

Ортоцентр и угол 60° .

Треугольник с углом 60° обладает рядом любопытных свойств и признаков, в том числе связанных с ортоцентром.

1. В треугольнике ABC : O – центр описанной окружности, BB_1 – высота.

Докажите, что $\angle ABO = \angle CBV_1$.

Рассмотрите случай остроугольного и случай тупоугольного треугольника.

2. В треугольнике ABC : O – центр описанной окружности, R – ее радиус, H – ортоцентр.

А) Докажите, что $BH = R$ тогда и только тогда, когда $\angle B = 60^\circ$ или 120° .

Рассмотрите разные случаи.

Б) Докажите, что в первом случае точки O и H симметричны относительно биссектрисы внутреннего угла B треугольника, а во втором – внешнего.

Задачи для самостоятельного решения

Обозначения.

O – центр описанной окружности, R – ее радиус, H – ортоцентр, I – центр вписанной окружности, I_b – центр невписанной окружности, касающейся стороны AC .

1. В треугольнике ABC $\angle ABC = 60^\circ$. А) Докажите, что точки A , O , I , H и C лежат на одной окружности. Рассмотрите случай остроугольного и случай тупоугольного треугольника.

Б) Докажите, что центром этой окружности является точка W (середина дуги AC).

В) Докажите, что $OBHW$ – ромб. Г) Докажите, что O и W симметричны относительно прямой AC .

2. В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$. Докажите, что $IO = IH$ и $I_bO = I_bH$.

3. В остроугольном треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$. Докажите, что прямая OH отсекает от ABC равносторонний треугольник.

4. А) В остроугольном треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$, высоты CE и AD пересекаются в точке H . Докажите, что O лежит на общей биссектрисе углов AHE и CHD .

Б) В остроугольном треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$. Пусть M и N – точки пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AH и CH со сторонами AB и BC соответственно. Докажите, что точки M , N , O и H лежат на одной прямой.

5. В остроугольном треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$, BM – медиана, L – середина OB . Докажите, что $LM \perp OH$.

6. Восстановите треугольник ABC по двум точкам: H и I , если известно, что $\angle B = 60^\circ$, а радиус описанной окружности равен R .

7. В остроугольном треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$. Окружности, описанные вокруг треугольников AHB и CHB , пересекают прямые BC , AB в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что точки A_1 , C_1 и H лежат на одной прямой.

8. А) В остроугольном треугольнике ABC : $\angle B = 60^\circ$, BL – биссектриса. Описанная окружность треугольника BOL пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке D . Докажите, что $BD \perp AC$.

Б) В остроугольном треугольнике ABC : $\angle B = 60^\circ$. Биссектриса BL пересекает описанную окружность в точке W . X – точка пересечения WH и AC . Докажите, что O , L , X и H лежат на одной окружности.

9. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60° . Окружность с центром H и радиусом HV второй раз пересекает прямые BA и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что прямые AN и CM параллельны (или совпадают).

10. В треугольнике ABC : $\angle B = 60^\circ$; $\angle A = 45^\circ$, M – середина BC . Докажите, что прямая MH проходит через середину дуги AC .