11 класс
2011/12 уч. год
Полувписанная окружность

Продолжим изучение полувписанных окружностей. Для этого нам потребуется вспомнить два полезных факта.

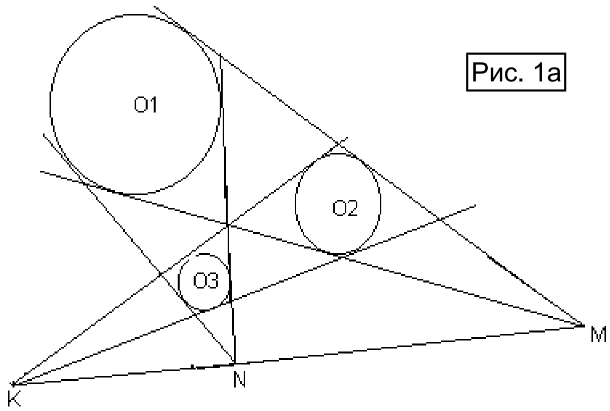


Рис. 1а

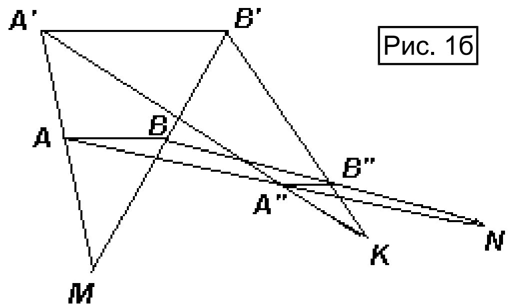
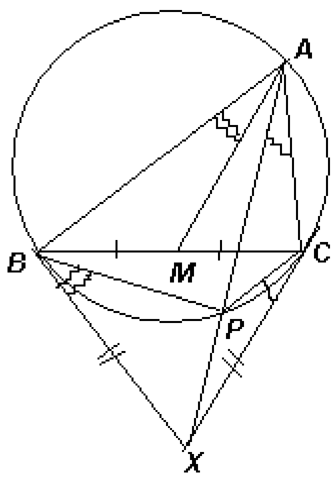


Рис. 1б

1) Что является композицией двух произвольных гомотетий? [Гомотетия или параллельный перенос] Второй случай нас пока не интересует. Пусть $H_{O_1}^{k_1} \circ H_{O_2}^{k_2} = H_O^k$. Что можно сказать о значении *k* и о положении точки *O*? [$k = k_1k_2$, $O \in (O_1O_2)$]. Вспомните задачу, в которой практически была доказана вторая часть этого утверждения. [Задача о касательных к трем окружностям (см. рис. 1а), которую в конце 10 класса мы решили двумя различными способами выхода в пространство] Этот факт можно доказать и по-другому, рассматривая образы двух точек при гомотетии и применяя теорему Дезарга в проективной форме (см. рис. 1б). Действительно, рассмотрим треугольники *AA*'*A*'' и *BB*'*B*''. Так как (*AB*) || (*A*'*B*') || (*A*''*B*''), то точки *M*, *K* и *N* лежат на одной прямой.

Откуда следует утверждение о коэффициенте? [Гомотетия является подобием, а знаки коэффициентов показывают, меняется ли направление отрезка, образ которого рассматриваем] Заметим, что при таком способе доказательства становится понятно, почему композицией двух гомотетий может являться параллельный перенос. В каком случае? [Если k_1k_2 = 1].



2) Второй факт рассматривался в 10 классе на кружке про изогональное сопряжение.

Касательные к описанной окружности треугольника *ABC*, проведенные в точках *B* и *C*, пересекаются в точке *X*. Докажите, что симедиана треугольника лежит на прямой *AX* (см. рис. 2).

Эта задача, помимо прочего, хорошо иллюстрирует тот факт, что геометрические доказательства удобно вести «с конца»!

Доказательство. Пусть *AM* – медиана треугольника ABC, тогда достаточно доказать равенство углов *CAX* и *BAM*. Пусть *AX* вторично пересекает окружность в точке *P*, тогда искомое равенство углов равносильно подобию треугольников *PAC* и *BAM* (так как $\angle APC = \angle ABC$). Это подобие, в свою очередь, равносильно выполнению равенства $\frac{|PA|}{|BA|} = \frac{|PC|}{|BM|} \Leftrightarrow |PA| \cdot \frac{1}{2}|BC| = |AB| \cdot |PC| \Leftrightarrow |PA| \cdot |BC| = 2|AB| \cdot |PC|$. Если сравнить полученное равенство с теоремой Птолемея для четырехугольника *ABPC*, то для станет понятно, что справедливость этого равенства равносильна тому, что $|AB| \cdot |PC| = |AC| \cdot |PB|$ (***такой четырехугольник называется гармоническим***). Последнее равенство следует из двух подобий: $\Delta XAC \sim \Delta XCP$ и $\Delta XAB \sim \Delta XBP$. Тогда $\frac{|AC|}{|CP|} = \frac{|XC|}{|XP|}$ и $\frac{|AB|}{|BP|} = \frac{|XB|}{|XP|}$. Так как $|XB| = |XC|$, то $\frac{|AC|}{|CP|} = \frac{|AB|}{|BP|} \Leftrightarrow |AB| \cdot |PC| = |AC| \cdot |PB|$, что и требовалось.

Рис. 2

Задачи для самостоятельного решения

Треугольник *ABC* вписан в окружность ω. Окружность ω_1 касается сторон *AB* и *AC* в точках *K* и *L* соответственно и дуги *BC* в точке T_A. Лучи T_AK и T_AL пересекают окружность ω в точках *C*' и *B*' соответственно. Точка *W* – середина дуги *BC*, не содержащей точку T_A. Докажите, что:

1) (T_AA) содержит симедиану треугольника $B'C'T_A$;

2) (AT_A), (BT_B) и (CT_C), где T_B и T_C – точки касания двух других полувписанных окружностей треугольника *ABC* с его описанной окружностью ω, пересекаются в одной точке и объясните, что это за точка;

3) (T_AW) содержит медиану треугольника $B'C'T_A$;

4) Центр *I* окружности, вписанной в треугольник *ABC*, лежит на (T_AW);

5) Точки T_A, *B*, *K* и *I* (а также точки T_A, *C*, *L* и *I*) лежат на одной окружности;

6) (*CC*') и (*BB*') соответственно являются касательными к этим окружностям;

7) Точка *I* – середина [*KL*].