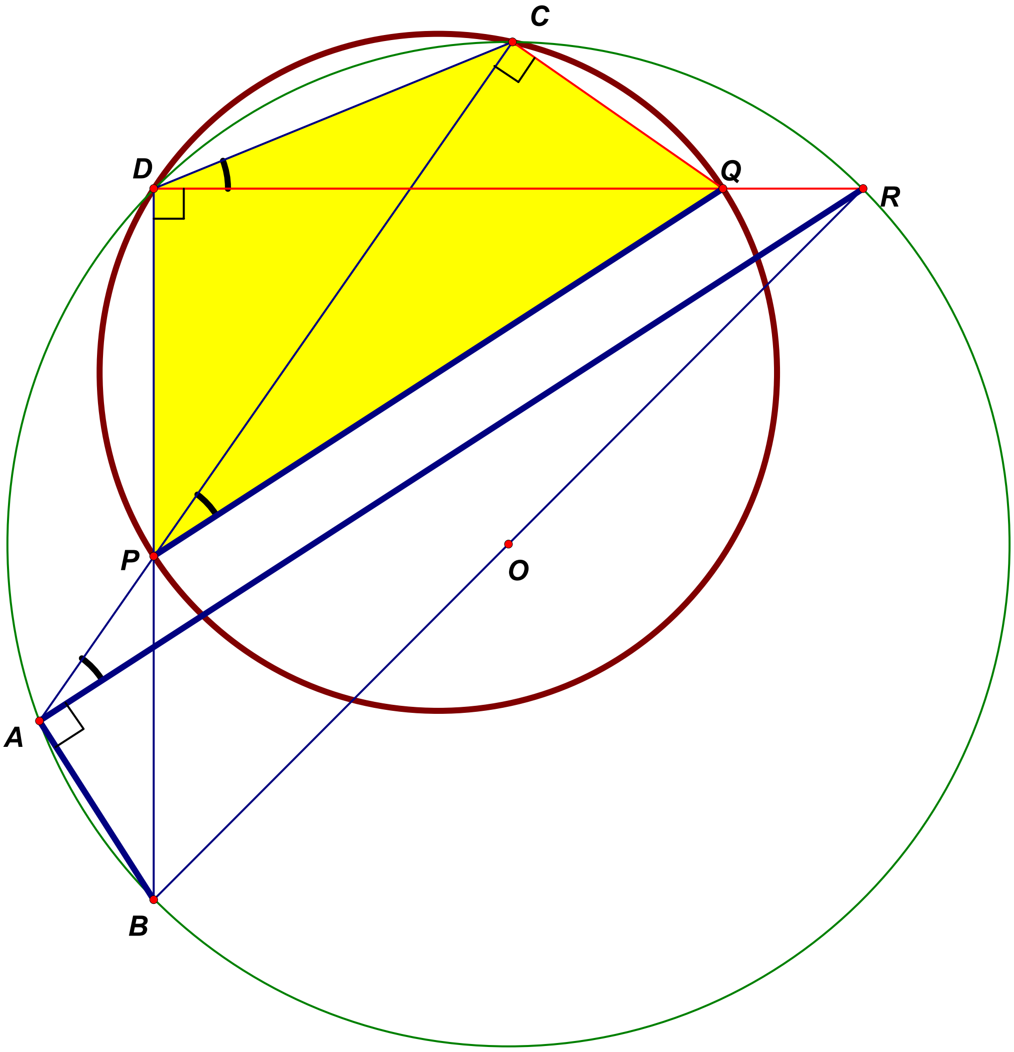
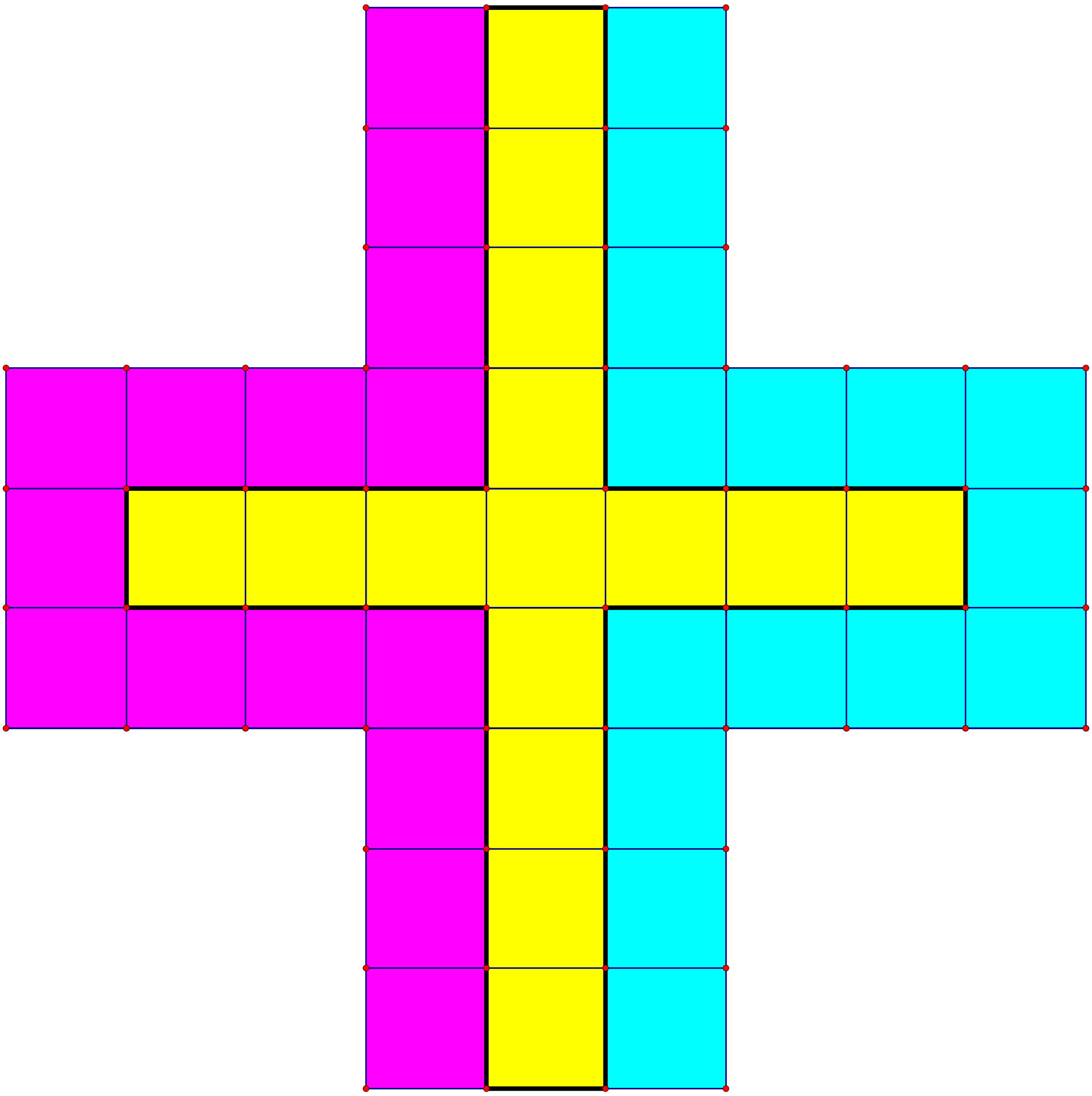
Задача 1. (А.Заславский)
Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке P. Перпендикуляры к AC и BD ,в точках C и D соответственно, пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые AB и PQ перпендикулярны.
Решение.

