

Точка Лемуана.

1. Докажите, что в прямоугольном треугольнике точка Лемуана совпадает с серединой высоты, проведенной к гипотенузе.
2. Докажите, что точка Жергонна треугольника является точкой Лемуана треугольника, образованного точками касания вписанной окружности.
3. Пусть A_1 , B_1 и C_1 — проекции точки Лемуана L треугольника ABC на стороны BC , CA и AB . Докажите, что медиана AM треугольника ABC перпендикулярна прямой B_1C_1 .
4. Через точку X , лежащую внутри треугольника, проведены три отрезка, антипараллельных сторонам треугольника. Докажите, что эти отрезки равны тогда и только тогда, когда X — точка Лемуана этого треугольника.
5. Прямые, содержащие медианы треугольника ABC , вторично пересекают его описанную окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 . Прямые, проходящие через A , B и C и соответственно параллельные противоположным сторонам, пересекают ее же в точках A_2 , B_2 и C_2 . Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.
6. а) Пусть A_1 , B_1 и C_1 — проекции точки Лемуана L треугольника ABC на его стороны. Докажите, что L — точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$.
Указание. Докажите равенство площадей треугольников.
б) Прямые AL , BL и CL , где L — точка Лемуана треугольника ABC , пересекают его описанную окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 . Докажите, что L — точка Лемуана треугольника $A_1B_1C_1$.
в) Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих высот, пересекаются в точке Лемуана этого треугольника.
Указание. Используйте пункт а, проведите одну из медиан и примените свойство изогоналей.
7. а) Через точку Лемуана L проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Докажите, что точки их пересечения со сторонами треугольника лежат на одной окружности (первая окружность Лемуана).
б) Через точку Лемуана L проведены прямые, антипараллельные сторонам треугольника. Докажите, что точки их пересечения со сторонами треугольника лежат на одной окружности (вторая окружность Лемуана).
в) *Окружностью Тукера называется окружность, описанная около шестиугольника Тукера, который может быть построен следующим образом: на стороне BC (или ее продолжении) произвольного треугольника ABC выберем случайным образом некую точку A_1 и из нее проведем антипараллель к стороне AC . Пусть она пересекает сторону AB (или ее продолжение) в некоторой точке C_2 . Из этой точки проведем параллель к BC и отметим точку B_2 ее пересечения с AC . Далее, чередуя антипараллели с параллелями, получим еще три точки на сторонах (или их продолжениях) треугольника ABC , причем шестой шаг обязательно вернет нас в исходную точку A_1 (то есть процесс замыкается на ней). Полученный шестиугольник — шестиугольник Тукера. Около него всегда можно описать окружность (Тукера), а его три антипараллели обязательно равны друг другу (начинать можно и с параллели, затем пойдет антипараллель и т. д.).*
Докажите, что окружности Лемуана — частные случаи окружности Тукера.
8. Другое определение окружности Тукера. *Окружность Тукера треугольника ABC — окружность, которая проходит через точки пересечения сторон треугольника ABC с продолжениями сторон треугольника $A_1B_1C_1$, полученного из треугольника ABC при гомотетии с центром в точке Лемуана.*
А) Докажите эквивалентность определений.
Б) Докажите, что центр окружности Тукера лежит на прямой, проходящей через точку Лемуана и центр описанной окружности.
9. В треугольнике ABC отметили точки A' , B' касания сторон BC , AC с вписанной окружностью и точку G пересечения отрезков AA' и BB' . После этого сам треугольник стерли. Восстановите его с помощью циркуля и линейки.
10. Постройте треугольник по вершине A , центру O описанной окружности и точке Лемуана L .