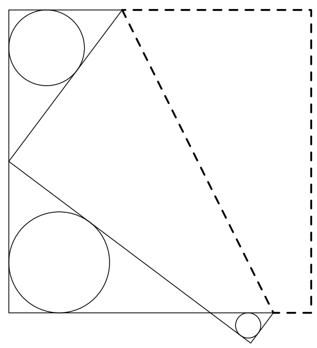
VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 8 класс

Ратмино, 31 июля 2012 г.

1. Точка M — середина основания AC остроугольного равнобедренного треугольника ABC. Точка N симметрична M относительно BC. Прямая, параллельная AC и проходящая через точку N, пересекает сторону AB в точке K. Найдите угол AKC.

2. В треугольнике ABC провели биссектрисы BB' и CC', а затем стёрли весь рисунок, кроме точек A, B' и C'. Восстановите треугольник ABC при помощи циркуля и линейки.

3. Квадратный лист бумаги согнули по прямой так, что одна из вершин квадрата оказалась на несмежной стороне (см. рисунок). При этом образовалось три треугольника. В эти треугольники вписали окружности. Докажите, что радиус одной из этих окружностей равен сумме радиусов двух других.



4. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle B = 120°$. На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяли точки P и Q соответственно так, что угол между лучами AQ и CP прямой. Докажите, что $\angle PQB = 2\angle PCQ$.

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс

Ратмино, 31 июля 2012 г.

1. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1 и BB_1, которые пересекаются в точке O. Затем провели высоту A_1A_2 в треугольнике OBA_1 и высоту B_1B_2 в треугольнике OAB_1. Докажите, что отрезок A_2B_2 параллелен стороне AB.

2. Через вершины A, B, C треугольника ABC проведены три параллельные прямые, пересекающие вторично описанную около него окружность в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 симметричны точкам A_1, B_1, C_1 относительно сторон BC, CA, AB соответственно. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

3. В треугольнике ABC провели биссектрису CL. В треугольники CAL и CBL вписали окружности, которые касаются прямой AB в точках M и N соответственно. Затем все, кроме точек A, L, M и N, стерли. С помощью циркуля и линейки восстановите треугольник.

4. При каких $n > 3$ правильный n-угольник можно разрезать диагоналями (возможно, пересекающимися внутри него) на равные треугольники?

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс

Ратмино, 31 июля 2012 г.

1. При каких n можно оклеить в один слой поверхность клетчатого куба $n \times n \times n$ бумажными прямоугольниками 1×2 так, чтобы каждый прямоугольник граничил по отрезкам сторон ровно с пятью другими?

2. Точку внутри треугольника назовем *хорошей*, если длины проходящих через нее чевиан обратно пропорциональны длинам соответствующих сторон. Найдите все треугольники, для которых число хороших точек — максимальное возможное.

3. Пусть M и I — точки пересечения медиан и биссектрис неравнобедренного треугольника ABC, а r — радиус вписанной в него окружности. Докажите, что $MI = r/3$ тогда и только тогда, когда прямая MI перпендикулярна одной из сторон треугольника

4. Дан квадрат. Найдите геометрическое место середин гипотенуз прямоугольных треугольников, вершины которых лежат на попарно различных сторонах квадрата и не совпадают с его вершинами.