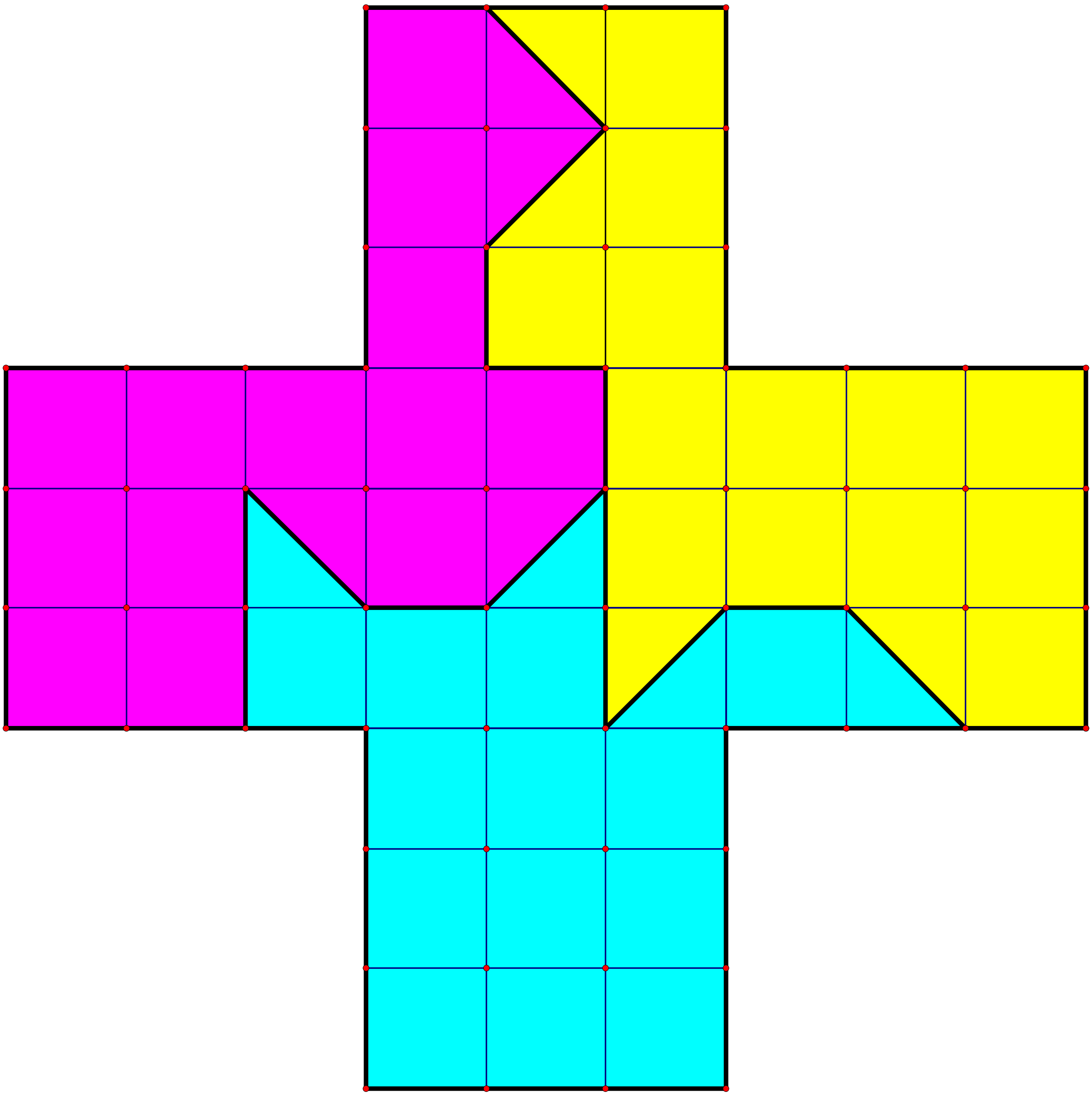


Пусть перпендикуляры пересекаются внутри окружности (случай внешней точки рассматривается аналогично). Отметим точку R – вторую точку пересечения прямой DQ с окружностью.
Четырехугольник $PDCQ$ вписан в окружность (он образован двумя прямоугольными треугольниками с общей гипотенузой PQ), поэтому $\angle CDQ = \angle CPQ$, как опирающиеся на одну дугу. По этой же причине $\angle CDQ = \angle CDR = \angle CAR$, и, значит, прямые PQ и AR параллельны (соответственные углы равны).
Но BR является диаметром, как следует из условия, поэтому $\angle BAR = 90^0$.

