

Вписанный угол и ортоцентр.

Докажем несколько ключевых фактов, которые используются в решении многих задач.

Ортоизогональ.

Факт 1. Высоты AA' , BB' и CC' остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . O – центр описанной окружности. Докажите, что: А) $\angle ABO = \angle CBB'$. Б) $BO \perp A'C'$.

Симметрия.

Факт 2. А) Докажите, что точки, симметричные ортоцентру H треугольника ABC относительно сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника.

Б) Докажите, что точки, симметричные ортоцентру H треугольника ABC относительно середин сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника и диаметрально противоположны его вершинам.

Задачи для самостоятельного решения.

1. На окружности фиксированы точки A и B , а точка C перемещается по этой окружности. По какой траектории движется ортоцентр треугольника ABC ?

2. Пусть AA_1 , BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из B на A_1C_1 , из A на B_1C_1 и из C на A_1B_1 пересекаются в одной точке.

3. Высоты AA' и BB' остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка H' симметрична H относительно середины стороны AB . Докажите, что прямые $A'B'$ и CH' перпендикулярны.

4. Пусть AH_1 , BH_2 и CH_3 – высоты остроугольного треугольника ABC , O – центр описанной окружности. Через точки H_1 , H_2 и H_3 проводятся прямые, параллельные соответственно радиусам OA , OB и OC . Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H . Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC , AHB , BHC и AHC равны между собой.

6. Высоты AA' , BB' и CC' треугольника ABC пересекаются в точке H . O – центр описанной окружности, M – середина стороны AB . Докажите, что $OM = \frac{1}{2}CH$.

7. Высоты AA' и BB' остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках P и Q . Докажите, что прямая PQ проходит через ортоцентр треугольника $A'B'C$.

8. Отрезок AD – диаметр описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Через точку H пересечения высот этого треугольника провели прямую, параллельную стороне BC , которая пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEF в два раза больше стороны BC .

9. H – ортоцентр остроугольного треугольника ABC ; D – середина стороны AC . Прямая, проходящая через точку H перпендикулярно отрезку DH , пересекает стороны AB и BC в точках E и F . Докажите, что $HE = HF$.

10. Пусть AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного неравностороннего треугольника ABC .

Окружности ω и ω_1 , описанные около треугольников ABC и A_1B_1C соответственно, вторично пересекаются в точке P . Докажите, что точки M (середина AB), H (ортоцентр) и P лежат на одной прямой.

11. Дана окружность и хорда AB , отличная от диаметра. По большей дуге AB движется точка C . Окружность, проходящая через точки A , C и точку H пересечения высот треугольника ABC , повторно пересекает прямую BC в точке P . Докажите, что прямая PH проходит через фиксированную точку, не зависящую от положения точки C .