Математический кружок

Точка Микеля

Данное занятие ориентировано на учеников 9 – 10 класса. Для того, чтобы решать подобные задачи, ученикам необходимо знать основные факты, связанные с вписанными углами и иметь опыт в решении элементарных задач.

Первые три задачи достаточно простые и являются вспомогательными к задаче №8. Задача №4 помогает вспомнить метод доказательства того, что несколько окружностей имеют общую точку. Задачи №5 и №6 во-первых «освежают» в памяти конструкцию, связанную с прямой Симсона, а во-вторых помогают при решении задачи №7б.

Задачи № 7а, б связаны с одной из замечательных точек — точкой Микеля. И, наконец, задача №8 иллюстрирует применение результата задачи №7а.

1. *Две равные окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Точки M и K принадлежат данным окружностям, причем A является серединой отрезка MK. Докажите, что*: а) *прямые AB и MK перпендикулярны*; б) $AM = O_1O_2$.

Решение. а) Поскольку радиусы окружностей равны (см. рис. 1), то равные хорды AM и AK стягивают равные дуги, то есть, $\angle MBA = \angle KBA$. Следовательно, треугольник MBK — равнобедренный и прямая AB перпендикулярена прямой MK. б) Так как прямые AB и MK перпендикулярны, то MB и BK являются диаметрами окружностей, следовательно, O_1O_2 — средняя линия треугольника MBK.

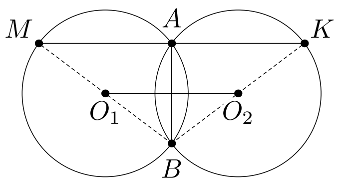

Рис. 1

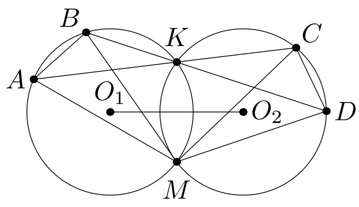

Рис. 2

2. *Две равные окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и K. Через точку K проведены две прямые, пересекающие первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D соответственно. Докажите, что*: а) $AB = CD$; б) *треугольники AMC и BMD равнобедренные*; в) *треугольники ABM и CDM равны*; г) $\angle AMC = \angle BMD = \angle O_1MO_2$.

Решение. а) Так как радиусы окружностей равны (см. рис. 2), то равные углы AKB и CKD опираются на равные дуги, которые стягивают равные хорды.

б) Дуги окружностей, стягиваемые хордой MK — равны.

в) Следует из предыдущих пунктов.

г) При повороте с центром в точке M на $\angle AMC$ окружность с центром O_1 переходит в окружность с центром O_2.

3. *Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и K. На одной окружности взяты точки A и B, а на другой — C и D так, что треугольники ABM и CDM оказались равными (точки B и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AD). Докажите, что точки A, K и C лежат на одной прямой и точки B, K и D лежат на одной прямой.*

Решение. Углы $\angle MBA$ и $\angle CDM$ равны как соответственные углы равных треугольников (см. рис. 2). Из того, что $\angle AKM = \angle MBA$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу) и что $\angle CKM = 180^\circ - \angle CDM$ (вписанные, опирающиеся на дуги, дополняющие друг друга до окружности) следует, что точки A, K и C лежат на одной прямой. Для точек B, K и D доказательство аналогично. *Отметим, что утверждение 3 является обратным к утверждению 2.*

4. *На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 пересекаются в одной точке.*

Решение. 1) Очевидно, что из углов треугольника хотя бы два угла — острые, например, углы A и B.

2) Пусть P — точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1 и BC_1A_1, отлична от C_1 и лежит внутри треугольника ABC (см. рис. 3). Тогда сумма углов B_1AC_1 и B_1PC_1 равна 180° (вписанные, опирающиеся на дуги, дополняющие друг друга до окружности). Аналогично, сумма углов C_1BA_1 и C_1PA_1 равна 180°. Следовательно, сумма углов B_1CA_1 и B_1PA_1 равна 180°, причем точки C и P лежат в разных

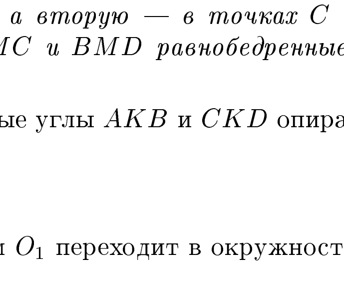

Рис. 3

полуплоскостях относительно прямой A_1B_1 (углы A и B — острые), то есть, окружность, описанная около треугольника CA_1B_1 проходит через точку P.

3) Если точка P лежит вне треугольника, например, в разных полуплоскостях с точкой C относительно прямой AB, то углы B_1AC_1 и B_1PC_1 будут опираться на одну дугу и поэтому будут равны. Аналогично, будут равны углы C_1BA_1 и C_1PA_1. Следовательно, сумма углов B_1CA_1 и B_1PA_1 равна $180°$, причем точки C и P лежат в разных полуплоскостях относительно прямой A_1B_1, то есть, окружность, описанная около треугольника CA_1B_1 проходит через точку P.

5. (Утверждение, обратное теореме о прямой Симсона) *Основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки P на стороны треугольника или на их продолжения, лежат на одной прямой. Докажите, что точка P лежит на описанной окружности треугольника.*

Решение. Заметим, что метод доказательства данного утверждения ничем не отличается от метода доказательства самой теоремы. Пусть точки M, K и L — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AC, AB и BC, соответственно (см. рис. 4). Тогда четырехугольники $AMKP$ и $MPLC$ — вписанные. Поэтому $\angle APM = \angle AKM$ и $\angle CPM = \angle CLM$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу). Так как точки M, K и L лежат на одной прямой, то $\angle AKM = \angle BKL$ как вертикальные. То есть, $\angle APC = \angle APM + \angle CPM = \angle BKL + \angle CLM = \angle ABC$, откуда и следует утверждение задачи.

