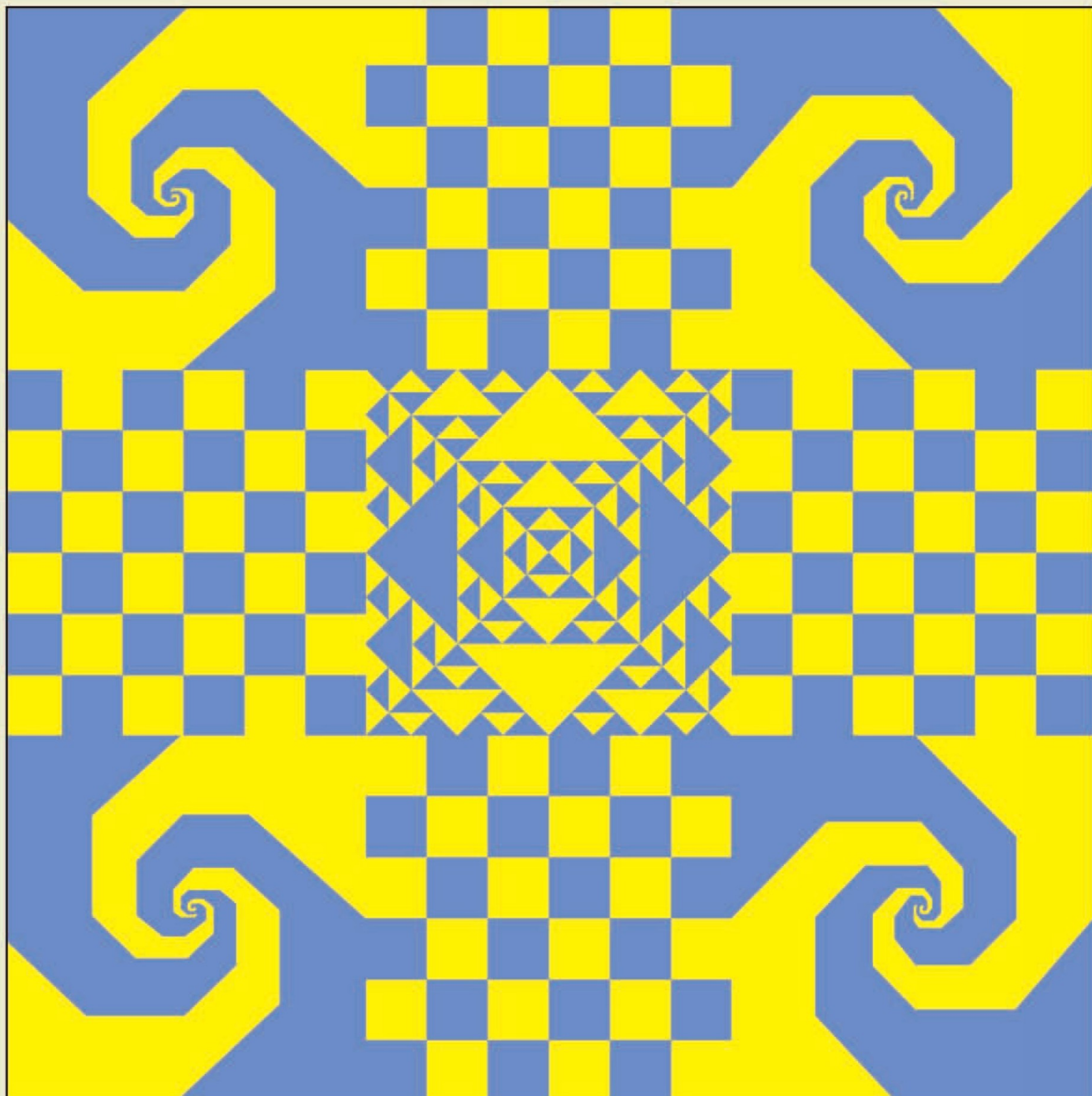


МАРТ/АПРЕЛЬ

ISSN 0130-2221
2009 · №2

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



Вневписанная окружность

А.БЛИНКОВ, Ю.БЛИНКОВ

НАЧНЕМ С ПРОСТОГО ВОПРОСА, КОТОРЫЙ МОЖЕТ ВОЗНИКНУТЬ УЖЕ НА НАЧАЛЬНОМ ЭТАПЕ ИЗУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ.

Пусть на плоскости заданы три прямые, которые попарно пересекаются в точках A , B и C (рис.1,а). Вопрос: *сколько существует точек, равноудаленных от этих прямых?*

Многие школьники дают немедленный ответ: конечно одна, а именно, центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Как часто бывает

в подобных случаях, этот ответ неверен.

Действительно, рассмотрим, например, биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC (рис.1,б). Так как сумма углов, образованных ими со стороной BC , меньше, чем 180° , то эти биссектрисы пересекутся в некоторой точке Q . Тогда точка Q равноудалена от прямых AB , AC и BC . Аналогично, рассматривая другие пары внешних углов треугольника ABC , получим еще две точки, обладающие требуемым свойством.

Таким образом, помимо центра окружности, вписанной в треугольник ABC , существуют, по крайней мере, *еще три точки*, равноудаленные от заданных прямых. Каждая из этих точек является центром *окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других сторон*. Такие окружности называют *вневписанными* для данного треугольника ABC .

Упражнения

1. Докажите, что других точек, равноудаленных от прямых AB , AC и BC , не существует (т.е. их ровно четыре).
2. Докажите, что точка Q лежит на биссектрисе угла BAC (см. рис.1,б).
3. Вычислите угол BQC , если $\angle BAC = \alpha$.

