Московские осенние подготовительные сборы.
13 ноября 2012 г.

Поворот + гомотетия.

Задача 1. a) По лучам, имеющим общее начало, с постоянными неравными скоростями двигаются точки A и B. Докажите, что есть две точки плоскости, из под которых отрезок AB виден под постоянным углом.

b) По двум неравным окружностям с равными угловыми скоростями двигаются точки A и B. Докажите, что существует точка P плоскости, что $\angle APB = const$.

Задача 2. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. Через A проведена прямая ℓ, которая пересекает S_1 в точке K, а S_2 в точке L. Найдите ГМТ середин M отрезков KL.

Задача 3. Дана полуокружность с диаметром AB. Для каждой точки X этой полуокружности на луче XA откладывается точка Y так, что $XY = kXB$. Найдите ГМТ Y.

Задача 4. Окружности S_1, S_2, $\ldots$, S_n проходят через точку O. Кузнечик прыгает из точки X_i окружности S_i в точку X_{i+1} окружности S_{i+1} так, что прямая X_iX_{i+1} проходит через точку пересечения окружностей S_i и S_{i+1}, отличную от точки O. Докажите, что после n прыжков кузнечик вернётся в исходную точку.

Задача 5. Точка M выбрана на стороне BC так, что $MA = MC$. Биссектриса угла AMB пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K. Докажите, что прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников AKM и BKM, перпендикулярна биссектрисе угла AKB.

Задача 6. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины высот AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC. Найдите сумму углов $B_2A_1C_2$, $C_2B_1A_2$ и $A_2C_1B_2$.

Задача 7. На двух противоположных сторонах выпуклого четырёхугольника как на гипотенузах построены во внутреннюю сторону два равнобедренных прямоугольных треугольника. Оказалось, что они имеют общую вершину. Докажите, что аналогичные треугольники, построенные на двух других сторонах тоже будут иметь общую вершину.

Задача 8. На сторонах AB, BC и CA, треугольника ABC взяты точки P, Q и R соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APR, BPQ и CQR образуют треугольник, подобный $\triangle ABC$.

Задача 9. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D (A лежит на отрезке CD). Пусть M и N — середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K — середина CD. Докажите, что точки M, K, A, N лежат на одной окружности.

Задача 10. На диагоналях выпуклого четырёхугольника $ABCD$ построены правильные треугольники ACB' и BDC', причём точки B и B' лежат по одну сторону от AC, а точки C и C' лежат по одну сторону от BD. Найдите $\angle BAD + \angle CDA$, если известно, что $B'C' = AB + CD$.

Московские осенние подготовительные сборы.
13 ноября 2012 г.

Поворот + гомотетия.

Задача 1. a) По лучам, имеющим общее начало, с постоянными неравными скоростями двигаются точки A и B. Докажите, что есть две точки плоскости, из под которых отрезок AB виден под постоянным углом.

b) По двум неравным окружностям с равными угловыми скоростями двигаются точки A и B. Докажите, что существует точка P плоскости, что $\angle APB = const$.

Задача 2. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. Через A проведена прямая ℓ, которая пересекает S_1 в точке K, а S_2 в точке L. Найдите ГМТ середин M отрезков KL.

Задача 3. Дана полуокружность с диаметром AB. Для каждой точки X этой полуокружности на луче XA откладывается точка Y так, что $XY = kXB$. Найдите ГМТ Y.

Задача 4. Окружности S_1, S_2, $\ldots$, S_n проходят через точку O. Кузнечик прыгает из точки X_i окружности S_i в точку X_{i+1} окружности S_{i+1} так, что прямая X_iX_{i+1} проходит через точку пересечения окружностей S_i и S_{i+1}, отличную от точки O. Докажите, что после n прыжков кузнечик вернётся в исходную точку.

Задача 5. Точка M выбрана на стороне BC так, что $MA = MC$. Биссектриса угла AMB пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K. Докажите, что прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников AKM и BKM, перпендикулярна биссектрисе угла AKB.

Задача 6. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины высот AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC. Найдите сумму углов $B_2A_1C_2$, $C_2B_1A_2$ и $A_2C_1B_2$.

Задача 7. На двух противоположных сторонах выпуклого четырёхугольника как на гипотенузах построены во внутреннюю сторону два равнобедренных прямоугольных треугольника. Оказалось, что они имеют общую вершину. Докажите, что аналогичные треугольники, построенные на двух других сторонах тоже будут иметь общую вершину.

Задача 8. На сторонах AB, BC и CA, треугольника ABC взяты точки P, Q и R соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APR, BPQ и CQR образуют треугольник, подобный $\triangle ABC$.

Задача 9. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D (A лежит на отрезке CD). Пусть M и N — середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K — середина CD. Докажите, что точки M, K, A, N лежат на одной окружности.

Задача 10. На диагоналях выпуклого четырёхугольника $ABCD$ построены правильные треугольники ACB' и BDC', причём точки B и B' лежат по одну сторону от AC, а точки C и C' лежат по одну сторону от BD. Найдите $\angle BAD + \angle CDA$, если известно, что $B'C' = AB + CD$.