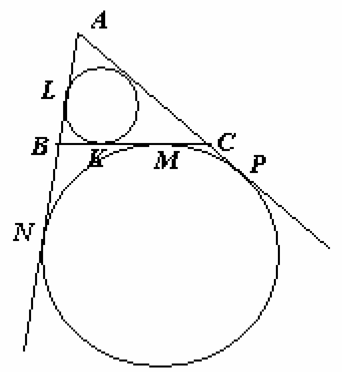
Вневписанная окружность 2. Точки касания.

Определение. ***Окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон, называется вневписанной*** для этого треугольника.

Сколько вневписанных окружностей у любого треугольника? Где лежат их центры? Что является их радиусами?

Базовая задача Окружность касается стороны *BC* треугольника *ABC* в точке *M*, а продолжений сторон *AB* и *AC* – в точках *N* и *P* соответственно. Вписанная в этот треугольник окружность касается стороны *BC* в точке *К*, а стороны *AB* – в точке *L*. Докажите, что:



1) *BK* = *p* – *b*, где *p* – полупериметр треугольника *ABC*, *b* – длина стороны *AC*;
2) *AN* = *p*;
3) *BK* = *CM*, то есть ***точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной треугольника симметричны относительно середины этой стороны***;
4) *NL* = *BC*.

Пример 1. Через данную точку проведите прямую так, чтобы она отсекала от данного угла треугольник с данным периметром.

Пример 2. Дан параллелограмм *ABCD*. Вневписанная окружность треугольника *ABD* касается продолжений сторон *AD* и *AB* в точках *M* и *N*. Докажите, что точки пересечения отрезка *MN* со сторонами *BC* и *CD* лежат на вписанной окружности треугольника *BCD*.

Задачи для самостоятельного решения

0. Прямые PA и PB касаются окружности с центром O (A и B – точки касания). Проведена третья касательная к окружности, пересекающая отрезки PA и PB в точках M и K. Докажите, что периметр треугольника MPK не зависят от выбора третьей касательной.

1. Угол при вершине A треугольника ABC равен $120°$. Окружность касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Докажите, что расстояние от вершины A до центра окружности равно периметру треугольника ABC.

2. Пусть вневписанные окружности треугольника, касающиеся сторон AC и BC, касаются прямой AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что середина стороны AB совпадает с серединой отрезка PQ.

3. $ABCD$ – параллелограмм. Вневписанные окружности треугольников ABC и ACD касаются сторон BC и CD соответственно. Докажите, что точки их касания с прямой AC совпадают.

4. Объясните, как построить треугольник по углу, высоте, проведенной из вершины этого угла, и периметру.

5. Отрезок, отличный от диагонали, разбивает квадрат на два многоугольника, в каждый из которых вписана окружность. Найдите длину отрезка, если радиусы окружностей равны R и r ($R > r$).

6. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1. На сторонах AB и AD выбраны точки P и Q, причём периметр треугольника APQ равен 2. Докажите, что угол PCQ равен $45°$.

7. Объясните, как построить треугольник по стороне, радиусу вписанной окружности и радиусу вневписанной окружности, касающейся этой стороны.

8. В прямоугольном треугольнике с прямым углом A вписанная в него окружность касается сторон AB и BC в точках P и Q. Вневписанная окружность, касающаяся стороны AB, касается продолжения стороны AC в точке R. Докажите, что P, Q и R лежат на одной прямой.

9. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон CA и AB в точках B_1 и C_1, а вневписанная окружность касается продолжения этих сторон в точках B_2 и C_2. Докажите, что середина стороны BC равноудалена от прямых B_1C_1 и B_2C_2.

10. Вневписанная окружность, соответствующая вершине A прямоугольного треугольника ABC (угол B равен $90°$), касается продолжений сторон AB, AC в точках A_1, A_2 соответственно; аналогично определим точки C_1 и C_2. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A, B, C на прямые C_1C_2, A_1C_1, A_1A_2 соответственно, пересекаются в одной точке.