11 класс
2011/12 уч. год
Непрерывность в геометрии

Сегодня мы займемся применением непрерывности в геометрических задачах. Применение непрерывности в алгебре – дело обычное. Вспомните типы алгебраических задач, в которых применяется непрерывность функций [решение неравенств методом интервалов, поиск экстремальных значений или множества значений функции, экстремальные задачи различного содержания, и так далее].

Вспомним определение непрерывности функции в точке и на интервале.

1) **Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. 2) **Функция f(x) непрерывна на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.**

В геометрии непрерывность функции чаще всего удобно обосновывать не по определению, а используя ***признак и свойство непрерывной функции***: ***f(x) – непрерывна в точке x_0 т. и т. т., когда для ее приращения в этой точке выполняется равенство*** $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x) = 0$. Иначе говоря, функция непрерывна на некотором промежутке, если при малых изменениях аргумента мало изменяются значения функции.

Для каких геометрических задач удобно использовать непрерывность? Для доказательства утверждений, связанных с существованием каких-либо геометрических объектов. Какие свойства непрерывных функций при этом используются? Те же, что и в алгебраических задачах, а именно, используются теорема о промежуточном значении непрерывной функции, ее частный случай – теорема об обращении непрерывной функции в ноль, а иногда – обобщение этого частного случая: ***пусть имеются две непрерывные функции f(x) и g(x), для которых существую такие x_1 и x_2, что $f(x_1) > g(x_1)$, а $f(x_2) < g(x_2)$, то существует такое $x_0 \in [x_1; x_2]$, что $f(x_0) = g(x_0)$.***

Кроме того, иногда используется, что функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем экстремальные значения и все промежуточные значения от наименьшего до наибольшего.

Рассмотрим примеры применения непрерывности.

<u>Пример 1</u>. Докажите, что в любую треугольную пирамиду можно вписать сферу.

<u>Решение</u>. В пирамиде *PABC* проведем биссекторы двугранных углов *PA* и *PB* (см. рис. 1). Любая точка *O* прямой *PD* их пересечения равноудалена от плоскостей *PAB*, *PAC* и *PBC*. Рассмотрим зависимости расстояний от точки *O* до плоскости основания *ABC* и до плоскостей боковых граней от расстояния *PO* = *x*, обозначив их через $r_1(x)$ и $r_2(x)$ соответственно. При малых изменениях значения *x* значения $r_1(x)$ и $r_2(x)$ изменяются мало, поэтому обе функции – непрерывные, следовательно непрерывна и функция $f(x) = r_1(x) - r_2(x)$. Если точка *O* лежит внутри пирамиды близко от вершины *P*, то $r_1 > r_2$, а если эта точка близка к основанию, то $r_1 < r_2$. Тем самым существует значение *x*, для которого $f(x) > 0$, и значение *x*, для которого $f(x) < 0$. Значит, по теореме об обращении в ноль непрерывной функции, найдется значение *x*, для которого $f(x) = 0$. В этом случае точка *O* лежит внутри пирамиды и равноудалена от всех ее граней, значит, существует сфера с центром в этой точке, касающаяся каждой грани – сфера, вписанная в треугольную пирамиду.

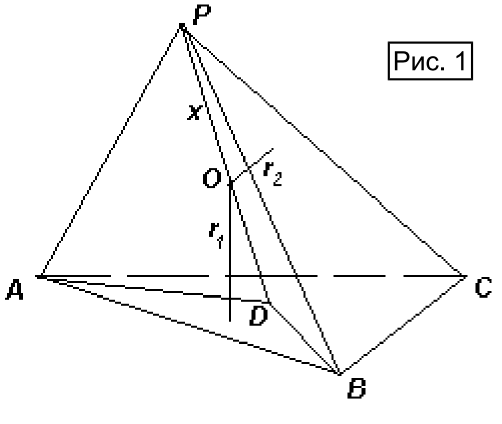


Рис. 1

Заметим, что эту задачу можно решить иначе, не используя непрерывность. А как? [Используя гомотетию]

Пример 2. Дан шарнирный четырехугольник (длины его сторон и их порядок – зафиксирован, а углы могут меняться). Докажите, что существует такое положение этого четырехугольника, при котором он вписан в окружность.

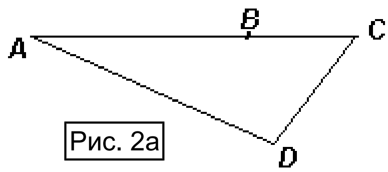


Рис. 2а

Решение. Сначала покажем применение более стандартного алгоритма, который, в данном случае, реализовать несколько сложнее, а затем обсудим другой подход.

