Антипараллельность.

Определение. Пусть точки B_1 и C_1 лежат на прямых AB и AC соответственно *(или обе на лучах AB и AC или обе на лучах, дополнительных к ним)*. Говорят, что отрезки B_1C_1 и BC *антипараллельны* (относительно пары прямых AB и AC или относительно угла BAC), если $\angle AC_1B_1 = \angle ABC$.

Возможны различные случаи расположения антипараллельных отрезков. *Нарисовать 4 случая.*

Также прямая B_1C_1 может совпасть с касательной в точке A к окружности, описанной около треугольника ABC!

Можно вместо прямых AB и AC рассматривать и параллельные прямые!

Факт 1. Свойство и признак вписанного четырёхугольника. *Пусть B_1 , C_1, B и C — различные точки. Отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда B_1, C_1, B и C лежат на одной окружности.*

Факт 2. *Пусть B_0 и C_0 — такие точки на прямых AB и AC, что отрезки B_0C_0 и BC параллельны. Отрезки B_0C_0 и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны.*

Обратите внимание, что: 1) антипараллельность взаимна; 2) в фактах 1 и 2 речь идет об антипараллельности относительно одной и той же пары прямых! 3) точки выбираются либо обе на лучах AB и AC, либо обе на лучах им дополнительных; 4) вместо отрезков можно говорить про прямые.

Пример 1. Две окружности пересекаются в точках M и K. Через них проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C, а вторую – в точках B и D. Докажите, что (AC) || (BD).

Пример 2. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC параллельна прямой B_1C_1.

Касательная – это антипараллель!

Антипараллельность.

1. Окружность, проходящая через вершины A и B параллелограмма $ABCD$ пересекает его диагонали в точках P и Q. Докажите, что точки P, Q, C и D лежат на одной окружности.

2. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AQ, пересекающие вторую окружность в точках B и C. Докажите, что касательная в точке A к первой окружности параллельна прямой BC.

3. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что касательная в точке K к окружности, описанной около треугольника ABK, параллельна CD.

4. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что касательная в точке A к описанной окружности треугольника AB_1C_1 параллельна прямой BC.

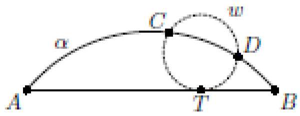
5. Четырёхугольник $ABCD$ – вписанный. На его диагоналях AC и BD отметили точки K и L соответственно так, что $AK = AB$ и $DL = DC$. Докажите, что прямые KL и AD параллельны.

6. Равносторонние треугольники ABC и DFE расположены на плоскости так, что вершина B лежит внутри отрезка DE, а вершина F – внутри отрезка AC. Докажите, что у четырехугольника, вершинами которого являются точки A, C, D и E есть параллельные стороны.

7. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Пусть B_2 и C_2 – основания перпендикуляров, проведенных из точки A_1 к сторонам AC и AB соответственно. Докажите, что прямая B_2C_2 параллельна прямой B_1C_1.

8. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке P. Докажите, что стороны четырехугольника, образованного проекциями точки P на стороны $ABCD$, параллельны сторонам четырехугольника, образованного попарным пересечением касательных в вершинах четырехугольника $ABCD$.

9. На отрезке AB построена дуга α (см. рис.). Окружность ω касается отрезка AB в точке T и пересекает α в точках C и D. Лучи AC и TD пересекаются в точке E, лучи BD и TC – в точке F. Докажите, что прямые EF и AB параллельны.



10. Окружности ω_1, ω_2 с центрами O_1, O_2 соответственно лежат одна вне другой. На этих окружностях взяты точки C_1, C_2, лежащие по одну сторону от прямой O_1O_2. Луч O_1C_1 пересекает ω_2 в точках A_2, B_2, а луч O_2C_2 пересекает ω_1 в точках A_1, B_1. Докажите, что $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$ тогда и только тогда, когда прямая C_1C_2 параллельна O_1O_2.