Посмотрим, как могут применяться изложенные факты.

Задача 1. Постройте треугольник ABC , зная положение трех точек A_1 , B_1 и C_1 , являющихся центрами вневписанных окружностей треугольника ABC .

Решение. Пусть искомым треугольником ABC построен. Центр каждой его вневписанной окружности лежит на пересечении соответствующих биссектрис внутреннего и внешнего углов. Проведя их, получим точки A_1 , B_1 и C_1 (рис.2).

Так как биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой, то вершины A , B и C искомого треугольника лежат на сторонах треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, так как биссектриса внешнего угла треугольника перпендикулярна биссектрисе внутреннего угла, проведенной из той же вершины, то $A_1A \perp B_1C_1$, $B_1B \perp A_1C_1$, $C_1C \perp A_1B_1$.

Таким образом, решение задачи сводится к построению треугольника $A_1B_1C_1$ и его высот.

Используя результат упражнения 3, нетрудно доказать, что задача имеет решение (причем единственное) тогда и только тогда, когда треугольник $A_1B_1C_1$ — остроугольный.

Это позволяет сформулировать полезный факт: *вершины остроугольного треугольника являются центрами вневписанных окружностей для его орто треугольника* (треугольника, образованного основаниями высот).

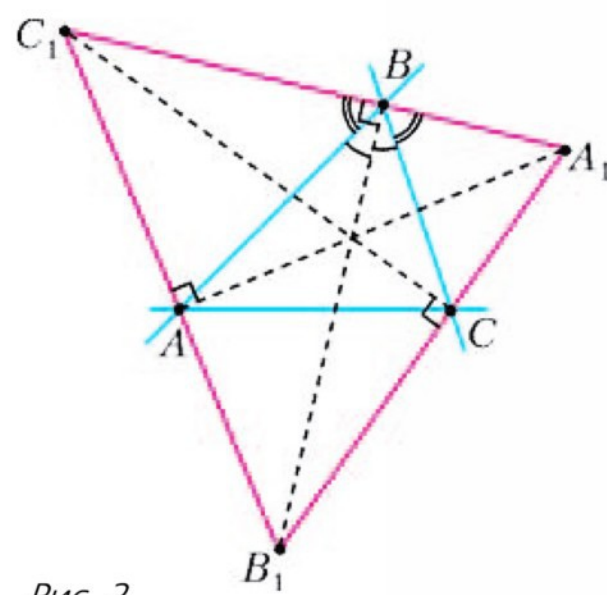


Рис. 2

Геометрические конфигурации, связанные с вневписанными окружностями, очень содержательны и встречаются во многих задачах. Рассмотрим основные факты, связанные с такими конфигурациями.

Пусть вневписанная окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M , а продолжений сторон AB и AC — в точках P и T соответственно. Вписанная в этот треугольник окружность касается сторон BC , AB и AC в точках K , L и N соответственно (рис.3). Докажем следующие равенства:

1. $BK = p - b$, где p — полупериметр треугольника ABC , b — длина стороны AC ;
2. $AP = p$;
3. $BK = CM$, т.е. точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной треугольника симметричны относительно середины этой стороны.

Действительно, из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, получим: $AN = AL$, $BK = BL$ и $CN = CK$. Сумма этих шести отрезков составляет периметр треугольника ABC , поэтому $AN + BK + CN = p$. Учитывая, что $AN + CN = b$, получаем равенство 1.

Применяя эту же теорему об отрезках касательных к другой окружности, получим: $AP = AT$, $BM = BP$ и $CM = CT$. Тогда $P_{ABC} = AB + AC + BC = AB + AC + BM + CM = AB + AC + BP + CT = AP + AT = 2AP$, откуда следует равенство 2.

Так как $AT = p$, то и $CM = CT = AT - AC = p - b = BK$. Таким образом, доказано равенство 3.

Упражнение 4. Пользуясь обозначениями рисунка 3, докажите, что: а) $PL = BC$; б) *прямая AM делит периметр треугольника ABC пополам*.

Теперь получим соотношения, связывающие радиусы вписанной и вневписанной окружностей. Для этого (временно убрав обозначения некоторых точек) дополним рисунок 3, отметив центры вписанной и вневписанной окружностей — точки I и Q соответственно — и проведя радиусы $IL = r$ и $QP = r_a$ этих окружностей (рис.4). Тогда прямоугольные треугольники AIL и AQP подобны (так как у них общий острый угол), поэтому $\frac{IL}{QP} = \frac{AL}{AP} = \frac{AI}{AQ}$. Учитывая, что $AL = p - a$ (см. равенство 1) и $AP = p$ (см. равенство 2), получим, что $\frac{r}{r_a} = \frac{p - a}{p}$. Из этого соотношения, в частности, можно получить формулу, выражающую площадь треугольника

