых AC и BD в точках K и L. Тогда прямая KL проходит через центр вписанной либо вневписанной (в зависимости от расположения точек) окружности каждого из треугольников ABC, BCD, CDA, DAB.

1. (ЛКТГ 1999) Дан треугольник ABC. Окружность c_1 лежит вне треугольника ABC, касается окружности (ABC) и касается отрезка AB в точке B'. Аналогично окружность c_2 лежит вне треугольника ABC, касается окружности (ABC) и касается отрезка AC в точке C'. Докажите, что если $BC \parallel B'C'$, то одна из общих касательных к окружностям c_1 и c_2 параллельна BC.

2. [1] В окружности проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке K. В криволинейные треугольники ABK и CDK вписаны окружности. Тогда общие внешние касательные к ним параллельны прямым BC и AD.

3. а) (Теорема Тебо [2]) На стороне BC треугольника ABC выбирается точка D. Окружность c_1 касается отрезков AD, BD и окружности ABC; аналогично окружность c_2 касается отрезков AD, CD и окружности ABC. Докажите, что линия центров окружностей c_1 и c_2 проходит через I.

   Найдите точки D, для которых б) окружности c_1 и c_2 касаются; в) окружности c_1 и c_2 равны.

4. (China MO 2011, переформулировано) Пусть точки A, E, B, X, D, C, S расположены на окржности именно в этом циклическом порядке. Пусть D — середина дуги BXC, E — середина дуги ABX, $SD \cap BC = R$, $SE \cap AX = T$. Докажите, что если $RT \parallel DE$, то центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на прямой RT.

5. (Теорема о луночках [3]) Пусть даны дуги окружностей c_1 и c_2, имеющие общие концы M, N и лежащие по разные стороны от прямой MN. На дуге c_1 выбирается точка X. Окружность s_1 вписана в треугольник XMN, а окружность s_2 касается отрезков XM, XN и дуги c_2. Тогда отношение радиусов окружностей s_1 и s_2 не зависит от выбора точки X.

6. (China Girls MO 2013 [4]) Окружности Ω_1 и Ω_2 касаются друг друга внешним образом в точке T, четырехугольник $ABCD$ вписан в Ω_1 так что T лежит на дуге AB, не содержащей C. Лучи DA, CB касаются Ω_2 в точках E и F соответственно. Биссектриса угла ABF пересекает отрезок EF в точке N. Прямая FT пересекает дугу AT, не содержащую B, в точке M. Докажите, что M — центр описанной окружности треугольника BCN.

7. (Устная олимпиада по геометрии 2013 г., задача 10.6) Трапеция $ABCD$ вписана в окружность w ($AD \parallel BC$). Окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD, касаются оснований трапеции BC и AD в точках P и Q соответственно. Точки X и Y — середины дуг BC и AD окружности w, не содержащих точек A и B соответственно. Докажите, что прямые XP и YQ пересекаются на окружности w.

---

[1] См. например, 4.7.19 из книги А. Акопяна "‘Геоматрия в картинках"’.

[2] См., например, статью В. Протасова "‘От Тебо до Фейербаха"’ в "‘Кванте"’ 4-2008.

[3] См. статью "‘Еще раз о точке Фейербаха"’, "‘Мат. Прос."’, 2012. Из теоремы о луночках несложно выводится теорема Фейербаха. См. также задачу М2168 из задачника "‘Кванта"’ 1-2010

[4] См. также задачу с олимпиады Болгарии 2005 г., http://yufeizhao.com/olympiad/geolemmas.pdf