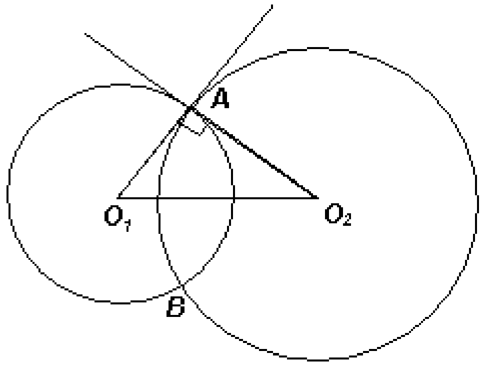
9 класс
2009/10 уч. год
Ортогональные окружности

Изучая инверсию, вы уже сталкивались с понятием ортогональных окружностей. Если окружность инверсии ω задана, то любая окружность, которая при этой инверсии отображается на себя, ортогональна окружности ω.

Вспомним определение: ***две пересекающиеся окружности называются ортогональными, если касательные к ним в точке их пересечения – взаимно перпендикулярны*** (см. рис. 1).

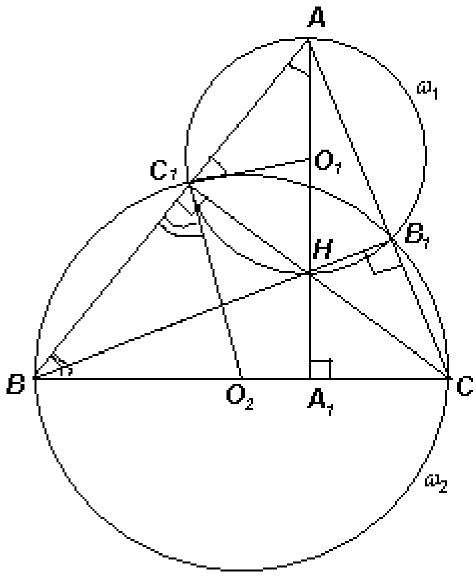


Следствия из определения. Докажите, что:

1) ***Угол между касательными не зависит от выбора точки пересечения***;
2) ***касательная к одной из ортогональных окружностей проходит через центр другой*** (то есть ***отрезок касательной к одной окружности является радиусом другой***);
3) ***две окружности ортогональны т. и т. т., когда их радиусы и расстояние d между центрами связаны соотношением: $d^2 = R^2 + r^2$***.

Рис. 1

4) ***две окружности ортогональны т. и т. т., когда их центры и точки пересечения лежат на одной окружности***.



Ортогональные окружности обладают еще рядом интересных геометрических свойств. Рассмотрим одно из них, а остальные вы осмыслите при решении задач.

Задача. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1, H – ортоцентр треугольника. Окружность ω_1 проходит через точки A, B_1 и C_1, а окружность ω_2 проходит через точки B, C и B_1 (см. рис. 2). Докажите, что окружности ω_1 и ω_2 ортогональны.

Решение. Заметим, что окружность ω_1 проходит также через точку H, а ее центр O_1 – середина отрезка AH. Окружность ω_2 проходит через точку C_1, а ее центр O_2 – середина отрезка BC. Треугольники O_1AC_1 и O_2BC_1 – равнобедренные, поэтому, $\angle AC_1O_1 + \angle BC_1O_2 = \angle A_1AB + \angle A_1BA = 90°$. Следовательно, $\angle O_1CO_2 = 90°$, что и требовалось.

Рис. 2

Обратите внимание, что касательные к окружности ω_1, проведенные в точках B_1 и C_1, пересекаются на прямой, содержащей медиану треугольника ABC, проведенную из вершины A.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Используя ортогональность окружностей в треугольнике ABC (см. рис. 2), докажите: а) теорему об окружности девяти точек; б) формулу $|AH|^2 = 4R^2 - a^2$ (R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC, $a = |BC|$).

2. Две ортогональные окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Точка H лежит на окружности ω_1 внутри окружности ω_2. Лучи AH и BH пересекают окружность ω_2 в точках C и D соответственно. Докажите, что:

а) CD – диаметр окружности ω_2;

б) точка M пересечения прямых BC и AD лежит на окружности ω_1;

в) точка H – ортоцентр треугольника MCD;

г) центр O_1 окружности ω_1 лежит на высоте треугольника MCD.

3. Даны не концентрические окружности ω_1 и ω_2. Найдите геометрическое место центров окружностей ω, ортогональных каждой из данных окружностей. *(Рассмотрите различные случаи взаимного расположения двух данных окружностей*.)

4. В треугольнике ABC проведена высота AA_1. Точки B_1 и C_1 – основания перпендикуляров, опущенных из точки A_1 на стороны AB и BC соответственно. Докажите, что: а) касательные к окружности, описанной около треугольника AB_1C_1, проведенные в точках B_1 и C_1 пересекаются на прямой, содержащей медиану AM треугольника ABC; б)* касательные к окружности, описанной около треугольника ABC, пересекаются на прямой, симметричной AM относительно биссектрисы угла BAC.

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. На продолжении отрезка AA_1 за точку A выбрана точка D так, что $|AD| = |AC_1|$. Прямые DB_1 и DC_1 вторично пересекают окружность в точках B_2 и C_2. Докажите, что B_2C_2 — диаметр окружности.

6. Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой.

А) Постройте окружность, касательные к которой, проведенные из данных точек, имеют длины a, b и c соответственно.

Б) Через каждые две из данных точек проведите окружность так, чтобы построенные окружности были попарно ортогональны.