

Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и ... еще одна точка!

Пусть AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного неравностороннего треугольника ABC .

Окружности ω и ω_1 , описанные около треугольников ABC (O – центр) и A_1B_1C соответственно, вторично пересекаются в точке P .

- Докажите, что: А) точки M (середина AB), H (ортоцентр) и P лежат на одной прямой.
Б) окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 проходят через точку P .
В) PM – биссектриса углов APA_1 и BPB_1 .
Г) прямая PA проходит через точку, симметричную точке A_1 относительно прямой CH .
- Пусть A_1B_1 и AB пересекаются в точке S , R – середина CM . Докажите, что:
А) C , P и S лежат на одной прямой.
Б) прямые SH и CM перпендикулярны.
В) $OR \perp SC$.
- Пусть касательные в точках A и B к окружности ω пересекают прямую A_1B_1 в точках X и Y соответственно и пересекаются в точке Z . Докажите, что:
А) окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 проходят через точки X и Y соответственно.
Б) M – центр вписанной окружности треугольника XYZ .
- Докажите, что прямые MH , A_1B_1 и ZC_1 пересекаются в одной точке.
- Докажите, что прямые AP , BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.
- Докажите, что:
А) точки Z , P и H_c (симметричная H относительно стороны AB), лежат на одной прямой.
Б) описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются в точке P .
- Пусть Q – точка пересечения CZ и ω . Докажите, что точки P , C_1 , Q и середина отрезка MZ лежат на одной прямой.