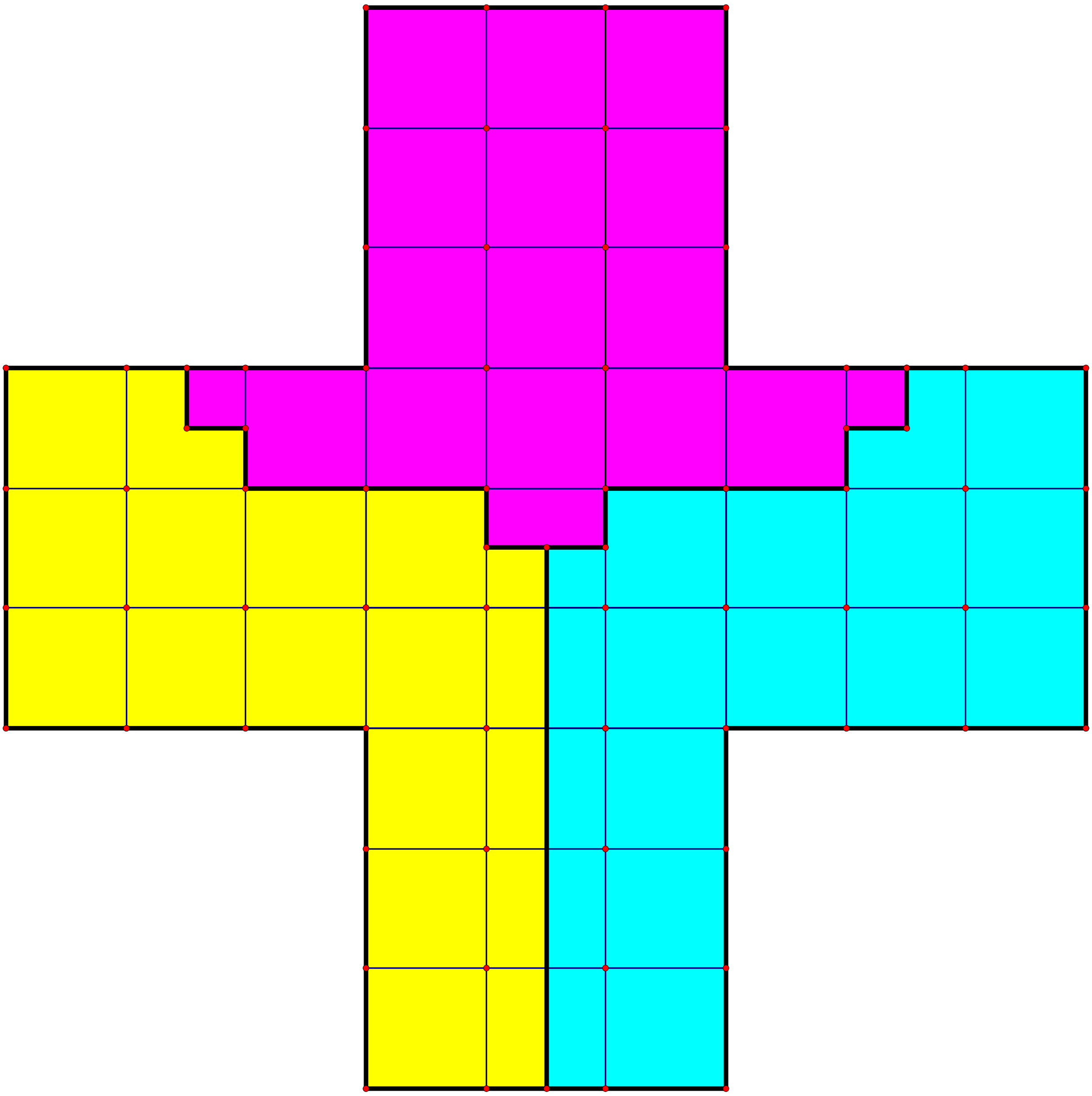
Задача 2. (Л.Емельянов)
Разрежьте крест, составленный из пяти одинаковых квадратов, на три многоугольника, равных по площади и периметру.
Решение:
Приведем некоторые из возможных разрезаний.



(*Дарбинян Артур*, г. Ереван, Физмат.школа г. Еревана)



(*Бородулин Игорь,* г. Екатеринбург, гимназия № 9)



(*Макарец Александр,* г. Харьков, ФМШ № 27)

Задача 3. (В.Протасов)

Дана окружность и точка К внутри нее. Произвольная окружность, равная данной и проходящая через точку К, имеет с данной окружностью общую хорду. Найдите геометрическое место середин этих хорд.

