Вписанный четырехугольник: середины дуг и центры вписанных окружностей.
(занятие П.А. Кожевникова)

Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O; M_1, M_2, M_3, M_4 — середины дуг AB, BC, CD, DA (не содержащих других вершин четырехугоольника); $X = AB \cap CD$, $Y = BC \cap DA$, $Z = AC \cap BD$.

1. (Главные направления) а) Докажите, что можно выбрать пару перпендикулярных направлений (оси координат) так, что внутренняя и внешняя биссектрисы углов между парами прямых AB и CD, AC и BD, AD и BC будут параллельны осям;

   б) причем в качестве осей можно выбрать прямые M_1M_3 и M_2M_4.

2. (Прямоугольник) а) Докажите, что центры вписанных окружностей тругольников ABC, BCD, CDA, DAB являются вершинами прямоугольника.

   б) Определите положение центра этого прямоугольника.

Пусть $J_1J_2J_3J_4$ — четырехугольник, получающийся в пересечении внешних биссектрис (т.е. J_1 — точка пересечения внешних биссектрис углов $\angle A$ и $\angle B$, и т.д.)

3. (Окружности) а) Докажите, что точки J_1, J_2, J_3, J_4 лежат на одной окружности;

   б) причем центр этой окружности лежит на прямой OZ.

Пусть I_1, I_2, I_3, I_4 — центры вписанных окружностей треугольников ABZ, BCZ, CDZ, DAZ.

4. (Прямые) а) (М. Исаев, Всероссийская олимпиада 2007 г., окружной этап) Докажите, что прямая I_1J_1 проходит через M_1.

   б) (П. Кожевников, Всероссийская олимпиада 2010 г.) Докажите, что прямые I_1M_1, I_2M_2, I_3M_3, I_4M_4 пересекаются в одной точке;

   в) (И. Богданов, "Квант"5-2010) при этом точка пересечения из пункта б) лежит на прямой OZ.

Комментарии и указания.

1. Для решения удобно использовать *антипараллельность*: при симметрии относительно биссектрисы угла между прямыми a и b прямая переходит в антипараллель. Оси, о которых идет речь в задаче 1, — это главные направления любой коники из пучка коник, проходящих через точки A, B, C, D.

2. Из *леммы о трезубце* следует, что центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ABD, симметричны относитально M_1M_3.

3. XY — радикальная ось окружностей $(ABCD)$ и $(J_1J_2J_3J_4)$, поэтому их линия центров перпендикулярна XY. Но $OZ \perp XY$.

Заметим, что аналогичное утверждение верно для внутренних биссектрис: четырехугольник $K_1K_2K_3K_4$, образованный внутренними биссектрисами, вписанный, и центр окружности $(K_1K_2K_3K_4)$ лежит на OZ. Более того, центры окружностей $(J_1J_2J_3J_4)$ и $(K_1K_2K_3K_4)$ симметричны относительно O (см. задачу А. Заславского, геометрическая олимпиада им. И.Ф. Шарыгина, задача 9.4, 2011 год).

Так, окружности $(ABCD)$, $(J_1J_2J_3J_4)$ и $(K_1K_2K_3K_4)$ — из одного пучка (XY — их общая радикальная ось). В этом же пучке окружность, построенная на OZ как на диаметре.

4. а) Приведем три возможных пути доказательства того, что J_2, M_2, I_2 на одной прямой.

1) (М. Дидин) Пусть P и Q — середины дуг ABC и BCD. Тогда нетрудно установить (доказав параллельность соответствующих прямых), что конструкции $M_1M_3I_2M_2$ и PQM_2J_2 гомотетичны, значит прямые I_2M_2 и M_2J_2 имеют одно и то же направление и проходят через центр гомотетии, поэтому совпадают.

2) Для равнобедренного треугольника BM_2C имеем построение: $\angle J_2BM_2 = \angle I_2CB = x$, $\angle J_2CM_2 = \angle I_2BC = y$. Далее можно воспользоваться теоремой Чевы или изогональными соображениями для треугольника BM_2C.

3) По лемме о трезубце $BI_{ABC}I_{BCD}C$ — четырехугольник, вписанный в окружность с центром M_2. Достаточно доказать, что в нем: центр (точка M_2), точка пересечения диагоналей (точка I_2) и точка пересечения перпендикулров к противоположным сторонам, проходящих через B и C (точка J_2) лежат на одной прямой. (Для доказательства можно использовать линейность.)

б) Прямые J_1M_1, J_2M_2, J_3M_3, J_4M_4 пересекаются в центре гомотетии H четырехугольников $J_1J_2J_3J_4$ и $M_1M_2M_3M_4$.

в) H лежит на линии центров описанных окружностей, то есть на OZ (по задаче 3).