Первый способ. Заметим, что четырехугольник *ABCD* однозначно определяется длиной любой из его диагоналей. Без ограничения общности, можно считать, что $AB + BC \le CD + DA$. Рассмотрим такое положение четырехугольника, при котором вершина *B* лежит на диагонали *AC* (четырехугольник «вырождается» в треугольник *ACD*, см. рис. 2а). В этом случае $\varphi = \angle ABC + \angle ADC > 180^\circ$, а длина $AC = x$ – наибольшая. Будем постепенно уменьшать длину *AC* (сохраняя выпуклость четырехугольника) до тех пор, пока не получим другое «вырожденное» положение *ABCD*: вершина *A* или вершина *C* окажется на диагонали *BD* (в зависимости от того, какая из сумм меньше: $AB + AD$ или $CB + CD$). В этом положении $\varphi = \angle ABC + \angle ADC < 180^\circ$ (см. рис. 2б).

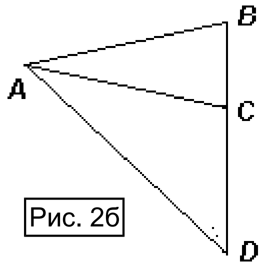
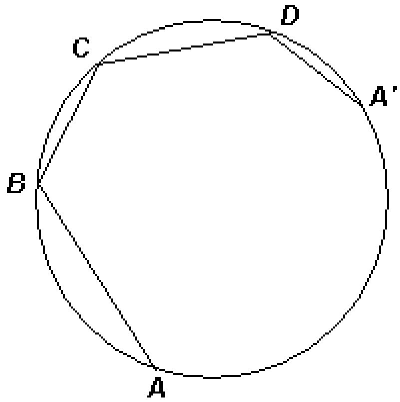


Рис. 2б

При малых изменениях длины *AC* сумма углов *ABC* и *ADC* также мало изменяется, поэтому зависимость $\varphi(x)$ является непрерывной функцией. Значит, существует такое положение данного четырехугольника, при котором $\varphi = 180^\circ$, то есть *ABCD* – вписанный, что и требовалось.

Отметим, что при рассмотрении шарнирных многоугольников принято рассматривать и многоугольники, ограниченные самопересекающейся ломаной, но в данном случае они нас интересовать не могут.



Второй способ. Без ограничения общности, можно считать, что *AB* – наибольшая сторона данного четырехугольника. Рассмотрим окружность достаточно большого радиуса (точнее, $R > \frac{P_{ABCD}}{2\pi}$), отметим на ней точку *A* и последовательно отложим стороны четырехугольника в виде вписанной ломаной (см. рис. 2в).

Далее, будем постепенно уменьшать радиус окружности, сближая точки *A* и *A*'. Возможны два случая: 1) точки *A* и *A*' совпадут, то есть ломаная «замкнется», тогда полученный четырехугольник и будет искомым; 2) ломаная займет положение, при котором отрезок *AB* станет диаметром окружности, но при этом еще не «замкнется». Тогда начнем постепенно увеличивать радиус окружности, зафиксировав на ней точку *B*, и опять-таки сближая точки *A* и *A*' до тех пор, пока ломаная не «замкнется».

Рис. 2в

При таком способе решения мы используем непрерывность линий: ломаной и окружности, а также непрерывность траекторий «перемещения точек».

Второй способ решения позволяет обобщить утверждение задачи на любой шарнирный многоугольник. Можно также доказать, что искомый многоугольник является единственным. Кроме того, среди всех шарнирных многоугольников с фиксированными сторонами (и порядком сторон), вписанный многоугольник имеет наибольшую площадь. Действительно, рассмотрим площадь вписанного многоугольника и площади сегментов описанного около него круга, отсекаемых *сторонами многоугольника. Пусть существует шарнирный многоугольник большей площади, тогда «приклеив» к его сторонам эти же сегменты, получим фигуру большей площади с тем же периметром. Но из всех фигур с одним и тем же периметром наибольшую площадь имеет круг – противоречие.*

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что любую выпуклую ограниченную плоскую фигуру можно разбить на две равновеликие фигуры: а) прямой, параллельной заданной; б) прямой, проходящей через заданную точку.

2. Можно ли в окружность радиуса 1 вписать треугольник периметра 5?

3. Существует ли правильная треугольная пирамида, у которой двугранный угол при боковом ребре равен $75°$?

4. Докажите, что вектор длины 1 можно разложить на две составляющие, каждая из которых имеет длину 100.

5. В пространстве дан произвольный угол *A*. Докажите, что найдется такая плоскость α, что проекцией угла *A* на α является угол величины φ, где φ принимает любое заранее заданное значение от 0 до $180°$.

6. Периметр выпуклого четырехугольника равен 2004, одна из его диагоналей равна 1001. Может ли вторая диагональ быть равна: а) 1001; б) 2?

7. Основанием пирамиды служит выпуклый четырехугольник. Обязательно ли существует сечение этой пирамиды, не пересекающее основания и являющееся вписанным четырехугольником?