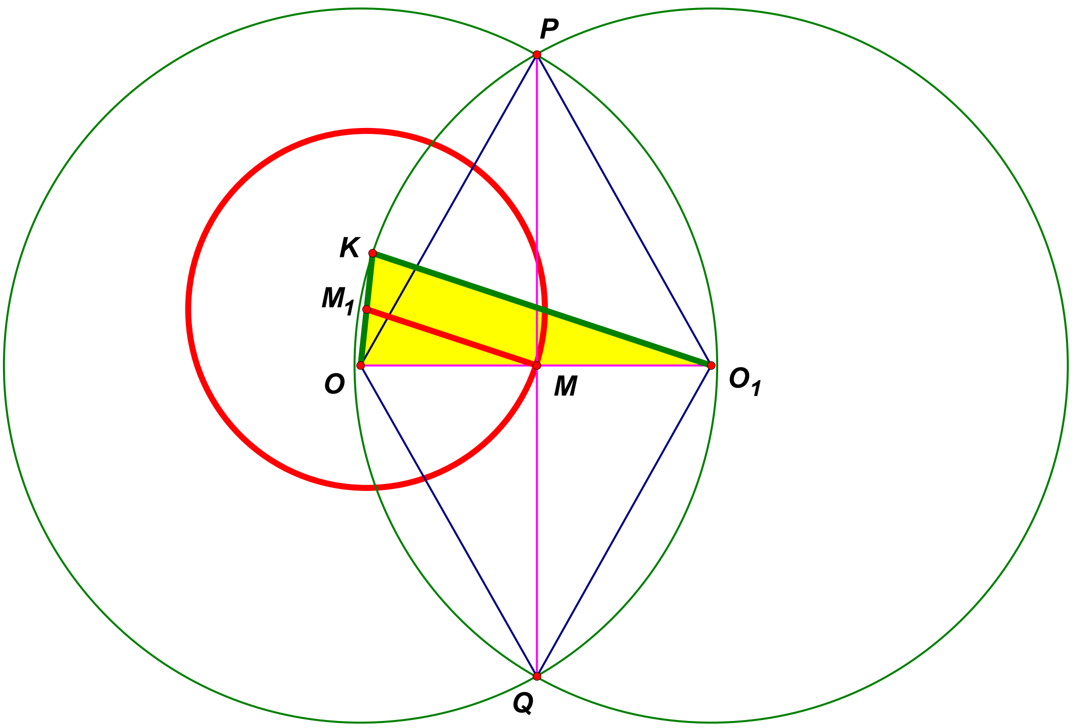
.

Решение:

Искомым геометрическим местом будет окружность с центром в середине OK (где O – центр исходной окружности) и радиусом $\frac{R}{2}$ (где R – радиус данной окружности).

Первый способ.

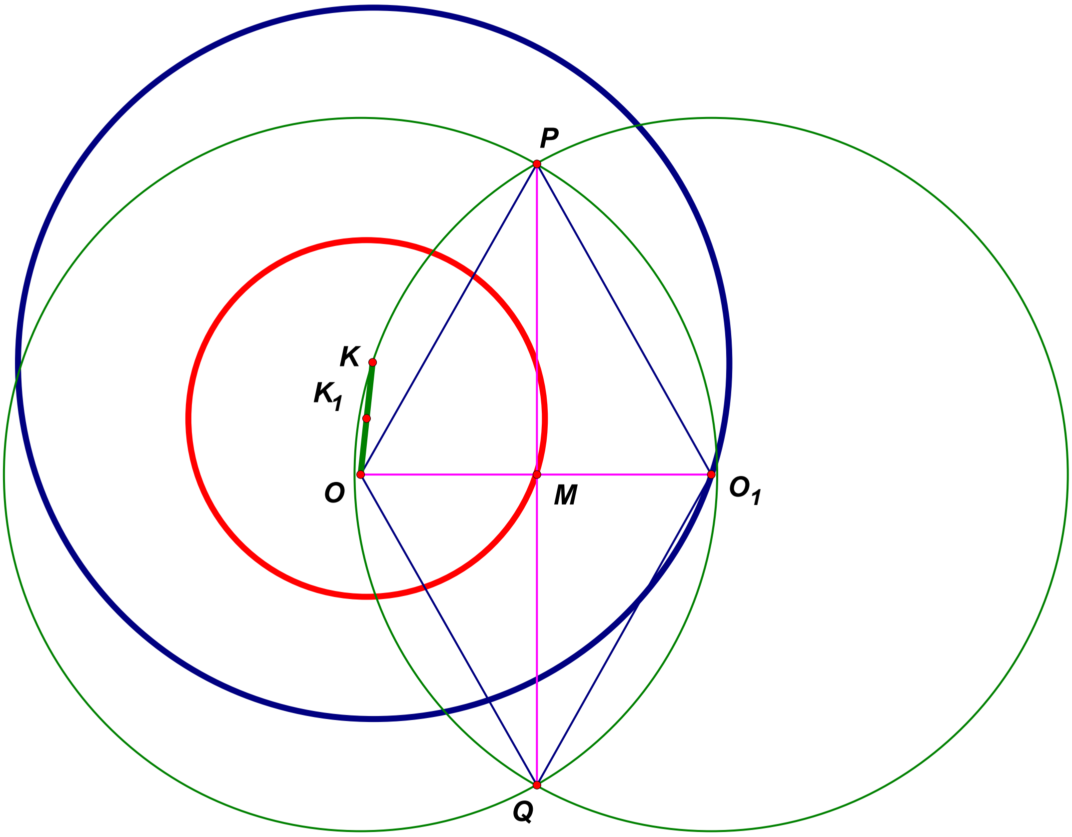
Действительно, пусть PQ – общая хорда, M – ее середина, а O_1 – центр выбранной произвольно окружности. Поскольку из условия следует, что OPO_1Q является ромбом, то M будет также серединой OO_1.Средняя линия MM_1 треугольника OKO_1 равна половине KO_1, то-есть, половине радиуса. Таким образом, все середины хорд лежат на окружности с центром в середине OK и радиусом $\frac{R}{2}$.