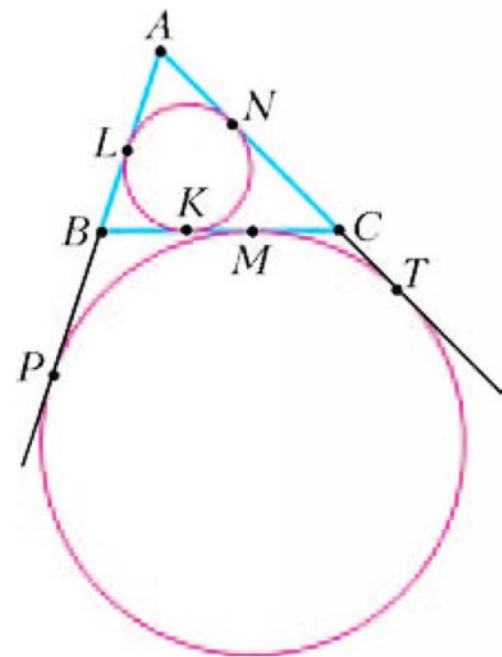


Рис. 3

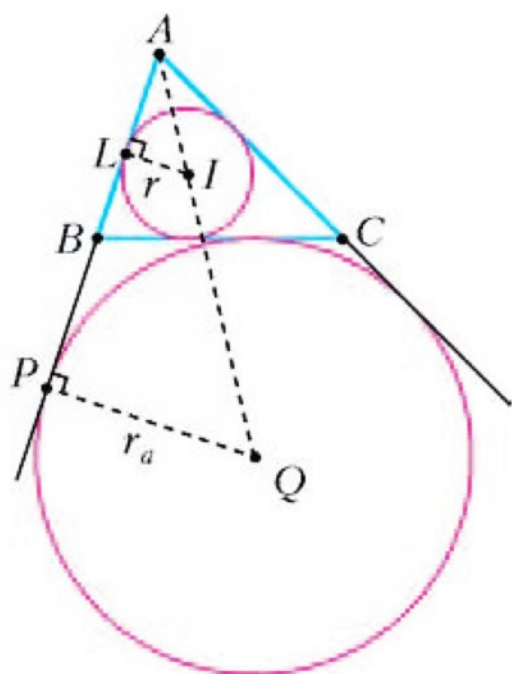


Рис. 4

треугольника, противолежащий стороне a ;

$$\text{б) } r_a : r_b : r_c = \frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c};$$

$$\text{в) } \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c};$$

$$\text{г) } S = \sqrt{r r_a r_b r_c}.$$

Еще один интересный факт можно получить, решив следующую задачу.

Задача 2. Продолжение биссектрисы угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке M ; I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC ; Q — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC . Докажите, что точки B, C, I и Q лежат на окружности с центром M .

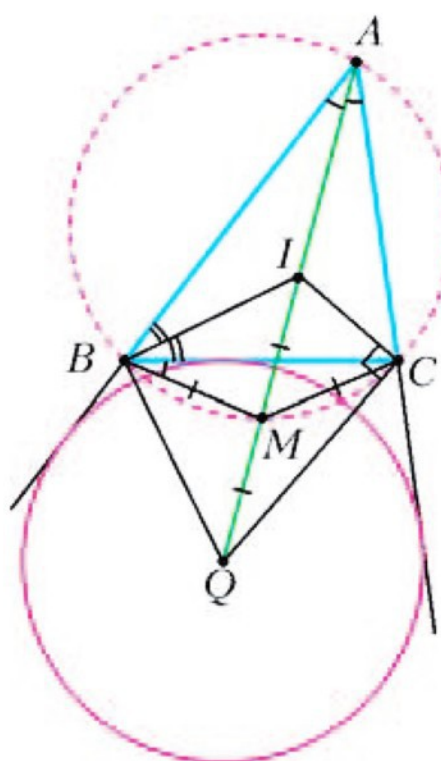


Рис. 5

Решение. По условию, I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC , а Q — точка пересечения биссектрисы угла A и биссектрис внешних углов при вершинах B и C (рис.5). Так как $\angle IBQ = \angle ICQ = 90^\circ$, то точки B и C лежат на окружности с диаметром IQ .

Решение. По условию, I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC , а Q — точка пересечения биссектрисы угла A и биссектрис внешних углов при вершинах B и C (рис.5). Так как $\angle IBQ = \angle ICQ = 90^\circ$, то точки B и C лежат на окружности с диаметром IQ .

Пусть $\angle BAC = \alpha$; $\angle ABC = \beta$. Угол $\angle BIM$ — внешний для треугольника AIB , значит, $\angle BIM = \angle IAB + \angle IBA = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

Кроме того, $\angle IBM = \angle IBC + \angle MBC = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$, так как $\angle MBC = \angle MAC = \frac{1}{2}\beta$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, описанной около треугольника ABC). Следовательно, $\angle BIM = \angle IBM$, т.е. $MI = MB$.

Аналогично получим, что $MI = MC$, значит, M — центр окружности, описанной около треугольника BIC , а точка Q лежит на этой окружности, т.е. точки B, C, I и Q лежат на окружности с центром M .

Отметим, что равенство $MB = MC = MI$, являющееся следствием доказанного утверждения, иногда называют теоремой о «трилистнике».

Далее рассмотрим несколько «классических» задач, в которых вневписанная окружность выступает в роли «вспомогательной».

Задача 3. Постройте прямую, проходящую через данную точку и отсекающую от данного угла треугольник с заданным периметром.

Решение. Пусть на плоскости даны угол O и точка M .

Предположим, что искомая прямая AB построена, т.е. треугольник AOB имеет заданный периметр P . Проведем окружность, касающуюся сторон данного угла и отрезка AB (рис.6). Пусть K и L — точки касания этой окружности со сторонами угла, тогда $OK = OL = \frac{1}{2}P$ (см. равенство 2).

