

Четырехугольник с перпендикулярными диагоналями.

1. Докажите, что **разность квадратов наклонных равна разности квадратов их проекций**.
 2. Найдите *г.м.т.* M , **разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна**. [прямая, перпендикулярная отрезку, соединяющему эти точки]
 3. Докажите, что **диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противоположных сторон**.
Обратите внимание, что четырехугольник может быть и невыпуклым!
- Пример.** В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны CD . Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM , а через точку M — прямую, перпендикулярную диагонали BD . Докажите, что два проведенных перпендикуляра пересекаются на прямой AD .

Задачи для самостоятельного решения.

0. В четырехугольнике $ABCD$: $AB = BC$, $AD = DC$. Докажите, что прямые AC и BD перпендикулярны.
1. Рассмотрим два различных четырёхугольника с соответственно равными сторонами. Докажите, что если у одного из них диагонали перпендикулярны, то и у другого тоже.
2. Даны четыре палочки и известно, что из них можно составить четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что из них можно составить четырехугольник с двумя прямыми углами.
3. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке, используя свойство и признак четырехугольника с перпендикулярными диагоналями.
4. Докажите, что медианы треугольника ABC , проведенные к сторонам AC и BC , перпендикулярны, тогда и только тогда, когда $AC^2 + BC^2 = 5AB^2$.
5. Дан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$, а углы A и C — прямые. Докажите, что прямые FD и BE перпендикулярны.
6. Докажите, что если четырехугольник с перпендикулярными диагоналями является описанным, то он является дельтоидом (дельтоид — четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, симметричный относительно одной из диагоналей).
7. Через вершины B и C треугольника ABC перпендикулярно прямой BC проведены прямые b и c соответственно. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC пересекают прямые b и c соответственно в точках P и Q . Докажите, что прямая PQ перпендикулярна медиане AM треугольника ABC .
8. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . H — точка пересечения высот. На сторонах AB и BC выбраны точки M и K соответственно так, что угол KMH прямой. Докажите, что из отрезков AK , CM и MK можно сложить прямоугольный треугольник.
9. Четыре перпендикуляра из вершин пятиугольника на противоположные стороны пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый тоже проходит через эту точку.
10. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, I — центр вписанной. Точки A' , B' на лучах BC , AC таковы, что $A'B = AB = AB'$. Докажите, что $A'B' \perp OI$.