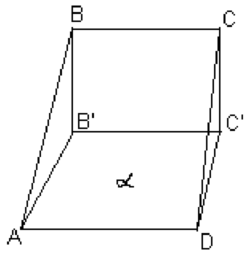
10 класс
2010/11 уч.год
Аффинная геометрия

На уроках мы определяли параллельное проектирование как отображение пространства на плоскость. Были доказаны три основных свойства параллельного проектирования для прямых, не параллельных проектирующей прямой. Вспомним их:

1) Проекция прямой есть прямая, а проекция отрезка – отрезок.

2) Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.

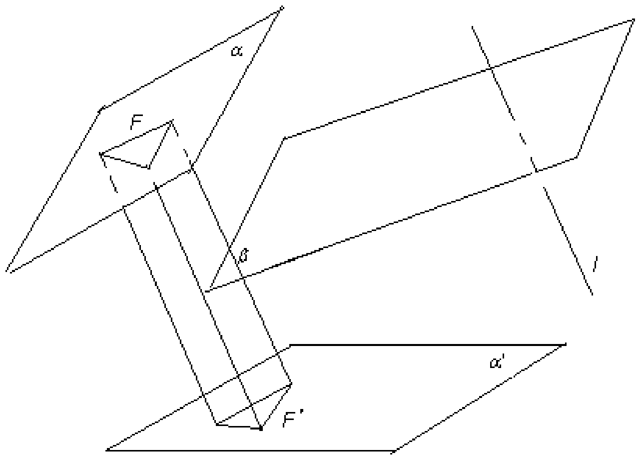
3) При параллельном проектировании сохраняется отношение длин параллельных отрезков или отрезков, лежащих на одной прямой.



Если сузить область определения такого отображения и рассматривать проектирование плоскости на плоскость, то эти свойства, очевидно, сохранятся. Кроме того, существует еще одно важное свойство параллельного проектирования, которое мы пока не можем доказать строго, так как еще не определяли угол между плоскостями. При этом, рассматривая ортогональное проектирование (как частный случай параллельного), на примере проектирования прямоугольника *ABCD* на плоскость α, содержащую сторону *AB*, мы получили, что $\frac{S_{AB'C'D}}{S_{ABCD}} = \cos\angle BAB'$ (см. рис. 1а). Впоследствии мы докажем, что для любых плоских фигур отношение площадей ортогональной проекции фигуры и самой фигуры равно косинусу угла между плоскостями, в которых лежат эти фигуры. Это, в свою очередь, позволяет обосновать еще одно важное свойство параллельного проектирования.

Рис. 1а

4) Параллельное проектирование плоскости на плоскость сохраняет отношение площадей фигур.



Пусть фигура *F*, лежащая в плоскости α, проектируется в направлении прямой *l* на плоскость α' и ее образом является фигура *F'* (см. рис. 1б). Проведем тогда плоскость β, перпендикулярную прямой *l* и рассмотрим ортогональные проекции фигур *F* и *F'* на плоскость β. Эти проекции совпадут, поэтому $S_F \cdot \cos\angle(\alpha;\beta) = S_{F'} \cdot \cos\angle(\alpha';\beta)$.

Следовательно, $\frac{S_F}{S_{F'}} = \frac{\cos\angle(\alpha';\beta)}{\cos\angle(\alpha;\beta)}$. Для любой другой фигуры $\varPhi$, лежащей в плоскости α, отношение $\frac{S_\varPhi}{S_{\varPhi'}}$ будет таким же, значит, $\frac{S_\varPhi}{S_F} = \frac{S_{\varPhi'}}{S_{F'}}$, что и требовалось.