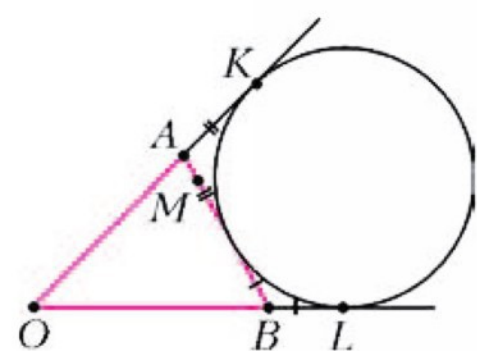


Рис. 6

Таким образом, решение задачи сводится к построению вспомогательного равнобедренного треугольника KOL (сторону KL которого можно не проводить) и окружности, касающейся сторон данного угла в точках K и L . После этого через точку M проводится касательная AB к этой окружности.

Отметим, что в зависимости от расположения точки M задача может иметь два решения, одно решение или не иметь решений.

Задача 4. В треугольнике ABC с углом B , равным 120° , проведены биссектрисы AA_1 , BB_1 и CC_1 . а) Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ — прямоугольный. б) Найдите угол B_1C_1C .

Решение. а) На продолжении стороны AB (за точку B) отметим точку D , тогда $\angle DBC = 60^\circ$, т.е. луч BC — биссектриса угла DBB_1 (рис.7). Так как AA_1 — биссектриса угла

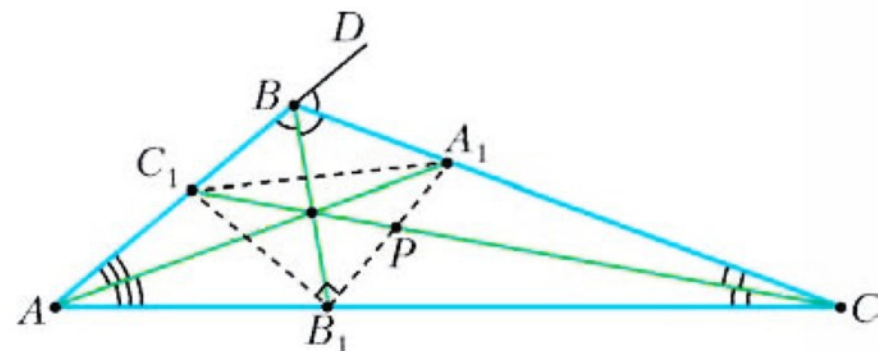


Рис. 7

BAC , то A_1 — центр окружности, касающейся BB_1 , BD и B_1C . Такая окружность является вневписанной для треугольника ABB_1 , поэтому B_1A_1 — биссектриса угла BB_1C . Аналогично, C_1 — центр вневписанной окружности для треугольника CBV_1 , поэтому B_1C_1 — биссектриса угла BB_1A . Следовательно, $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$.

б) Из доказанного следует, что точка P пересечения CC_1 и B_1A_1 является пересечением биссектрис треугольника BCB_1 . Следовательно,

$$\begin{aligned} \angle B_1PC &= 180^\circ - (\angle PB_1C + \angle PCB_1) = \\ &= 180^\circ - \frac{\angle BB_1C + \angle BCB_1}{2} = 120^\circ. \end{aligned}$$

Так как $\angle B_1PC$ — внешний для прямоугольного треугольника PB_1C_1 , то $\angle B_1C_1C = \angle B_1PC - 90^\circ = 30^\circ$.

Задача 5. На стороне BC квадрата $ABCD$ выбрана точка M , а на стороне CD — точка K так, что угол MAK равен 45° . Докажите, что расстояние от вершины A до прямой MK равно стороне квадрата.

Решение. Пусть точка P — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на прямую MK (рис.8). Проведем диагональ AC квадрата и рассмотрим треугольник CMK . Точка A лежит на биссектрисе угла C этого треугольника и $\angle MAK = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C$, следовательно, A является центром вневписанной окружности треугольника CMK (см. упражнение 3). Тогда $AP = AB = AD$ (радиусы этой окружности).

Отметим, что из доказанного следует также, что периметр треугольника CMK равен половине периметра квадрата.

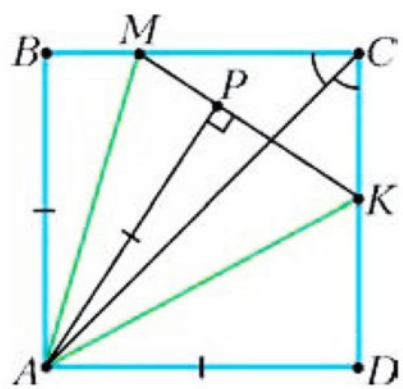


Рис. 8

Заметим также, что эту задачу можно было решить и другим способом: рассмотрев образ треугольника ADK при повороте с центром A на угол 90° (против часовой стрелки).

Упражнение 6. Докажите обратное утверждение: если отрезок MK отсекает от квадрата $ABCD$ треугольник CMK , периметр которого равен половине периметра квадрата, то угол MAK равен 45° (см. рис.8).