Несложно также проверить, что любая точка этой окружности является серединой некоторой хорды.

Второй способ.

Центры окружностей, равных данной и проходящих через точку K, лежат на окружности с центром в точке K радиуса R. Если O_1 – центр одной из таких окружностей, то, как уже было замечено, M – середина общей хорды, будет также серединой OO_1. Поэтому искомое ГМТ есть образ окружности, образованной центрами, при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом $\frac{1}{2}$.



Задача 4. (Б.Френкин)

При каком наименьшем n существует выпуклый n-угольник, у которого синусы всех углов равны, а длины всех сторон различны?

Решение:

Наименьшее значение равно пяти.

Очевидно, треугольников с таким свойством не существует.

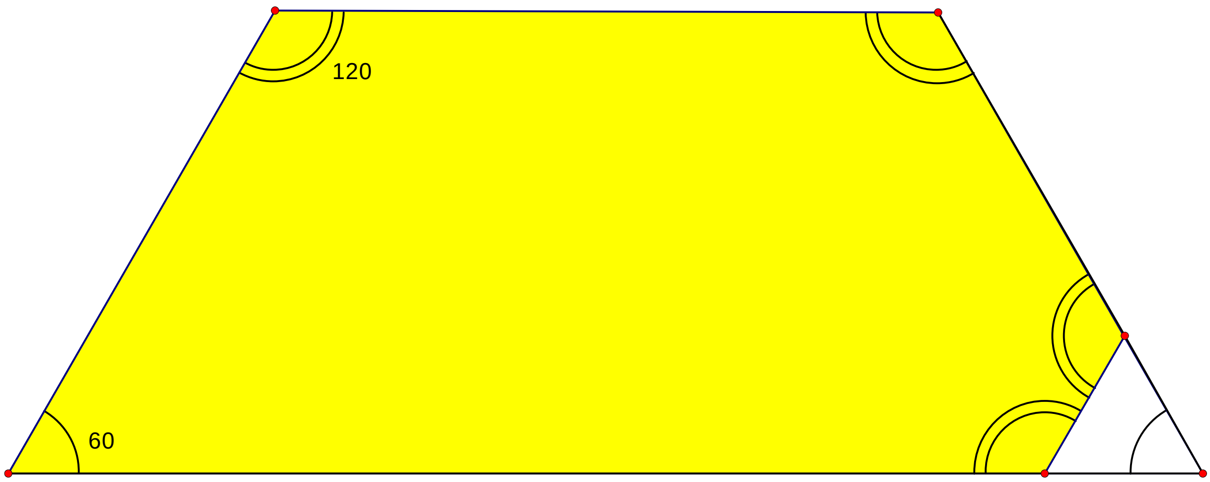
Покажем, что не существует и четырехугольников.

Сделать это можно по-разному.

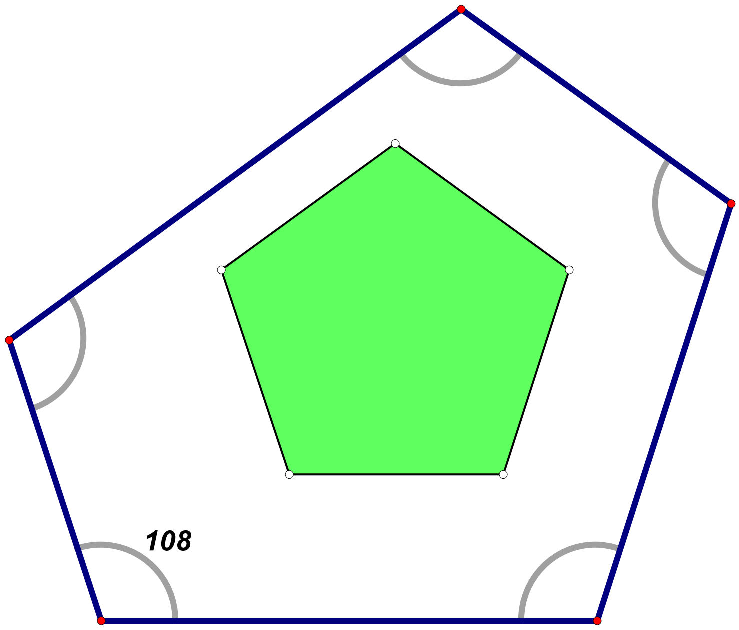
Например, так как синусы углов равны, то сами углы четырехугольника равны либо φ, либо $180^0 - \varphi$. Простым перебором легко убедиться в том, что в этом случае мы имеем дело либо с прямоугольником, либо с параллелограммом, либо с равнобокой трапецией.

Или же можно для доказательства использовать «метод площадей». Рассмотрим выпуклый четырехугольник, синусы всех углов которого равны и обозначим длины его сторон буквами *a,b,c,d*. Вычислим его площадь двумя способами, как сумму площадей двух треугольников с общей диагональю по формуле «половина произведения сторон на синус угла между ними», затем в полученном равенстве сократим на половину синуса и придем к соотношению $ab + cd = bc + da \Leftrightarrow a(b-d) = c(b-d) \Leftrightarrow (a-c)(b-d) = 0$. Отсюда вытекает равенство по-крайней мере одной пары сторон.

Чтобы построить пятиугольник, обладающий искомыми свойствами, достаточно отрезать у равнобокой трапеции с углом 60^0 при большем основании «уголок» - см. рисунок.



Или же можно взять правильный пятиугольник с углами 108^0, и, с его помощью, построить пятиугольник, все стороны которого соответственно параллельны сторонам правильного пятиугольника, но не равны между собой.