Рис. 1б

Заметим теперь, что рассмотренные свойства сохранятся и для композиции нескольких параллельных проектирований. ***Параллельное проектирование***

плоскости на плоскость, а также композиции таких отображений называются аффинными отображениями. В частности, можно рассмотреть аффинное отображение плоскости на себя или, иначе говоря, ***аффинное преобразование плоскости***. Оно обладает всеми свойствами параллельного проектирования. Если рассматривать сохранение прямолинейности, взаимного расположения точек на прямой, параллельности и длин параллельных отрезков, а также отношения площадей фигур как основные ***инварианты аффинных преобразований плоскости***, то теория таких инвариантов и называется ***аффинной геометрией***.

Свойство фигуры относится к аффинной геометрии (и называется ***аффинным***), если оно не изменяется при любом аффинном преобразовании. Фигура называется аффинной, если в ее определении присутствуют только аффинные инварианты. Например, ***аффинными фигурами*** являются параллелограмм, трапеция, многоугольник (треугольник). Частные случаи треугольников и параллелограммов не являются аффинными фигурами, так как требуют равенства непараллельных отрезков или равенства углов (и то, и другое не является аффинным инвариантом). Окружность – также не аффинная фигура, так как ее проекцией является эллипс (а эллипс – аффинная фигура!). Можно выделить также теоремы, справедливые в аффинной геометрии, например: теорема Фалеса и теорема о пропорциональных отрезках, теоремы о средней линии треугольника и трапеции, теорема о точке пересечения медиан треугольника, теорема о точке пересечения диагоналей параллелограмма, теорема Менелая, и пр.

По аналогии с равными и подобными фигурами определяется понятие аффинно эквивалентных фигур. ***Две фигуры называются аффинно эквивалентными, если существует аффинное преобразование, переводящее одну из этих фигур в другую.*** Например: 1) правильный треугольник аффинно эквивалентен любому треугольнику (вспомните, мы доказывали на уроке, что для любых двух треугольников существует параллельное проектирование, при котором один из треугольников отображается в другой); 2) квадрат, ромб или прямоугольник аффинно эквивалентны любому параллелограмму; 3) любые трапеции с одинаковым отношением оснований аффинно эквивалентны.

Как решать геометрические задачи с помощью аффинных преобразований? Во-первых, этот метод применим ***только*** к решению таких задач, в которых используются ***только аффинные свойства фигур***. С помощью аффинных преобразований, задача сводится к более простой за счет замены данной фигуры на ей аффинно эквивалентную, для которой решение осуществить проще. Полученный результат остается справедлив и для исходной фигуры (в силу аффинной эквивалентности фигур).

<u>Пример 1</u>. Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

<u>Решение</u>. Рассмотрим равнобокую трапецию, которая аффинно эквивалентна произвольной. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и точку пересечения продолжений боковых сторон является осью симметрии этой трапеции (*изобразить*), поэтому, она проходит через середины оснований.

Какие способы доказательства этого факта вы уже знали? [С помощью гомотетии и с помощью векторов] И это не случайно. 1) Легко проверить, что любое ***преобразование подобия*** (в том числе все виды движений и гомотетия) ***является частным случаем аффинных преобразований***. 2) Изучая векторы на плоскости, мы даже рассматривали аффинную (косоугольную) систему координат. Как она задавалась? [Двумя неколлинеарными векторами с общим началом, которые назывались ***базисными***] Любой вектор в такой системе координат единственным образом выражается через базис с помощью ***линейных*** операций: ***сложения векторов, их вычитания и умножения вектора на число***. В отличие от декартовой системы координат, аффинная не требует ***метрики***, то есть угол между осями координат не фиксируется. Поэтому, задачи, связанные с коллинеарностью точек и с отношением длин отрезков, лежащих на одной прямой, часто решаются с помощью линейных операций над векторами.

Пример 2. Три параллелограмма: *ABCD*, *ADEF* и *CDEP* расположены на плоскости так, что образуют шестиугольник *ABCPEF* (см. рис. 2). В этом шестиугольнике проведены все малые диагонали. Они ограничивают новый шестиугольник. Найдите отношение площадей этих шестиугольников.