Рассмотрим еще несколько любопытных фактов, связанных с внеписанными окружностями. Вернувшись к рисунку 4, отметим, что равенство 4 можно было получить не из подобия треугольников, а из того, что при гомотетии с центром A и коэффициентом $k = \frac{AQ}{AI}$ внеписанная окружность переходит во вписанную. Эта же гомотетия позволяет заметить важное утверждение: пусть точка F диаметрально

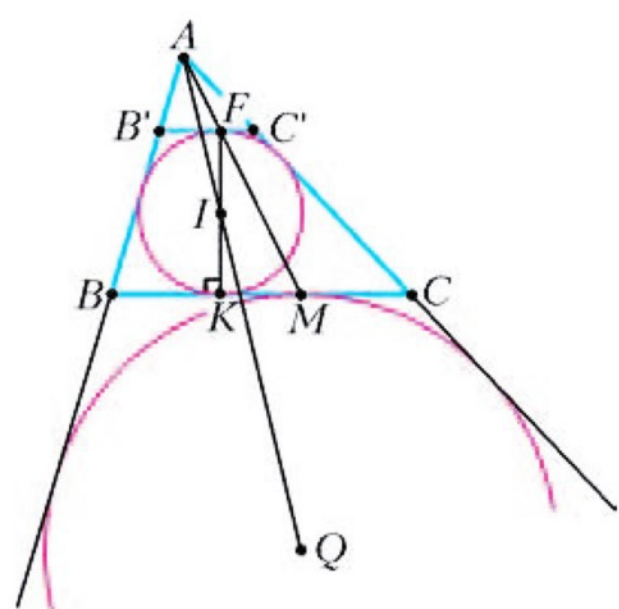


Рис. 9

противоположна точке K касания вписанной окружности со стороной BC (рис.9). Тогда точки A , F и M лежат на одной прямой.

Действительно, образом касательной BC к внеписанной окружности при указанной гомотетии является касательная $B'C'$ к вписанной окружности, причем $B'C' \parallel BC$ (см. рис.9). Поэтому образом точки M является точка

касания $B'C'$ и вписанной окружности, которая совпадает с точкой F , поскольку диаметр FK , перпендикулярный BC , перпендикулярен также и $B'C'$.

Задача 6. Докажите, что середина высоты треугольника, центр вписанной в него окружности и точка касания стороны, на которую опущена высота, с соответствующей внеписанной окружностью лежат на одной прямой.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC , в котором AN — высота, точка D — ее середина, точки I и Q — центры вписанной и внеписанной (касающейся стороны BC) окружностей соответственно, K и M — точки касания этих окружностей со стороной BC (рис.10).

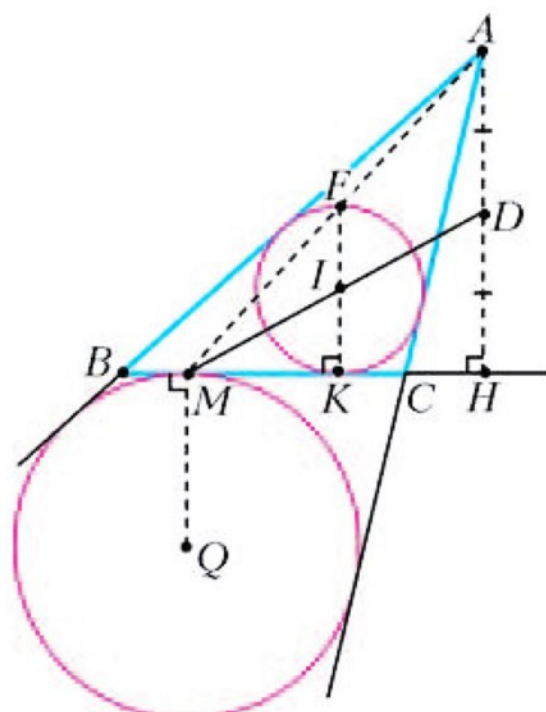


Рис. 10

Проведем KF — диаметр вписанной окружности, тогда точки A , F и M лежат на одной прямой. Так как $KF \parallel AN$, то медиана MD треугольника AMH проходит через середину отрезка KF , т.е. содержит точку I .

Упражнения

8. Докажите, что в прямоугольном треугольнике центр вписанной окружности, середина катета и точка касания

другого катета с внеписанной окружностью лежат на одной прямой.

9. Докажите, что точки D , K и Q (см. рис.10) лежат на одной прямой.

Эффективность применения некоторых из полученных ранее соотношений можно показать еще на одном ярком примере. Известно, что если в треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон в точках A' , B' и C' , то отрезки AA' , BB' и CC' пересекаются в одной точке (называемой точкой Жергонна; рис.11,а). Для доказательства этого утверждения достаточно использовать то, что $AB' = AC'$, $BC' = BA'$ и $CA' = CB'$. Тогда

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1,$$

откуда по теореме Чевы и следует, что указанные отрезки пересекаются в одной точке.