Задача 5. (А.Мякишев)

Имеются две параллельные прямые p_1 и p_2. Точки A и B лежат на p_1, а C – на p_2. Будем перемещать отрезок BC параллельно самому себе и рассмотрим все треугольники $AB'C'$, полученные таким образом. Найдите геометрическое место точек, являющихся в этих треугольниках:

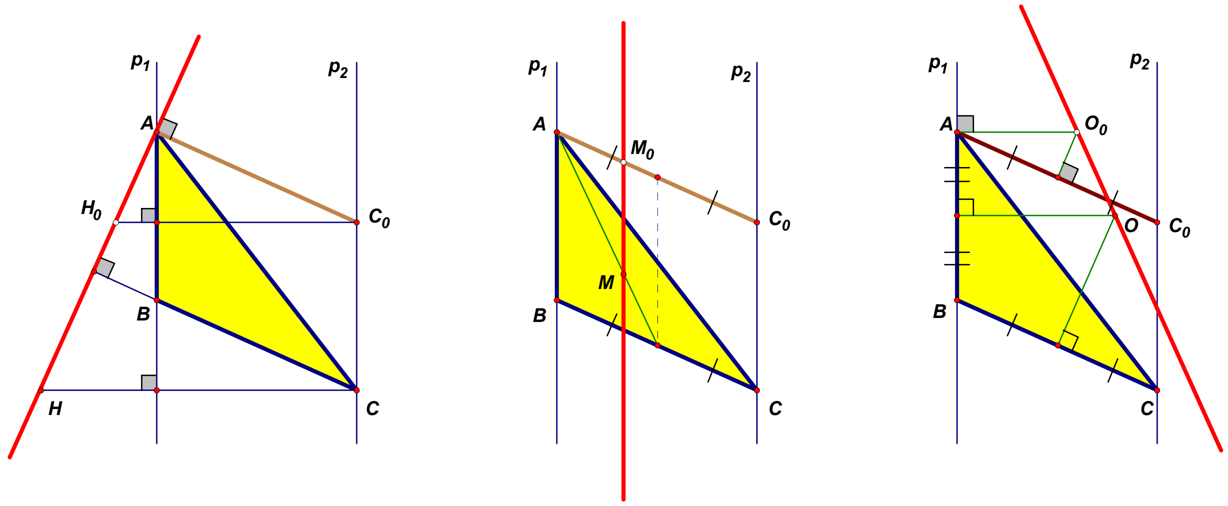
а) точками пересечения высот;

б) точками пересечения медиан;

в) центрами описанных окружностей.

Решение:

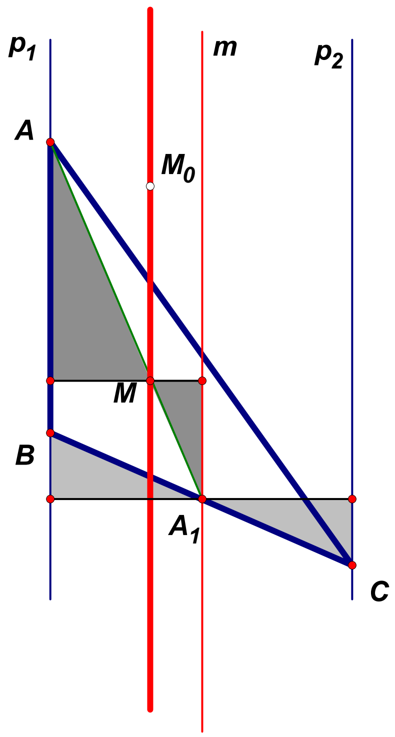
Во всех случаях получится прямая с выколотой точкой, которая соответствует случаю, когда треугольник вырождается в отрезок.



В первом случае, очевидно,   имеем прямую, перпендикулярную BC и проходящую через вершину A.

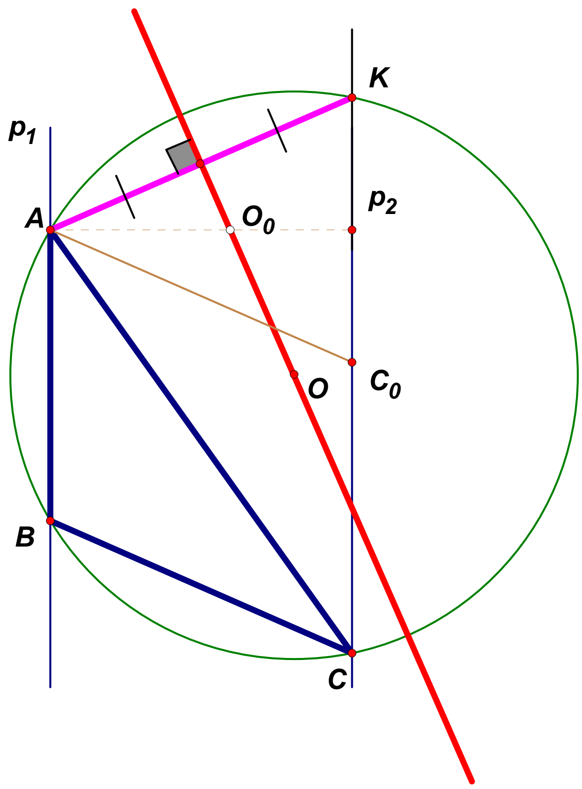
Во втором случае ответом будет прямая, параллельная данным прямым и делящая отрезок с концами на этих прямых в отношении 1:2, считая от первой прямой. В самом деле, отрезок BC движется с постоянной скоростью, значит, и его середина движется с постоянной скоростью. Точка пересечения медиан делит отрезок, соединяющий вершину A с серединой BC в постоянном отношении 2:1, и, следовательно, эта точка также будет двигаться с постоянной скоростью по некоторой прямой. В предельном случае получаем точку M_0 , которая делит отрезок AC_0 (равный и параллельный BC, но проходящий через вершину A) в отношении 1:2, поскольку она должна делить в отношении 2:1 отрезок, соединяющий точку A и середину AC_0.

