Биссектриса делит дугу пополам.

1. Точка *W* (середина дуги).

Рассмотрим треугольник *ABC*. Пусть его биссектриса *BL* пересекает описанную окружность в точке *W* . Докажите, что:

1) *AW* = *CW*.

2) *W* лежит на серединном перпендикуляре к отрезку *AC*.

Заметим, что из данных утверждений следует, что:

А) ***Биссектриса делит дугу пополам***

Б) ***Биссектриса угла неравнобедренного треугольника и серединный перпендикуляр к противолежащей стороне пересекаются на описанной окружности треугольника.***

3) Пусть *I* – центр окружности, вписанной в треугольник *ABC*. Докажите, что *WI* = *WA* = *WC*.

Это утверждение называют иногда леммой о «трезубце».

Следствия.

1. *W* – центр окружности, описанной около треугольника *AIC*.

2. Центр Q вневписанной окружности, касающейся стороны *AC*, лежит на этой окружности.

2. Признак вписанного четырехугольника.

1) Пусть в четырехугольнике ABCD: $AD = DC, \angle ABD = \angle CBD$. Верно ли, что он вписанный?

Нет, достаточно взять два равных треугольника и приложить их друг к другу по равной стороне. А если добавить условие $AB \neq BC$?

Тогда утверждение верно. Заметим, что точка *D* лежит на биссектрисе угла *B* и на серединном перпендикуляре к отрезку *AC*. То есть, по пункту Б она лежит на описанной окружности треугольника *ABC*, что и требовалось. А где использовалось условие $AB \neq BC$?

Итак, мы доказали еще один **признак вписанного четырехугольника.**

Теперь попробуем разобраться, откуда взялась подобная конструкция.

Для этого рассмотрим следующую задачу.

2) В двух треугольниках равны две стороны и угол, противолежащий одной из них. Верно ли, что такие треугольники равны?

Для ответа на данный вопрос рассмотрим задачу на построение треугольника по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них.

Эта задача может иметь два решения. Полное исследование нас не очень интересует, важно, что решений не больше двух.

Заметим, что $\angle ACB + \angle AC_1B = 180^\circ$. Из этого следует, что в задаче ответ такой: **или треугольники равны или углы, противолежащие одной из равных сторон, в сумме дают 180°.**

Приложив их теперь друг к другу, во втором случае получим вписанный четырехугольник.

Пример 1. В треугольнике *ABC* биссектрисы *AD* и *CE* пересекаются в точке *O*; $\angle ABC = 60^\circ$. Докажите, что *OD* = *OE*.

Пример 2.

Докажите, что в любом треугольнике ABC биссектриса AE лежит между медианой AM и высотой AH.

Отметим, что данную задачу можно решить, используя свойства наклонных и проекций. Также следует обратить внимание, что стандартное дополнительное построение для биссектрисы – продлить ее до пересечения с описанной окружностью так же как для медианы – продлить ее на свою длину.

Пример 3.

В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *AD* , *BE* и *CF* , пересекающиеся в точке *I* . Серединный перпендикуляр к отрезку *AD* пересекает прямые *BE* и *CF* в точках *M* и *N* соответственно. Докажите, что точки *A* , *I* , *M* и *N* лежат на одной окружности.

Биссектриса делит дугу пополам.

1. AM – биссектриса треугольника ABC. Точка D принадлежит стороне AC, причём $\angle DMC = \angle BAC$. Докажите, что $BM = MD$.

2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O. Докажите, что CO – биссектриса прямого угла.

3. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, $AB = BC$, DB — биссектриса угла D, $\angle ABC = 100°$, $\angle BEA = 70°$. Найдите угол CAD.

4. Биссектриса AL треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке W. Докажите, что прямая WC касается описанной окружности треугольника ACL.

5. Биссектриса AL треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке W. Окружность с центром W и радиусом WC пересекает сторону AB в точке D. Докажите, что $AD = AC$.

6. Две окружности проходят через вершину угла и точку его биссектрисы. Докажите, что отрезки, высекаемые ими на сторонах угла, равны.

7. Из точки A, расположенной вне окружности, проведены две касательные AM и AN (M и N — точки касания) и секущая, пересекающая окружность в точках P и Q. Пусть L — середина PQ. Докажите, что $\angle MLA = \angle NLA$.

8. AL – биссектриса треугольника ABC , K – точка на стороне AC , причём $CK = CL$. Прямая LK и биссектриса угла B пересекаются в точке P . Докажите, что $AP = PL$.

9. Дан треугольник ABC ($AB > AC$) и описанная около него окружность. Постройте циркулем и линейкой середину дуги BC (не содержащей вершину A), проведя не более двух линий.

10. Объясните, как построить треугольник, если даны: а) точки пересечения описанной около этого треугольника окружности с продолжениями медианы, биссектрисы и высоты, проведенными из одной вершины. б) медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины.

11. Постройте треугольник ABC по его инцентру, середине стороны BC и основанию биссектрисы, проведенной из вершины угла A.

12. На доске была нарисована окружность с отмеченным центром, вписанный в нее четырехугольник, и окружность, вписанная в него, также с отмеченным центром. Затем стерли четырехугольник (сохранив одну вершину) и вписанную окружность (сохранив ее центр). Восстановите какую-нибудь из стертых вершин четырехугольника, пользуясь только линейкой и проведя не более шести линий.

13. Восстановите треугольник по точке пересечения высот и основаниям медианы и биссектрисы, проведенных к одной из сторон.