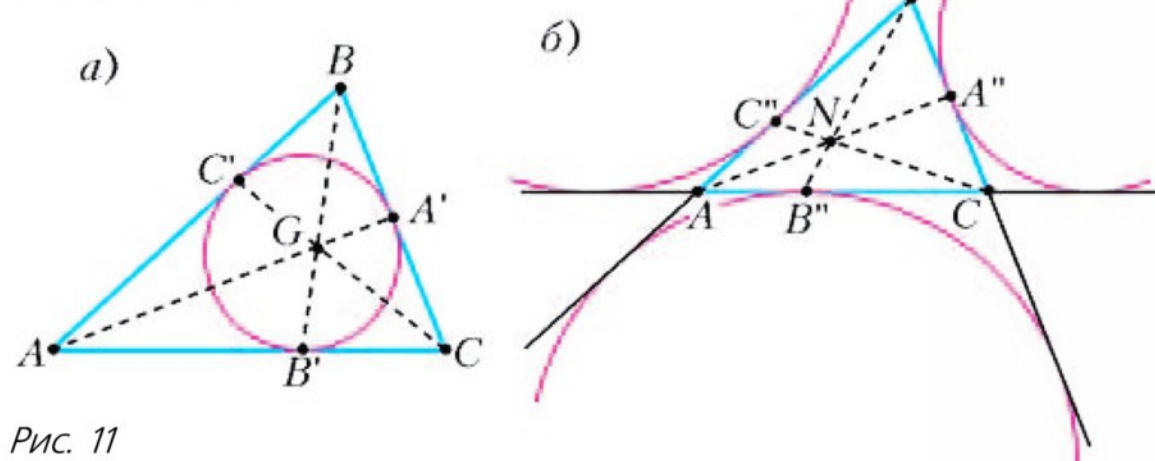


Рис. 11

Аналогичное утверждение верно и для точек касания внеписанных окружностей со сторонами треугольника, т.е. если A'' , B'' и C'' — точки касания внеписанных окружностей со сторонами треугольника ABC , то отрезки AA'' , BB'' и CC'' пересекаются в одной точке (называемой точкой Нагеля; рис.11,б).

Для того чтобы свести доказательство этого утверждения к предыдущему, достаточно опять использовать теорему Чевы и доказанное равенство 3, заменяя в каждом случае расстояние от вершины до точки касания стороны и внеписанной окружности на равное ему расстояние от вершины до точки касания этой стороны и вписанной окружности.

Приведенный пример иллюстрирует часто встречающуюся двойственность утверждений, касающихся вписанной и внеписанной окружностей.

Упражнение 10. Пользуясь обозначениями рисунка 3, докажите, что прямые AM , BT и CP пересекаются в одной точке.

Внеписанная окружность часто «всплывает» и при изучении стереометрии. Рассмотрим, например, треугольник ABC и точку P , не лежащую в его плоскости и равноудаленную от прямых AB , BC и AC . Пусть точка Q — ортогональная проекция точки P на плоскость ABC . Какую роль играет точка Q по отношению к треугольнику ABC ?

И в этом случае (так же, как и в планиметрии) некоторые школьники дают неверный ответ: « Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC ».

На самом деле, из условия следует только, что точка Q равноудалена от прямых, содержащих стороны треугольника (по теореме о трех перпендикулярах и по свойству равных наклонных, проведенных к плоскости из одной точки). Поэтому точка Q является либо центром окружности, вписанной в треугольник ABC , либо центром одной из внеписанных окружностей этого треугольника (рис.12,а,б).

Упражнения

11. Для треугольной пирамиды $PABC$ докажите равносильность утверждений а)–г):

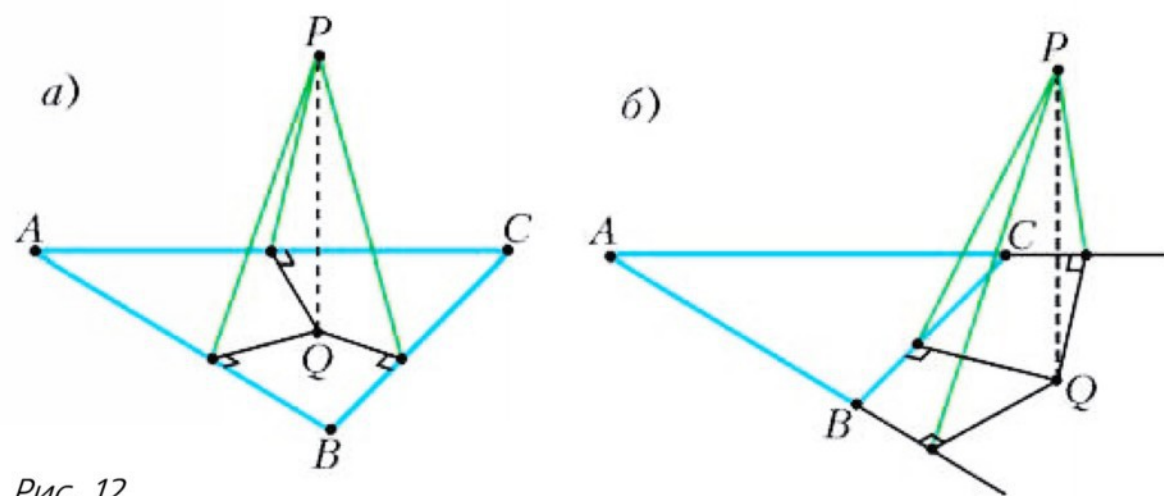


Рис. 12

а) Ортогональной проекцией вершины P на плоскость ABC является либо центр окружности, вписанной в треугольник ABC , либо центр одной из внеписанных окружностей этого треугольника.

б) Высоты боковых граней, проведенные из вершины P , равны.

в) Плоскости боковых граней одинаково наклонены к плоскости основания.

г) Плоскости боковых граней образуют одинаковые углы с высотой пирамиды.

12. В основании пирамиды – правильный треугольник со стороной 1. Каждая боковая грань пирамиды образует с основанием угол 60° . Найдите высоту пирамиды, если известно, что ее длина больше, чем 0,5.

13. Докажите, что в треугольной пирамиде, у которой боковые грани образуют одинаковый угол φ с плоскостью основания, площадь боковой поверхности можно вычислить по формуле:

$S_{\text{бок}} = \frac{pr}{\cos \varphi}$, где p – полупериметр основания, r – либо радиус окружности, вписанной в основание, либо радиус внеписанной окружности.

