Нестандартные признаки описанности.
(Занятие П. Кожевникова.)

1. Внутри описанного четырехугольника $ABCD$ расположены окружности ω_a и ω_c, вписанные в углы BAD и BCD. Известно, что B лежит на одной из общих внутренних касательных к окружностям ω_a и ω_c. Докажите, что D также лежит на (другой) общей внутренней касательной к ω_a и ω_c.

2. Окружность с центром I касается сторон AB, BC, AC неравнобедренного треугольника ABC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Окружности ω_B и ω_C вписаны в четырехугольники BA_1IC_1 и CA_1IB_1 соответственно. Докажите, что общая внутренняя касательная к ω_B и ω_C, отличная от IA_1, проходит через точку A.

3. Фиксированы две непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2, одна их внешняя касательная l и одна их внутренняя касательная m. На прямой m выбирается точка X, а на прямой l строятся точки Y и Z так, что прямые XY и XZ касаются ω_1 и ω_2 соответственно, а треугольник XYZ содержит окружности ω_1 и ω_2. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники XYZ, лежат на одной прямой.

4. Две прямые, проходящие через точки пересечения пар противоположных сторон выпуклого четырехугольника, делят его на четыре меньших четырехугольника. Докажите, что если два меньших четырехугольника, не имеющих общей стороны, описанные, то и исходный четырехугольник описанный.

5. В треугольнике ABC на стороне BC взяты точки D и E. Пусть K — точка пересечения общих внешних касательных к окружностям, вписанным в треугольники ABD и ACE. Докажите, что K — точка пересечения общих внешних касательных к окружностям, вписанным в треугольники ABE и ACD.

6. Дана трапеция $ABCD$, $BC \parallel AD$, $BC < AD$; $X = AB \cap CD$. Пусть ω_1 — окружность, вписанная в треугольник BXC, а ω_2 — вневписанная окружность треугольника AXD, касающаяся отрезка AD. Пусть a и d — касательные, проведенные соответственно из точек A и D к окружности ω_1 и отличные от прямых AB и CD. Пусть b и c — касательные, проведенные соответственно из точек B и C к окружности ω_2 и отличные от прямых AB и CD. Докажите, что в пересечении прямых a, b, c, d получается параллелограмм.

7. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты соответственно точки A', B', C' так, что отрезки AA', BB', CC' пересекаются в одной точке D. Докажите, что если два из четырехугольников $AB'DC'$, $BC'DA'$, $CA'DB'$ описанные, то третий также является описанным.

8. В угол с вершиной O вписаны две непересекающиеся окружности. Треугольник ABC расположен между ними так, что его вершины лежат на сторонах угла, а равные стороны AB и AC касаются соответствующих окружностей. Докажите, что сумма радиусов окружностей равна высоте треугольника, опущенной из вершины A.

9. На основании AB равнобедренного треугольника ACB выбрана точка D так, что окружность, вписанная в треугольник BCD, имеет тот же радиус, что и окружность, касающаяся продолжений отрезков CA и CD и отрезка AD (вневписанная в треугольник ACD). Докажите, что этот радиус равен $1/4$ высоты треугольника, опущенной на боковую сторону.

Список литературы

[1] Н. Белухов, П. Кожевников. Описанные четырехугольники и ломаные. "Квант" №1, 2010 г., с. 45 — 49.