Обобщенная теорема Фейербаха

составил П.А. Кожевников

Предлагаемая серия задач имеет целью доказательство обобщенной теоремы Фейербаха (теоремы Айера) об угле между педальной окружностью и окружностью девяти точек. В основном мы следуем схеме, предложенной Дарием Гринбергом в замечательной статье [1]. Статья [1] содержит более 40 страниц, на которых приведено подробное геометрическое доказательство не только теоремы Айера, но и других красивых результатов. Чтобы получить возможно более короткое геометрическое доказательство теоремы Айера, мы попробовали сделать в схеме некоторые упрощения (в частности, использование в схеме задачи 0.3). Также некоторые упрощения появились после занятий со школьниками, проведенных на Восьмой смене "Юный математик"(2012 г.) в ВДЦ "Орленок в частности полезными оказались замечания М. Дидина.

Предварительные задачи.

Предлагаем доказать несколько известных фактов, которые будут полезны в основной серии.

0.1. Дана прямая, проходящая через ортоцентр треугольника. Тогда прямые, симметричные этой прямой относительно его сторон, пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности.

0.2. Дан параллелограмм $ABCD$. Пусть точка K — точка на описанной окружности треугольника ABC, и K' симметрична K относительно AC. Тогда $\angle DK'H = 90°$, где H — ортоцентр треугольника ABC.

0.3. Даны три пары точек A и A_1, B и B_1, C и C_1, симметричных относительно данной точки. Докажите, что либо точки A, B, C, A_1, B_1, C_1 лежат на одной окружности, либо описанные окружности треугольников ABC_1, BCA_1, CAB_1, $A_1B_1C_1$ имеют единственную общую точку.

0.4. Дан треугольник ABC, а также точки P и P'. Пусть XYZ и $X'Y'Z'$ — педальные треугольники точек P и P' соответственно. Пусть S — общая точка педальных окружностей (XYZ) и $(X'Y'Z')$, а l и l' — касательные к ним, проведенные в точке S. Докажите, что $\angle(l, l') = 2\angle(SX, SX') - \angle(PA, AC) + \angle(PB, BA) + \angle(PC, CB) + \angle(P'A, AC) - \angle(P'B, BA) - \angle(P'C, CB)$. [1]

Основные задачи.

Пусть ABC — треугольник. Введем обозначения (которые будут действовать во всех основных задачах): H — ортоцентр; H_a, H_b, H_c — основания высот; A', B', C' — середины сторон; $\Omega' = (A'B'C')$ — окружность 9 точек (проходящая также через точки H_a, H_b, H_c); O — центр описанной окружности.

Пусть P — произвольная точка плоскости, отличная от O; XYZ — ее педальный треугольник (то есть X, Y, Z — проекции точки P на прямые BC, CA, AB соответственно).

Мы введем в рассмотрение точку L как точку пересечения прямых x, y, z, симметричных OP относительно сторон треугольника $A'B'C'$.[2] Согласно задаче 0.1, точка L существует и лежит на окружности Ω'.

Пусть X', Y', Z' симметричны L относительно $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ соответственно.

1. Докажите, что X', Y', Z' — проекции A, B, C на OP.

   Определим D, E, F как ортоцентры треугольников AYZ, BZX, CXY соответственно.

2. Докажите, что окружность (EXF)

   а) получается из окружности $(AYPZ)$ параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{PX}$;

   б) содержит H_a;

   в) симметрична окружности с диаметром AP относительно $B'C'$;

   г) проходит через L.

---

[1] Утверждение задачи фактически означает, что для нахождения угла между двумя педальными окружностями достаточно найти угол $\angle(SX, SX')$.

[2] Заметим, что L зависит от прямой OP (но не от положения точки P на ней).

3. Докажите, что $L \in (XYZ)$.

4. а) Докажите, что $\angle(LX, LH_a) = \angle(AP, AH_a)$.

   б) (теорема Айера) Докажите, что (ориентированный) угол между касательными к окружностям (XYZ) и Ω', проведенными в точке L, равен равен $\frac{\pi}{2} - \angle(PA, AB) - \angle(PB, BC) - \angle(PC, CA)$.

Список литературы

[1] D. Grinberg. Generalization of the Feuerbach point.
http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/geometry2.html

[2] П. Кожевников, Д. Швецов. Обобщенная теорема Фейербаха.
Сборник «Задачи Санкт-Петербургской олимпиады по математике 2013 года». — Москва: МЦНМО, 2014, с. 149 — 164.