В заключение выразим надежду, что рассмотренные утверждения, факты и соотношения, а также упражнения и разобранные задачи, позволят читателю успешно справиться с циклом задач, которые мы предлагаем для самостоятельного решения.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда:

а) радиус одной из внеписанных окружностей равен полупериметру треугольника;

б) площадь треугольника равна произведению радиусов вписанной и одной из внеписанных окружностей;

в) площадь треугольника равна произведению двух радиусов внеписанных окружностей.

2. Отрезок, отличный от диагонали, разбивает квадрат на два многоугольника, в каждый из которых вписана окружность. Найдите длину этого отрезка, если радиусы окружностей равны R и r ($R > r$).

3. Постройте треугольник по углу, высоте, проведенной из вершины этого угла, и периметру.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE . Оказалось, что DE – биссектриса треугольника ADC . Найдите угол BAC .

5. Углы, прилежащие к одной из сторон треугольника, равны 15° и 30° . Какой угол образует с этой стороной проведенная к ней медиана?

6. Точка E на стороне AD квадрата $ABCD$ такова, что $\angle AEB = 60^\circ$. Биссектриса угла ABE , отразившись от стороны AD , пересекает отрезок BE в точке F . Докажите, что точка F лежит на диагонали квадрата.

7. На полосу наложился квадрат, сторона которого равна ширине полосы, так, что его граница пересекает границы полосы в четырех

точках. Докажите, что две прямые, проходящие крест-накрест через эти точки, пересекаются под углом 45° .

8. Дан треугольник ABC . На лучах AB и AC (вне треугольника) построены точки A_1 и A_2 соответственно так, что $BA_1 = CA_2 = BC$. A_0 – точка пересечения отрезков BA_2 и CA_1 . Докажите, что прямая, проходящая через A_0 перпендикулярно прямой BC , содержит центр внеписанной окружности треугольника ABC .

9. Окружность с центром D проходит через вершины A , B и центр Q внеписанной окружности треугольника ABC , касающейся его стороны BC . Докажите, что точки A , B , C и D лежат на одной окружности.

10. $ABCD$ – параллелограмм. Внеписанные окружности треугольников ABC и ACD касаются сторон BC и CD соответственно. Докажите, что точки их касания с прямой AC совпадают.

11. Дан параллелограмм $ABCD$. Внеписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AD и AB в точках M и N . Докажите, что точки пересечения отрезка MN со сторонами BC и CD лежат на вписанной окружности треугольника BCD .

12. Постройте четырехугольник $ABCD$ по двум сторонам AB и AD и двум углам B и D , если известно, что в него можно вписать окружность.

13. а) Докажите, что произведение расстояний от вершины треугольника до центра вписанной окружности и до центра соответствующей этой вершине внеписанной окружности равно произведению сторон треугольника, сходящихся в этой вершине.

б) Через две вершины треугольника и центр вписанной в него окружности проведена окружность. Докажите, что отрезок касательной, проведенной к этой окружности из третьей вершины, есть среднее геометрическое между сторонами треугольника, сходящимися в этой вершине.

14. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, касается катета BC и гипотенузы AB в точках P и Q соответственно. Внеписанная окружность, касающаяся катета BC , касается продолжения катета AC в точке T . Докажите, что точки P , Q и T лежат на одной прямой.

15. а) Через середину D стороны BC треугольника ABC и центр I окружности, вписанной в этот треугольник, проведена прямая, пересекающая высоту AN в точке E . Докажите, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности.

б) Биссектриса угла A пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке W . Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны BC в точке K , P – точка пересечения прямой WK с высотой AN . Докажите, что отрезок HP равен радиусу вписанной окружности.

16. а) Через середину D стороны BC треугольника ABC и центр Q внеписанной окружности, касающейся этой стороны, проведена прямая, пересекающая высоту AN в точке T . Докажите, что отрезок AT равен радиусу этой внеписанной окружности.

б) Биссектриса угла A пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точке W , M – точка касания внеписанной окружности со стороной BC , Z – точка пересечения прямой WM с высотой AN . Докажите, что отрезок HZ равен радиусу этой внеписанной окружности.

17. Внеписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке K , а продолжения стороны AB – в точке L . Другая внеписанная окружность касается продолжений сторон AB и AC в точках M и N соответственно. Прямые KL и MN пересекаются в точке X . Докажите, что CX – биссектриса угла ACN .

18. Равнобедренные треугольники ABC и $A'B'C'$ лежат в параллельных плоскостях. Известно, что точка C' равноудалена от вершин треугольника ABC , а каждая из точек B' и C' находится на таком же расстоянии от прямых AB , BC и AC . Найдите отношение площадей данных треугольников.

(Продолжение см. на с. 45)

Решение. Неравенство имеет четвертую степень, поэтому произведение abc может входить в разложение левой части по элементарным симметрическим многочленам только в первой степени. Если ⁸ коэффициент при abc отрицателен, сдвинем график многочлена $f(t) = (t-a)(t-b)(t-c)$ вниз, так, чтобы он зацепился точкой максимума за ось абсцисс. А если этот коэффициент положителен, то будем сдвигать этот график вверх до тех пор, пока не произойдет одно из двух событий: график зацепится за ось абсцисс точкой минимума или один из корней обратится в ноль. В результате мы получим более сильное неравенство. Значит, исходное неравенство достаточно доказать в двух частных случаях: когда два из трех чисел равны, и когда одно из чисел обращается в ноль.