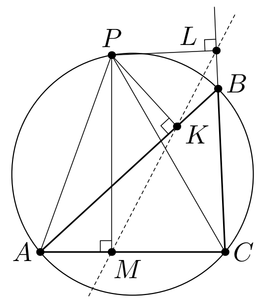

Рис. 4

6. *Точки A, B и C лежат на одной прямой, точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, ACP и точка P лежат на одной окружности.*

Решение. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины отрезков PA, PB и PC; O_a, O_b и O_c — центры описанных окружностей треугольников BCP, ACP и ABP. Точки A_1, B_1 и C_1 являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника $O_aO_bO_c$ (или на их продолжения). Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, следовательно, точка P лежит на описанной окружности треугольника $O_aO_bO_c$ (см. рис. 5).

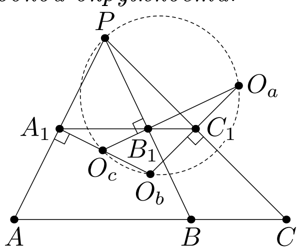

Рис. 5

7. *Четыре прямые образуют четыре треугольника.*
а) Докажите, что описанные окружности этих треугольников имеют общую точку (точка Микеля). б) Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля.

Решение. а) Пусть AD, DF, AE и BF — данные прямые (см. рис. 6). Пусть окружности, описанные около треугольников DAE и DBF пересекаются в точке P, отличной от D. Тогда $\angle ADP = \angle BDP = \angle BFP$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу). С другой стороны, $\angle ADP = \angle AEP$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу). Следовательно, $\angle CEP = \angle AEP = \angle BFP = \angle CFP$, то есть, точки C, P, E и F лежат на одной окружности. Для точек B, A, C и P доказательство аналогично. б) Согласно пункту а) описанные окружности треугольников ABC, ADE и BDF проходят через точку P, поэтому их можно рассмотреть как описанные окружности треугольников ABP, ADP и BDP. Тогда их центры лежат на окружности, проходящей через точку P (см. №6). Аналогично доказывается, что центры любых трех из данных окружностей лежат на одной окружности, проходящей через точку P. Следовательно, все четыре центра лежат на одной окружности, проходящей через точку P.

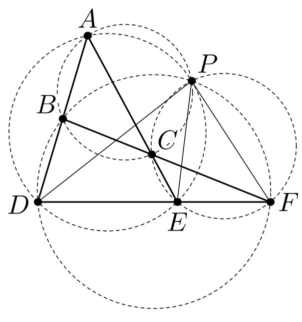

Рис. 6

8. *Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, стороны BC и AD которого равны, но не параллельны. Пусть E и F — внутренние точки отрезков BC и AD соответственно такие, что $BE = DF$. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, прямые BD и EF пересекаются в точке R, прямые EF и AC пересекаются в точке Q. Рассмотрим треугольники PQR, получаемые для всех таких точек E и F. Докажите, что окружности, описанные около всех таких треугольников, имеют общую точку, отличную от P.*

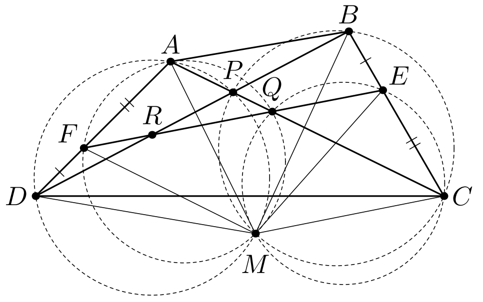

Рис. 7

Решение. Переформулируем условие задачи в удобном для нас виде. Рассмотрим прямые AD, AC, BD и EF (см. рис. 7). Они образуют четыре треугольника и следовательно, описанные окружности этих треугольников имеют общую точку (см. №7). Аналогично для прямых BC, BD, AC и EF. То есть, требуется доказать, что точки Микеля у двух данных конструкций совпадают. Поскольку треугольники APD и BPC (а, следовательно и описанные около них окружности) фиксированы, то достаточно будет доказать, что окружности, описанные около треугольников AFQ и CEQ проходят через точку пересечения окружностей, описанных около треугольников APD и BPC, отличную от P. Пусть M — точка пересечения окружностей, описанных около треугольников APD и BPC, отличная от P. Тогда $\triangle AMD = \triangle BMC$ (см. №2), а значит $\triangle AMF = \triangle CME$. Рассмотрим окружности, описанные около треугольников AFM и CEM. Пусть они пересекаются в точке Q'. Но так как окружности имеют одинаковый радиус и $\triangle AMF = \triangle CME$, то точки A, C и Q' лежат на одной прямой и точки E, F и Q' лежат на одной прямой (см. №3), то есть, Q' совпадает с Q.

Итак, окружности, описанные около треугольников AFQ и CEQ проходят через точку M, то есть, точка M является точкой Микеля для обоих семейств прямых. Следовательно, окружности, описанные около всех треугольников PQR, имеют общую точку, отличную от P.

Доказанное утверждение позволяет дать другое определение точки Микеля: если дан четырехугольник с равными, но не параллельными противолежащими сторонами, то точкой Микеля называется центр поворота, при котором одна из равных сторон переходит в другую.