Поворотная гомотетия.

П.А. Кожевников

Вводные задачи: немного об улитках.

1. По двум окружностям, пересекающимся в точках P и Q, одновременно начали движение из точки P по часовой стрелке с равными угловыми скоростями две улитки A и B.

а) Докажите, что прямая AB все время проходит через Q.

б) Докажите, что треугольники PAB подобны друг другу и треугольнику PO_1O_2, где O_1 и O_2 — центры окружностей.

в) Найдите ГМТ (траекторию движения) середин отрезков AB; центров вписанных окружностей треугольников PAB; любых соответственных точек подобных треугольников PAB.

г) **Задача о велосипедистах.** Докажите, что A и B все время равноудалены от фиксированной точки. (Н. Васильев, И. Шарыгин. Задачник „Кванта“ №12, 1979 г.)

2. а) По трем окружностям, имеющим общую точку O и попарные точки пересечения P, Q и R, одновременно начали движение из точки O по часовой стрелке с равными угловыми скоростями три улитки A, B и C. Докажите, что: все треугольники ABC подобны между собой и треугольнику $O_1O_2O_3$, где O_1, O_2 и O_3 — центры окружностей.

б) Какова траектория движения центра масс треугольника ABC?

3. Две улитки P и Q ползут равномерно по двум прямым, пересекающимся в точке O.

а) Найдите траекторию середины отрезка PQ.

б) Докажите, что если скорости улиток равны, то середина дуги (одной из дуг) PQ окружности (OPQ) неподвижна.

в) Докажите, что если улитки проходят O не одновременно, то окружности (OPQ) имеют вторую общую точку, отличную от O.

4. Дан фиксированный треугольник ABC. По прямым BC, CA, AB ползут соответственно улитки P, Q, R так что углы $\angle(RP, PQ)$, $\angle(PQ, QR)$, $\angle(QR, RP)$ фиксированные.

а) Докажите, что точка пересечения окружностей (RAQ), (RBP), (PCQ) неподвижна.

б) Найдите ГМТ центров вписанных окружностей треугольников PQR.

Основные задачи.

5. Три улитки P, Q и R ползут равномерно по трем прямым. Известно, что в некоторые два момента времени треугольник PQR был подобен с сохренением ориентации фиксированному треугольнику XYZ. Докажите, что это условие будет выполняться в любой момент времени.

6. В треугольник ABC вписываем подобный ему треугольник PQR ($P \in BC$, $Q \in CA$, $R \in AB$, $\angle P = \angle A$, $\angle Q = \angle B$, $\angle R = \angle C$).

а) Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC совпадает с ортоцентром треугольника PQR.

б) Найдите максимальное значение выражения $\dfrac{S_{ABC}}{S_{PQR}}$.

в) Докажите, что центр описанной окружности треугольника PQR равноудален от центра описанной окружности и ортоцентра треугольника ABC.

7. Через вершины треугольника ABC проводятся три произвольные параллельные прямые d_a, d_b, d_c. Прямые d'_a, d'_b, d'_c, симметричные d_a, d_b, d_c относительно BC, CA, AB соответственно, образуют треугольник XYZ. Найдите геометрическое место центров вписанных окружностей таких треугольников. (А. Заславский, олимпиада им. И.Ф. Шарыгина 2009 г.)

8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, стороны BC и AD которого равны, но не параллельны. Пусть E и F – внутренние точки отрезков BC и AD соответственно такие, что $BE = DF$. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, прямые BD и EF пересекаются в точке Q, прямые EF и AC пересекаются в точке R. Докажите, что всевозможные окружности PQR имеют общую точку, отличную от P. (IMO 2005 г.)

9. Пусть O и I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC соответственно. Точки D, E и F выбраны на сторонах BC, CA и AB соответственно так, что $BD + BF = CA$ и $CD + CE = AB$. Описанные окружности треугольников BDF и CDE пересекаются в точках D и P. Докажите, что $OP = OI$. (Shortlist IMO 2012 г.)

Дополнительные задачи.

10. Впишите в данный остроугольный треугольник минимальный равносторонний треугольник.

11. На пол положили правильный треугольник ABC, выпиленный из фанеры. В пол вбили три гвоздя (по одному вплотную к каждой стороне треугольника) так, что треугольник невозможно повернуть, не отрывая от пола. Первый гвоздь делит сторону AB в отношении $1 : 3$, считая от вершины A, второй делит сторону BC в отношении $2 : 1$, считая от вершины B. В каком отношении делит сторону AC третий гвоздь? (Московская олимпиада 1998 г.)

12. Выпуклый многоугольник M можно поместить в треугольник T. Докажите, что это можно сделать так, чтобы одна из сторон M лежала на стороне T.

Список литературы

[1] А. Спиров. Неожиданая поворотная гомотетия, “Квант”,№5, 1998 г.