В случае $b = c$ получим $a^4 - 4a^2b^2 + ab^2(a+2b) \geq 0$. Разделив на b^4 и обозначив $t = a/b$, получим равносильное неравенство $t(t^3 - 3t + 2) \geq 0$. Оно обращается в ноль при $t = 1$, значит, естественно предположить, что $t^3 - 3t + 2 = (\alpha t + \beta)(t - 1)^2$. Сравнивая старшие коэффициенты и свободные члены слева и справа, находим $\alpha = 1$ и $\beta = 2$. Теперь нетрудно проверить, что $t^3 - 3t + 2 = (t+2)(t-1)^2$. При положительных t это выражение неотрицательно.

В случае $c = 0$ доказываемое неравенство очевидно.

Упражнения

12 (Международная олимпиада, 1984 г.). Пусть a, b, c — неотрицательные действительные числа такие, что $a + b + c = 1$. Докажите, что $0 \leq ab + ac + bc - 2abc \leq 7/27$.

13 (М1834). Для действительных чисел x, y, z докажите неравенство $x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 \geq 2(x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3)$.

14. Пусть x, y, z — произвольные действительные числа, $p = x + y + z$, $q = xy + xz + yz$, $r = xyz$. Докажите неравенство $3(3r - pq)^2 \leq 4(p^2 - 2q)(2q^2 - 3pr)$.

15. а) Пусть a, b и c — длины сторон произвольного треугольника. Докажите, что

$$a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) \leq 3abc.$$

б) Пусть α, β, γ — углы треугольника. Докажите неравенство $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 3/2$.

16. Пусть r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей некоторого треугольника, m_a, m_b, m_c — длины его медиан. Докажите неравенство $m_a m_b m_c \geq r_a r_b r_c$.

⁸ Мне не хочется разбираться, какой из двух случаев на самом деле имеет место. Проще разобрать оба.

17. Пусть $A = \sin \alpha \sin \beta + \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \gamma$. Докажите, что
а) $A \leq 9/4$, если α, β, γ — углы произвольного треугольника;
б) $A > 1$, если α, β, γ — углы остроугольного треугольника;
в) $A \leq \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$, если α, β, γ — углы неостроугольного треугольника.

18 (Московская олимпиада, 1997 г.). Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+a+c} + \frac{1}{1+b+c} \leq 1.$$

19. Пусть r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника, p — его полупериметр. Докажите неравенство $5R - r \geq \sqrt{3}p$.

20. Сумма положительных чисел x, y, z равна $\frac{\pi}{2}$. Докажите, что $\cos x + \cos y + \cos z \geq 1 + \sin x + \sin y + \sin z$.

21. Действительные числа x, y, z удовлетворяют условиям $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Найдите наибольшее значение суммы $x^3 + y^3 + z^3$.

22 (олимпиада США, 2001 г.). Неотрицательные числа a, b, c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите, что $0 \leq ab + bc + ac - abc \leq 2$.

23 (М1364). Пусть $a + b + c = 1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. Докажите неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 + abcd \geq \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{9} + \frac{d}{27} \right\}.$$

24. Пусть a, b, c — неотрицательные числа. Докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 3(abc)^{4/3} \geq 0.$$

25. Правильный треугольник ABC вписан в окружность единичного радиуса. Точка X лежит на этой окружности.

а) Какое наибольшее значение может иметь произведение расстояний $AX \cdot BX \cdot CX$?

б) Найдите наибольшее и наименьшее значения суммы $AX + BX + CX$.

26 (Всесоюзная олимпиада, 1980 г.). Пусть длины ребер прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c сантиметров ($a < b < c$), $ap = 4(a + b + c)$, $s = 2(ab + bc + ac)$ и $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ — соответственно его периметр, площадь поверхности и длина диагонали. Докажите, что

$$a < \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}p - \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}s} \right), \quad c > \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}p + \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}s} \right).$$

Вневписанная окружность

(Начало см. на с. 34)

Список литературы

1. Р.К.Гордин. *Геометрия. Планиметрия. Задачник для 7–9 классов*. — М.: МЦНМО, 2004.

2. И.А.Кушнир. *Триумф школьной геометрии. Учебное пособие для 7–11 классов*. — Киев: Наш час, 2005.

3. Л.М.Лоповок. *Факультативные задания по геометрии для 7–11 классов*. — Киев: Радянська школа, 1990.

4. *Математические турниры имени А.П.Савина* / Сост. А.В. Спивак, С.И. Токарев: в 2 ч. — М.: Бюро Квантум, 2003 и 2006.

5. *Московские математические регаты* / Сост. А.Д.Блинков, Е.С.Горская, В.М.Гуровиц. — М.: МЦНМО, 2007.

6. Я.П.Понарин. *Элементарная геометрия: в 2 т.* — М.: МЦНМО, 2004 и 2006.

7. В.В.Прасолов. *Задачи по планиметрии: в 2 ч.* — М.: Наука, 1995.

8. В.В.Произволов. *Задачи на вырост*. — М.: Бюро Квантум, 2003.

9. В.Ю.Протасов. *Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха*. «Квант», №4, 2008.

10. И.Ф.Шарыгин, Р.К.Гордин. *Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами*. — М.: Астрель, 2001.

Список веб-ресурсов

1. www.problems.ru — база задач по математике.

2. www.geometry.ru — всероссийская олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.

3. olympiads.mccme.ru/ustn — устные геометрические олимпиады.

Авторы благодарны П.А.Кожевникову и В.Ю.Протасову за ценные замечания по тексту и Е.С.Горской за выполнение чертежей.