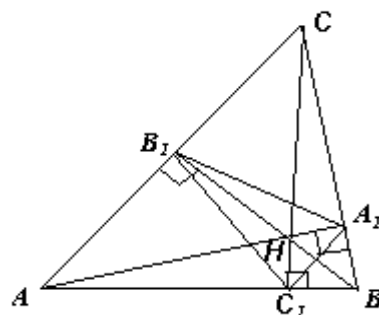


8 класс
2008/09 уч. год

Вспомогательные окружности.

Пример. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 , которые пересекаются в точке H (см. рис.).



А) Найдите на чертеже пять равных острых углов и обоснуйте.

Ответ: например, $\angle CA_1B_1 = \angle CAB = \angle CHB_1 = \angle BHC_1 = \angle BA_1C_1$.

1) Точки A , A_1 , B_1 и B лежат на окружности с диаметром AB (провести). Тогда $\angle CA_1B_1 = 90^\circ - \angle AA_1B_1 = 90^\circ - \angle B_1BA = \angle CAB$.

2) Точки C , A_1 , B_1 и H лежат на окружности с диаметром CH (провести). Тогда $\angle CA_1B_1 = \angle CHB_1$.

В любом из этих пунктов можно также использовать, что прямая CH содержит высоту CC_1 и рассмотреть прямоугольные треугольники CHB_1 и CAC_1 с соответственно равными углами.

3) $\angle CHB_1 = \angle BHC_1$ (вертикальные), $\angle BHC_1 = \angle BA_1C_1$ (точки B , H , A_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BH) или $\angle BA_1C_1 = \angle CAB$ (аналогично п. 1).

Б) Докажите, что точка H – центр окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$.

Из доказанного в пункте А), в частности, следует, что **прямые, содержащие высоты треугольника ABC содержат биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$.**

В) Докажите, что точка C лежит **вне** окружности с диаметром AB , а точка H – **внутри** этой окружности.

Вспомнить доказательство утверждения: **угол AMB , где AB – диаметр окружности,:** а) является острым т. и т. т., когда M лежит вне окружности; б) является тупым т. и т. т., когда M лежит внутри окружности.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Общая гипотенуза AB прямоугольных треугольников ABC и ABD имеет длину 5 см. Найдите наибольшее возможное расстояние между точками C и D .

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и C – тупые. Сравните длины диагоналей AC и BD .

3. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной a . Точка D находится от точки A на расстоянии a . Какие значения может принимать величина угла BDC ?

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 150^\circ$, $\angle C = 45^\circ$ и $AB = BC$. Докажите, что треугольник ABD – равносторонний.

5. Дан квадрат $ABCD$. Луч AE пересекает сторону BC , причем $\angle BAE = 30^\circ$, а $\angle BCE = 75^\circ$. Найдите $\angle CBE$.

6. Равносторонние треугольники ABC и DFE распложены на плоскости так, что вершина B лежит внутри отрезка DE , а вершина F – внутри отрезка AC . Определите вид четырехугольника, вершинами которого являются точки A , C , D и E .

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\angle ABD = \angle CDB = 60^\circ$, $\angle BCA = \angle CAD = 30^\circ$.
Найдите BD , если $AB = 2$ см.