

Параллелограмм Вариньона.

Теорема. Середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Упражнения. 1) Определите вид параллелограмма Вариньона, если диагонали четырехугольника: а) равны; б) перпендикулярны.

2) Докажите, что средние линии четырехугольника и отрезок, соединяющий середины его диагоналей пересекаются в одной точке.

Рассмотрим задачи, в которых можно применять эти факты.

Пример 1. Теорема о точке пересечения медиан треугольника.

Пример 2. В выпуклом четырёхугольнике, не являющемся параллелограммом, две противоположные стороны равны. Докажите, что прямая, проходящая через середины его диагоналей, образует равные углы с этими сторонами.

Параллелограмм Вариньона.

1. Определите вид четырёхугольника, вершинами которого служат середины сторон данного: 1) произвольного четырёхугольника; 2) параллелограмма; 3) прямоугольника, 4) ромба; 5) квадрата; 6) трапеции; 7) равнобокой трапеции.

2. Середины сторон выпуклого четырёхугольника являются вершинами квадрата. Обязательно ли исходный четырёхугольник является квадратом?

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны, а отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD , равен 1. Найдите отрезок, соединяющий середины сторон BC и AD .

4. Диагонали четырехугольника равны, а одна из средних линий в два раза меньше. Найдите угол между диагоналями.

5. Пусть P и Q – середины сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$, M и N – середины диагоналей AC и BD . Докажите, что если MN и PQ перпендикулярны, то $BC = AD$.

6. В выпуклом четырёхугольнике прямая, проходящая через середины двух противоположных сторон, образует равные углы с диагоналями четырёхугольника. Докажите, что диагонали равны.

7. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, делят его на четыре четырёхугольника одинакового периметра. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон BC и AD . В каком отношении она делит диагональ BD ?

9. Внутри треугольника ABC взяли произвольную точку M . Середины отрезков AM , BM и CM соединили с серединами сторон BC , AC и AB соответственно. Докажите, что три полученных отрезка пересекаются в одной точке.

10. Постройте выпуклый четырёхугольник, по его сторонам и отрезку, соединяющему середины диагоналей.

11. Дан невыпуклый четырёхугольник, который имеет три внутренних угла по 45° . Докажите, что середины его сторон лежат в вершинах квадрата.

12. Восстановите пятиугольник по серединам его: а) сторон; б) диагоналей.