Московские осенние подготовительные сборы.
Гомотетия и поворотная гомотетия.

Задача 1. Докажите, что композиция двух поворотных гомотетий является поворотной гомотетией. Найдите её коэффициент и угол поворота, если они известны для изначальных двух.

Задача 2. Докажите, что окружность целиком расположенная внутри треугольника имеет радиус не больший, чем радиус вписанной в него окружности.

Задача 3. В окружности ω проведена хорда AB. Окружность γ касается AB в точке K и окружности ω в точке T внутренним образом. L — середина дуги AB окружности ω, не содержащей точки T.

a) Докажите, что точки K, T и L лежат на одной прямой (**Лемма Архимеда**).

b) Докажите, что степень точки L относительно окружности γ не зависит от выбора этой окружности (с сохранением условия касания).

Задача 4. Докажите, что в любом треугольнике ортоцентр H, точка пересечения медиан M и центр описанной окружности O лежат на одной прямой причём $MH = 2MO$ (**прямая Эйлера**).

Задача 5. Окружность ω_A вписана в угол A треугольника ABC. Аналогично определены окружности ω_B и ω_C, причём все эти окружности не пересекаются. Окружность ω касается внешним образом окружностей ω_A, ω_B, ω_C в точках A', B' и C' соответственно. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

Задача 6. Обозначим точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной AC треугольника ABC через P и Q соответственно. Докажите, что прямая BQ проходит через точку диаметрально противоположную точке P на вписанной окружности.

Задача 7. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K. Окружность s_1 проходит через точку K и касается прямых AB и AD(s_1 вторично пересекает диагональ AC на отрезке AK). Окружность s_2 проходит через точку K и касается прямых CBи CD (s_2вторично пересекает диагональ AC на отрезке KC). Докажите, что при всех положениях точки K на диагонали AC прямые, соединяющие центры окружностей s_1 и s_2, будут параллельны между собой.

Задача 8. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC, и прямая ℓ касается окружностей, описанных около треугольников ADB и ADC в точках M и N соответственно. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков BD, DC и MN, касается прямой ℓ.

Московские осенние подготовительные сборы.
Гомотетия и поворотная гомотетия.

Задача 9. Докажите, что композиция двух поворотных гомотетий является поворотной гомотетией. Найдите её коэффициент и угол поворота, если они известны для изначальных двух.

Задача 10. Докажите, что окружность целиком расположенная внутри треугольника имеет радиус не больший, чем радиус вписанной в него окружности.

Задача 11. В окружности ω проведена хорда AB. Окружность γ касается AB в точке K и окружности ω в точке T внутренним образом. L — середина дуги AB окружности ω, не содержащей точки T.

a) Докажите, что точки K, T и L лежат на одной прямой (**Лемма Архимеда**).

b) Докажите, что степень точки L относительно окружности γ не зависит от выбора этой окружности (с сохранением условия касания).

Задача 12. Докажите, что в любом треугольнике ортоцентр H, точка пересечения медиан M и центр описанной окружности O лежат на одной прямой причём $MH = 2MO$ (**прямая Эйлера**).

Задача 13. Окружность ω_A вписана в угол A треугольника ABC. Аналогично определены окружности ω_B и ω_C, причём все эти окружности не пересекаются. Окружность ω касается внешним образом окружностей ω_A, ω_B, ω_C в точках A', B' и C' соответственно. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

Задача 14. Обозначим точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной AC треугольника ABC через P и Q соответственно. Докажите, что прямая BQ проходит через точку диаметрально противоположную точке P на вписанной окружности.

Задача 15. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K. Окружность s_1 проходит через точку K и касается прямых AB и AD(s_1 вторично пересекает диагональ AC на отрезке AK). Окружность s_2 проходит через точку K и касается прямых CBи CD (s_2вторично пересекает диагональ AC на отрезке KC). Докажите, что при всех положениях точки K на диагонали AC прямые, соединяющие центры окружностей s_1 и s_2, будут параллельны между собой.

Задача 16. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC, и прямая ℓ касается окружностей, описанных около треугольников ADB и ADC в точках M и N соответственно. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков BD, DC и MN, касается прямой ℓ.