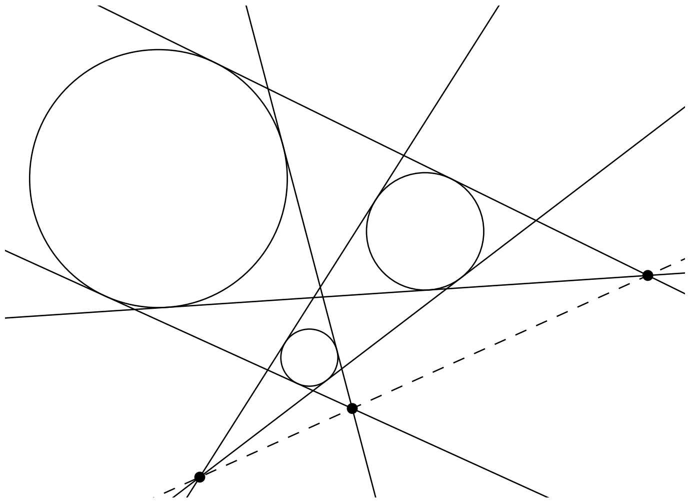
Любимые задачи Фёдора Ивлева

Задача, которую геометрически не решил без подсказок ещё ни один известный мне человек, притом, что **очень короткое** геометрическое решение существует.

Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AB и BC в точках C' и A' соответственно. Точки P и Q выбраны таким образом, что четырёхугольники $ACA'P$ и $CAC'Q$ — параллелограммы. Прямые AA' и CC' пересекаются в точке R. Докажите, что R равноудалена от точек P и Q.

Доказательство теоремы о трёх колпаках(см. рис.), предложенное Арсением Акопяном.



Пусть есть окружности ω_A, ω_B, ω_C. Общие внешние касательные к окружностям ω_A и ω_B пересекаются в точке C. Аналогично определяются точки A и B. Хотим доказать, что точки A, B и C коллинеарны.
Заметим, что точка пересечения общих внешних касательных к двум окружностям обладает тем свойством, что прямая составляет равный угол с этими двумя окружностями (ориентированный угол) тогда и только тогда, когда она проходит через эту точку (это утверждение несложно доказать, для лаконичности я оставлю этот момент сейчас без доказательства). Значит, когда мы провели прямую AB, то по этому свойству она составляет равные углы с окружностями ω_B и ω_C (так как проходит через A) и равные углы с окружностями ω_A и ω_C (так как проходит через точку B). Значит, она составляет равные углы с окружностями ω_A и ω_B, а следовательно по обратному утверждению вышеописанного свойства проходит через точку C, что и доказывает утверждение теоремы.
Интересно, что в большинстве случаев, когда рисуют иллюстрацию к этой теореме рассматриваемая прямая не пересекает окружности, а значит понятие угла не совсем определено. Но именно такая абстракция в этом решении мне и нравится.