Симедиана.

1. Определение.

Рассмотрим треугольник ABC, его медиану AM и его биссектрису AL. Пусть прмая AS симметрична прямой AM относительно прямой AL (точка S лежит на отрезке BC). Тогда отрезок AS называется ***симедианой*** треугольника ABC.

2. Антипараллельность.

Для дальнейшего знакомства с симедианой нам потребуется одно важное понятие.

Пусть точки B_1 и C_1 лежат на прямых AB и AC *(обе на лучах или обе на их продолжениях).* Говорят, что отрезки B_1C_1 *и* BC *антипаралльны (относительно пары прямых* AB *и* AC*, или относительно угла* BAC*)*, если $\angle AC_1B_1 = \angle ABC$. Возможны различные случаи расположения антипараллельных отрезков (см.рисунки 1а - г).

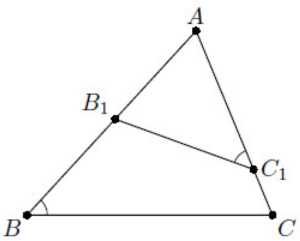

Рис. 1а

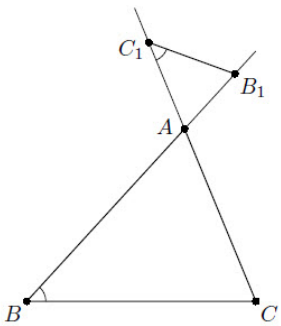

Рис. 1б

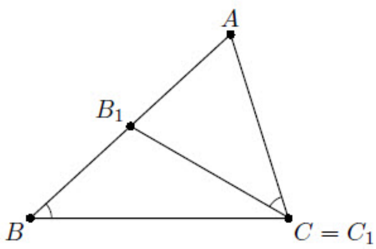

Рис. 1в

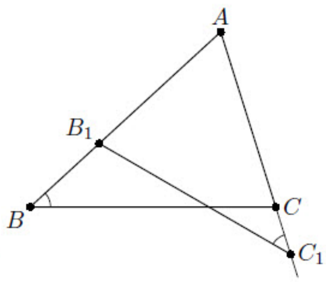

Рис. 1г

Упражнение 1. Докажите, что отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда треугольники ABC и AC_1B_1 подобны (иначе говоря, один из этих треугольников можно перевести в другой, выполнив симметрию относительно биссектрисы угла A и затем гомотетию с центром в точке A).

Упражнение 2. Пусть B_1, C_1, B, C – различные точки. Докажите, что отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда B_1, C_1, B, C лежат на одной окружности.

Упражнение 3. Пусть BB' и CC' – высоты треугольника ABC, M – середина BC. Докажите, что отрезки $B'C'$ и BC антипараллельны, а прямые MB' и MC' являются касательными к окружности, описанной около треугольника $AB'C'$.

Упражнение 4. Пусть B' и C' – точки на прямых AB и AC такие, что отрезки $B'C'$ и BC параллельны. Докажите, что отрезки $B'C'$ и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны.

3. Определение и антипараллельность.

Факт. *В треугольнике* ABC *проведен отрезок* B_1C_1*, антипараллельный стороне* BC*, с концами на прямых* AB *и* AC *соответственно. Прямая* AS *содержит симедиану треугольника* ABC *т. и т. т., когда она делит* B_1C_1 *пополам.*

Разобрать два способа: подобные треугольники или симметрия + гомотетия.

4. Основная задача.

2) ***(Основная задача)*** *Треугольник* ABC *вписан в окружность. Пусть касательные к окружности, проведенные в точках* B *и* C*, пересекаются в точке* P*. Тогда прямая* AP *содержит симедиану треугольника* ABC*.*

Используем ***упражнение 3*** и доказанный ***факт***. Отдельно рассмотрим случай тупоугольного и прямоугольного треугольника.

Симедиана.

1. Докажите, что в неравнобедренном треугольнике одна из симедиан совпадает с высотой т. и т. т., когда этот треугольник – прямоугольный.

2. *(Московская математическая олимпиада 2008)* Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка B_0 – середина стороны AC . Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой A_1C_1.

3. (*Турнир городов 2015*) Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках P и Q. Пусть K и N – середины диагоналей. Докажите, что сумма углов PKQ и PNQ равна 180°.

4. *(Всероссийская олимпиада по математике 1995, 4 этап)* В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность S , пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности S в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения P лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC, проведённую из вершины B.

5. Две окружности пересекаются в точках M и K. Из точки A одной окружности проводятся лучи AM и AK, пересекающие вторую окружность в точках B и C соответственно. Докажите, что медианы всех таких треугольников ABC, проведенные из вершины A, проходят через фиксированную точку.

6. *(Всероссийская олимпиада по геометрии 2012)* Дан треугольник ABC. Касательная в точке C к его описанной окружности пересекает прямую AB в точке D. Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что прямая DK делит отрезок BC пополам.

7. *(Московская устная олимпиада по геометрии 2004)* Треугольник ABC вписан в окружность. Через точки A и B проведены касательные к этой окружности, которые пересекаются в точке P. Точки X и Y — ортогональные проекции точки P на прямые AC и BC. Докажите, что прямая XY перпендикулярна медиане треугольника ABC, проведенной из вершины C.

8. M – середина основания BC равнобедренного треугольника ABC. Точка K внутри треугольника такова, что $\angle ACK = \angle KBC$. Докажите, что $\angle BKM + \angle AKC = 180^\circ$.

9. *(Всероссийская олимпиада по геометрии 2015)* В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA' и BB' пересекаются в точке H, а медианы треугольника AHB пересекаются в точке M. Прямая CM делит отрезок $A'B'$ пополам. Найдите угол C.

10. *(Всероссийская олимпиада по геометрии 2014)* Даны окружность, её хорда AB и точка W – середина меньшей дуги AB. На большей дуге AB выбирается произвольная точка C. Касательная к окружности из точки C пересекает касательные из точек A и B в точках X и Y соответственно. Прямые WX и WY пересекают прямую AB в точках N и M соответственно. Докажите, что длина отрезка NM не зависит от выбора точки C.