Можно рассуждать иначе: проведем через точку A_1 - середину BC перпендикуляр к данным прямым и с концами на этих прямых. Получим пару равных треугольников с общей вершиной в A_1. Отсюда следует, что середины будут лежать на прямой m, равноотстоящей от данных прямых. Затем проведем перпендикуляр через M с концами на p_1 и m. Получим пару подобных треугольников с общей вершиной M, причем коэффициент подобия равен 2. Значит, центры тяжести лежат на прямой, параллельной p_1 и m, причем прямая делит общий перпендикуляр в отношении 2:1. И т.д.



Наконец, так как серединные перпендикуляры к отрезкам AC и BC движутся также с постоянными скоростями, то и точка их пересечения (центр описанной окружности) будет перемещаться по прямой.

Можно также заметить, что эта прямая является серединным перпендикуляром к отрезку AK, симметричному отрезку AC_0 (в который вырождается треугольник при совпадении точек A и B) относительно перпендикуляра из вершины A.



Как известно, если около трапеции можно описать окружность, то она равнобокая. Отсюда сразу следует, что все окружности, описанные около треугольников $AB'C'$, будут вторично пересекать прямую p_2 в одной и той же точке K, так что $AK=BC$. Поэтому центры этих окружностей должны быть равноудалены от точек A и K. Эти рассуждения дают нам также еще один способ доказательства того, что искомое ГМТ есть прямая (с выколотой точкой).

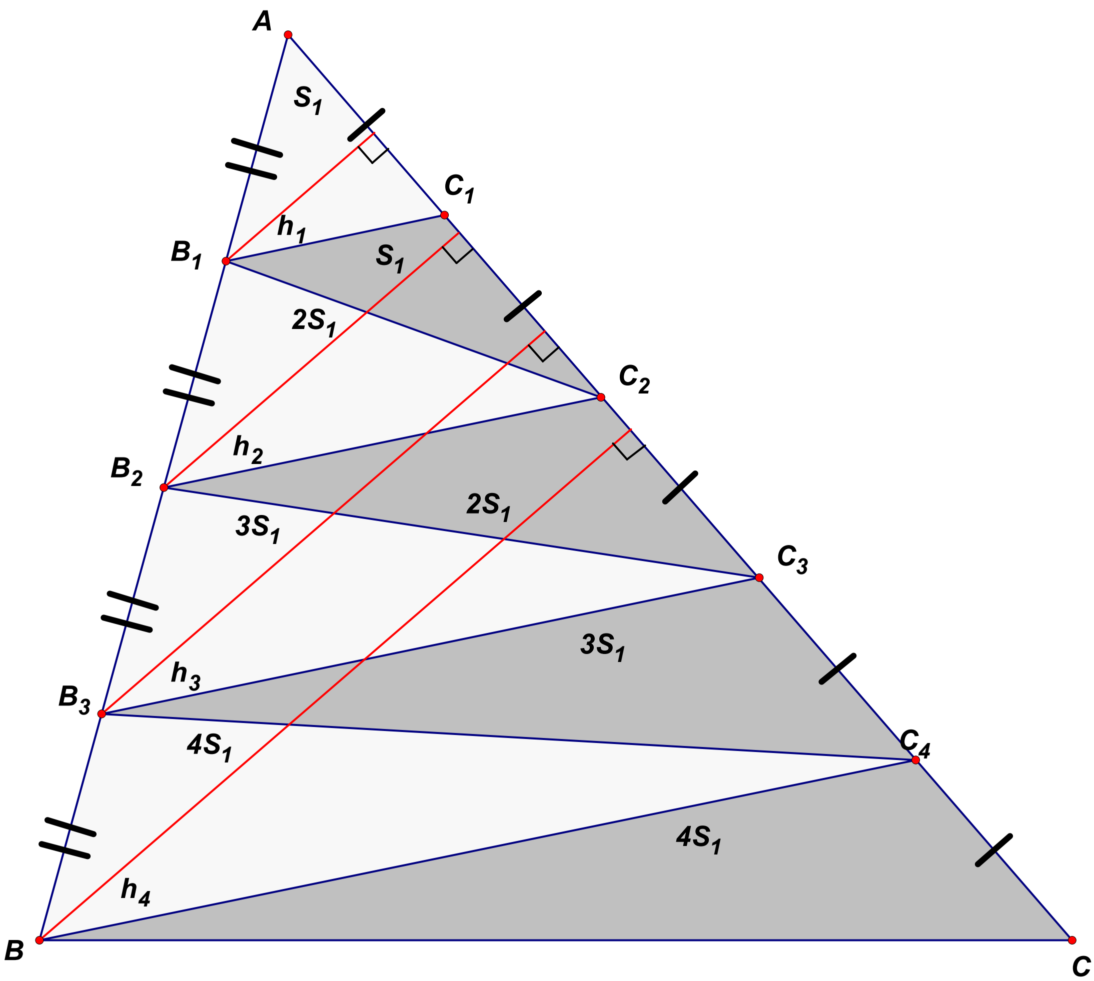
Задача 6. (А.Хачатурян)

Сторону AB треугольника ABC разделили на n равных частей (точки деления $B_0=A$, B_1, B_2, … ,$B_n=B$), а сторону AC этого треугольника разделили на $(n+1)$ равных частей (точки деления $C_0=A$, C_1, C_2, …, $C_{n+1}=C$). Закрасили треугольники $C_iB_iC_{i+1}$. Какая часть площади треугольника закрашена?

