

Угол в квадрате

Задача 1. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно так, что угол MAN равен 45° . Докажите, что расстояние от точки A до прямой MN равно стороне квадрата.

Разберем три способа решения этой задачи (внеписанная окружность, поворот, свертывание)

Упражнения. 1) Докажите, что периметр треугольника CMN равен половине периметра квадрата.

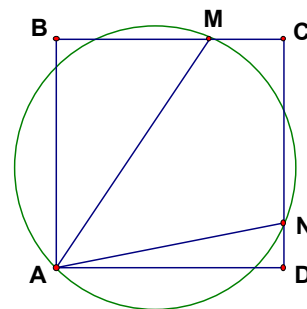
2) Докажите обратное утверждение: если периметр треугольника CMN равен половине периметра квадрата, то угол MAN равен 45° .

Задача 2. В треугольнике ABC угол A равен 45° . Внутри треугольника нашлась такая точка H , что $\angle HBA = \angle HCA = 45^\circ$. Докажите, что:

а) отрезки AH и BC равны и перпендикулярны; б) $S_{ABHC} = \frac{1}{2} AH^2$.

Угол в квадрате

1. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно так, что угол MAN равен 45° . Диагональ BD пересекает AM и AN в точках P и Q соответственно. Докажите, что: а) точки A, B, M, Q (равно как и точки A, D, N, P) лежат на одной окружности; б) общая хорда AE этих окружностей перпендикулярна MN ; в) отрезки MQ, NP и AE пересекаются в одной точке H ; г) четырехугольник $PQNM$ – вписанный; д) $S_{\triangle MAN} = 2S_{\triangle PAQ}$; е) $AH = MN = PQ\sqrt{2}$.



2. В равнобедренном прямоугольном треугольнике BAD на гипотенузе BD выбраны точки P и Q так, что $\angle PAQ = 45^\circ$ (P лежит между B и Q). Докажите, что $PQ^2 = BP^2 + DQ^2$.

3. А) На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно так, что угол MAN равен 45° . Докажите, что центр описанной окружности треугольника MAN лежит на диагонали AC .

Б) Окружность с центром на диагонали AC квадрата $ABCD$ проходит через вершину A и пересекает стороны BC и CD в точках M и N (см.рис). Докажите, что угол MAN равен 45° .

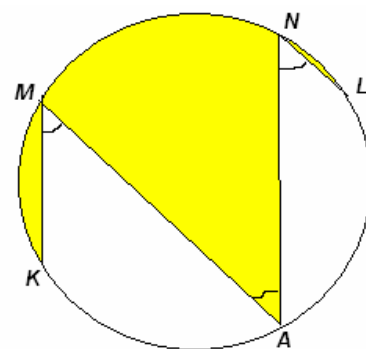
4. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно так, что угол MAN равен 45° . Лучи AM и AN пересекают окружность, описанную около квадрата, в точках M_1 и N_1 соответственно. Докажите, что $M_1N_1 \parallel MN$.

5. На сторонах AB, BC, CD и AD квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки K, M, N и L так, что $\angle KMA = \angle MAN = \angle LNA = 45^\circ$.

А) Докажите, что точки A, K, M, N и L лежат на одной окружности.

Б) Пусть KL пересекает AM и AN в точках F и G соответственно. Докажите, что $S_{\triangle KMF} + S_{\triangle LNG} = S_{\triangle FAG}$.

6. Вершины ломаной $KMANL$ лежат на окружности и $\angle KMA = \angle MAN = \angle LNA = 45^\circ$. Докажите, что: а) площадь закрашенной части равна половине площади круга (см. рисунок); б) $KM^2 + AN^2 = AM^2 + LN^2$.



7. Внутри квадрата $ABCD$ выбраны точки S и T так, что $\angle SAT = \angle SCT = 45^\circ$. Докажите, что $BS \parallel DT$.