

Ортоизогональ.

1. Пусть AA_1 , BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из B на A_1C_1 , из A на B_1C_1 и из C на A_1B_1 пересекаются в одной точке. Что это за точка?
2. А) В треугольнике ABC проведены медиана CM и высота CH . Докажите, что $\angle ACM = \angle BCH$ т. и т. т., когда $\angle ACB = 90^\circ$.
Б) Определите углы треугольника, в котором медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, делят угол на четыре равные части.
В) Определите углы треугольника, в котором медиана и высота, проведенные из одной вершины, делят угол на три равные части.
3. А) Расстояние от точки пересечения высот треугольника ABC до вершины C равно радиусу описанной окружности. Найдите угол ACB .
Б) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.
В) Найдите углы остроугольного треугольника ABC , если известно, что его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH , где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC .
Г) В остроугольном треугольнике ровно один из углов равен 60° . Докажите, что прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения медиан треугольника, отсекает от него равносторонний треугольник.
4. А) В треугольнике ABC угол A равен 60° ; O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, I — центр вписанной окружности, а I_a — центр невписанной окружности, касающейся стороны BC . Докажите, что $IO = IH$ и $I_aO = I_aH$.
Б) В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60° , а высоты CE и AD пересекаются в точке O . Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на общей биссектрисе углов AOE и COD .
В) В остроугольном треугольнике ABC с углом A , равным 60° , высоты пересекаются в точке H . Пусть M и N — точки пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BH и CH со сторонами AB и AC соответственно. Докажите, что точки M , N и H и центр O описанной окружности лежат на одной прямой.
5. Докажите, что если прямая Эйлера проходит через центр вписанной окружности треугольника, то треугольник равнобедренный.