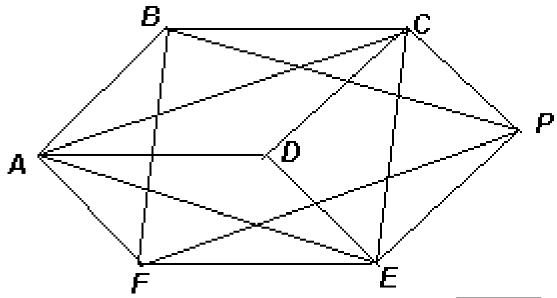


Рис. 2

Решение. Из условия задачи следует, что в данном шестиугольнике противолежащие стороны параллельны и равны. Следовательно, он аффинно эквивалентен правильному шестиугольнику (*изобразить*). Проведем малые диагонали правильного шестиугольника, тогда ограниченный ими шестиугольник также является правильным, а его сторона в три раза меньше, чем малая диагональ исходного (это можно доказать либо с помощью поворота вокруг центра шестиугольника на $60°$, либо непосредственным счетом углов и рассмотрением равносторонних треугольников). Пусть сторона исходного шестиугольника равна *a*, тогда его малая диагональ равна $a\sqrt{3}$, а сторона нового шестиугольника равна $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Следовательно, площадь нового шестиугольника в **три раза** меньше площади исходного.

Задачи для самостоятельного решения

1. Существует ли пятиугольник, отличный от правильного, в котором: а) каждая диагональ параллельна противолежащей стороне; б) точки попарного пересечения диагоналей образуют пятиугольник, подобный данному?

2. В трапеции *ABCD* через вершины *B* и *C* меньшего основания провели прямые, соответственно параллельные *CD* и *AB*. Докажите, что: а) точка пересечения этих прямых лежит на прямой, проходящей через середины оснований; б) отрезок, соединяющий точки пересечения этих прямых с диагоналями трапеции, параллелен основаниям.

3. В параллелограмме *ABCD* прямая, параллельная *AB*, пересекает сторону *BC* и диагональ *AC* в точках *N* и *K* соответственно. Докажите, что треугольники *ADK* и *ABN* равновелики.

4. Через точку *P*, лежащую внутри треугольника *ABC*, проведены три прямые, параллельные сторонам *AB*, *BC* и *CA* и пересекающие стороны *BC*, *AC* и *AB* соответственно в точках *A*', *B*' и *C*'. Докажите, что $\frac{|PA'|}{|AB|}+\frac{|PB|'}{|BC|}+\frac{|PC'|}{|CA|}$ = 1.

5. Точки *M* и *N* – середины сторон *BC* и *CD* параллелограмма *ABCD* соответственно. Отрезки *AM* и *BN* пересекаются в точке *P*. Найдите, в каких отношениях точка *P* делит эти отрезки.

6. Каждая сторона треугольника разделена на три равные части и проведены все чевианы, соединяющие вершины с точками деления на противолежащей стороне. Докажите, что в шестиугольнике, образованном этими прямыми, большие диагонали пересекаются в одной точке.

7. Точки *K*, *N* и *P* расположены на сторонах *AB*, *BC* и *CA* треугольника *ABC* соответственно так, что $\frac{|AK|}{|KB|}=\frac{|BN|}{|NC|}=\frac{|CP|}{|PA|}$. Докажите, что совпадают точки пересечения медиан треугольников: а) *ABC* и *KNP*; á) *ABC* и треугольника, образованного прямыми *AN*, *BP* и *CK*.

8. На сторонах *AB*, *BC* и *CA* треугольника *ABC* выбраны точки *K*, *N* и *P*. Точки *K*', *N*' и *P*': а) симметричны точкам *K*, *N* и *P* относительно середин этих сторон; б) лежат на сторонах треугольника *ABC* так, что (*KK*') || (*BC*), (*NN*') || (*CA*) и (*PP*') || (*AB*). Докажите, что треугольники *KNP* и *K'N'P*' равновелики.

9. Докажите, что площадь овала, ограниченного эллипсом с полуосями длины *a* и *b*, можно вычислить по формуле $S = \pi ab$.