Дополнительные построения .

Не секрет, что дополнительные построения являются достаточно мощным методом решения как школьных, так и олимпиадных задач.

Пример 1. На медиане *BM* треугольника *ABC* взята точка *P*, такая, что $AP = BC$. Прямая *AP* пересекает отрезок *BC* в точке *D*. Докажите, что $BD = PD$.

Пример 2. Докажите, что если в равнобокой трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то ее высота равна средней линии. (два способа)

Пример 3. *ABCD* – выпуклый четырехугольник, в котором $\angle CAD + \angle BCA = 180^\circ$ и $AB = BC + AD$. Докажите, что $\angle ACD + \angle BAC = \angle CDA$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В трапеции *ABCD* диагонали *AC* и *BD* перпендикулярны. На большем основании *AD* выбрана точка *M* так, что $BM = MD = 3$ см. Найдите длину средней линии трапеции.

2. На плоскости дан треугольник *ABC* и точки *D* и *E* такие, что $\angle ADB = \angle BEC = 90^\circ$. Докажите, что длина отрезка *DE* не превосходит половины периметра треугольника *ABC*.

3. В треугольнике *ABC* точка *D* является серединой стороны *AC*, точка *E* лежит на стороне *BC*, а угол *AEB* равен углу *DEC*. Найдите отношение $AE : ED$.

4. В четырехугольнике *ABCD* углы *A* и *B* – прямые. Известно также, что $CD = AD + BC$. Биссектриса угла *ADC* пересекает *AB* в точке *M*. Найдите угол *CMD*.

5. В выпуклом четырехугольнике *ABCD*: $AD = BC$; $\angle ABD + \angle CDB = 180^\circ$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

6. На стороне *AC* треугольника *ABC* отмечена точка *D*, так, что $AD = AB$; на стороне *AB* отмечена точка *F* так, что середина отрезка *CF* лежит на *BD*. Докажите, что $BF = CD$.

7. В шестиугольнике *ABCDEF*: $\angle B = \angle D = \angle F$, $\angle A = \angle C = \angle E$ и $AB = CD = EF$. Докажите, что $BC = DE = FA$.

8. В треугольнике *ABC* угол *B* равен 20°, угол *C* равен 40°. Биссектриса *AD* равна 2. Найдите разность сторон *BC* и *AB*.

9. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах *AB* и *BC* отмечены точки *M* и *N* так, что $AM = CB$ и $MB = CN$. Докажите, что угол между отрезками *AN* и *CM* равен 45°.

10. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* выполнены соотношения $AB = BD$; $\angle ABD = \angle DBC$. На диагонали *BD* нашлась точка *K* такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KAD = \angle KCD$.

11. Точка *M* взята на стороне *AC* равностороннего треугольника *ABC*, а на продолжении стороны *BC* за вершину *C* отмечена точка *N* так, что $BM = MN$. Докажите, что $AM = CN$.

12. В параллелограмме *ABCD* взята точка Q такая, что $\angle ABQ = \angle ADQ$. Докажите, что $\angle DAQ = \angle DCQ$.

13. В треугольнике *ABC* стороны *AB* и *BC* равны. Точка *D* внутри треугольника такова, что угол *ADC* вдвое больше угла *ABC*. Докажите, что удвоенное расстояние от точки *B* до прямой, делящей пополам углы, смежные с углом *ADC*, равно $AD + DC$.

14. Внутри выпуклого четырёхугольника *ABCD*, в котором $AB = CD$, выбрана точка *P* таким образом, что сумма углов *PBA* и *PCD* равна 180°. Докажите, что $PB + PC < AD$.