Решение:

Покажем, что закрашенная часть составляет ровно половину площади всего треугольника. Для этого из точек B_1, ..., B_n опустим перпендикуляры на сторону AC. Эти перпендикуляры являются высотами треугольников $C_iB_iC_{i+1}$ с одинаковыми основаниями, причем, как следует из соображений подобия, $h_i = ih_1$. Отсюда вытекает, что таким же соотношением будут связаны площади окрашенных треугольников: $S_i = iS_1$.

(на рисунке изображен случай n=4)



Опустив затем перпендикуляры из точек C_1, ..., C_n на сторону AC, и рассуждая аналогично, получим такое же соотношение для площадей незакрашенных треугольников. Осталось заметить, что площадь первого закрашенного треугольника равна площади первого незакрашенного (их основания равны, а высота h_1 общая).

Можно было завершить доказательство и по-другому, просто сложив площади заштрихованных треугольников:

$S' = S_1(1+2+...+n) = \frac{n(n+1)}{2}S_1$.Но, очевидно, $S_1 = \frac{1}{2}h_1\frac{AC}{(n+1)} = \frac{1}{2}\frac{h_n}{n}\frac{AC}{(n+1)} = \frac{S_{ABC}}{n(n+1)}$.

Отметим наконец, что равенство площадей соответствующих пар треугольников (закрашенного и незакрашенного) можно получить практически без вычислений, воспользовавшись тем, что прямые B_iC_i параллельны друг другу (по теореме, обратной теореме Фалеса). Тогда $S(\Delta B_{i-1}B_iC_i)=S(\Delta C_{i-1}B_iC_i)$ (у них общее основание B_iC_i, а вершины лежат на прямой, параллельной основанию- стало быть, и высота к основанию общая) и $S(\Delta C_{i-1}B_iC_i)=S(\Delta B_iC_iC_{i+1})$ (вершина B_i -общая, а $C_{i-1}C_i=C_iC_{i+1}$ по условию).

Задача 7. (В. Протасов)

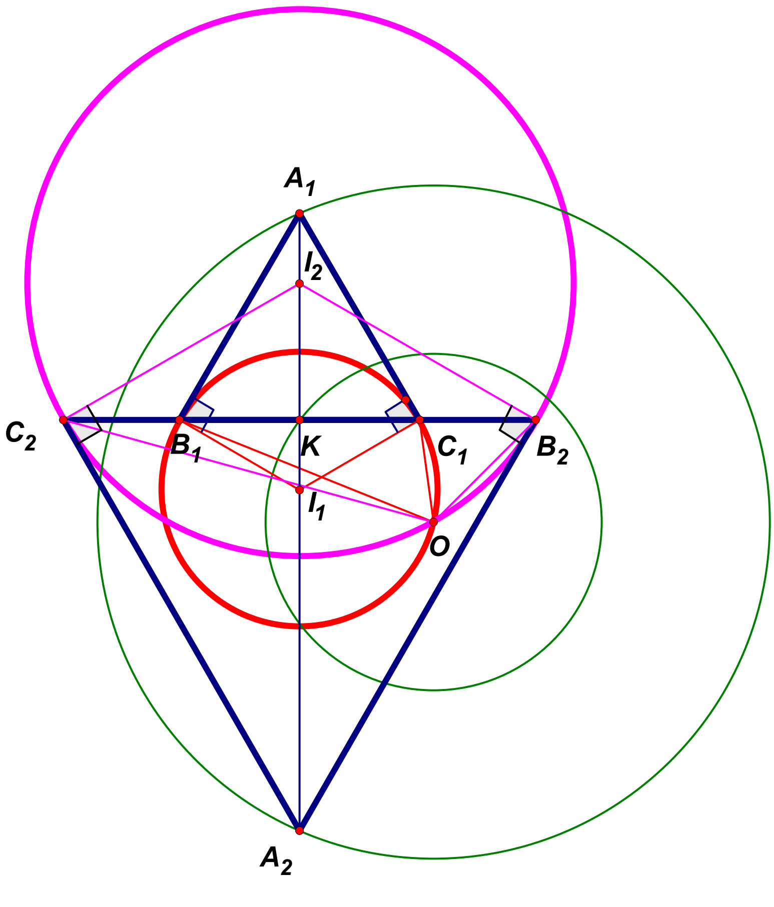
Две окружности с радиусами 1 *и* 2 *имеют общий центр в точке O. Вершина A правильного треугольника ABC лежит на большей окружности, а середина стороны BC – на меньшей. Чему может быть равен угол BOC?*

Решение:

Этот угол равен либо 60^0, либо 120^0.

Первый способ.

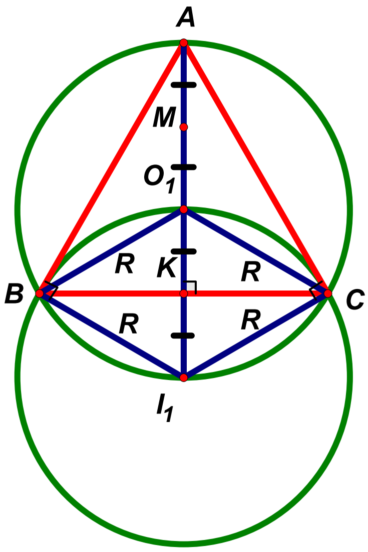
В данной конструкции *окружность, проходящая через вершины B и C правильного треугольника и касающаяся в этих точках его сторон, будет также проходить и через общий центр двух окружностей.*



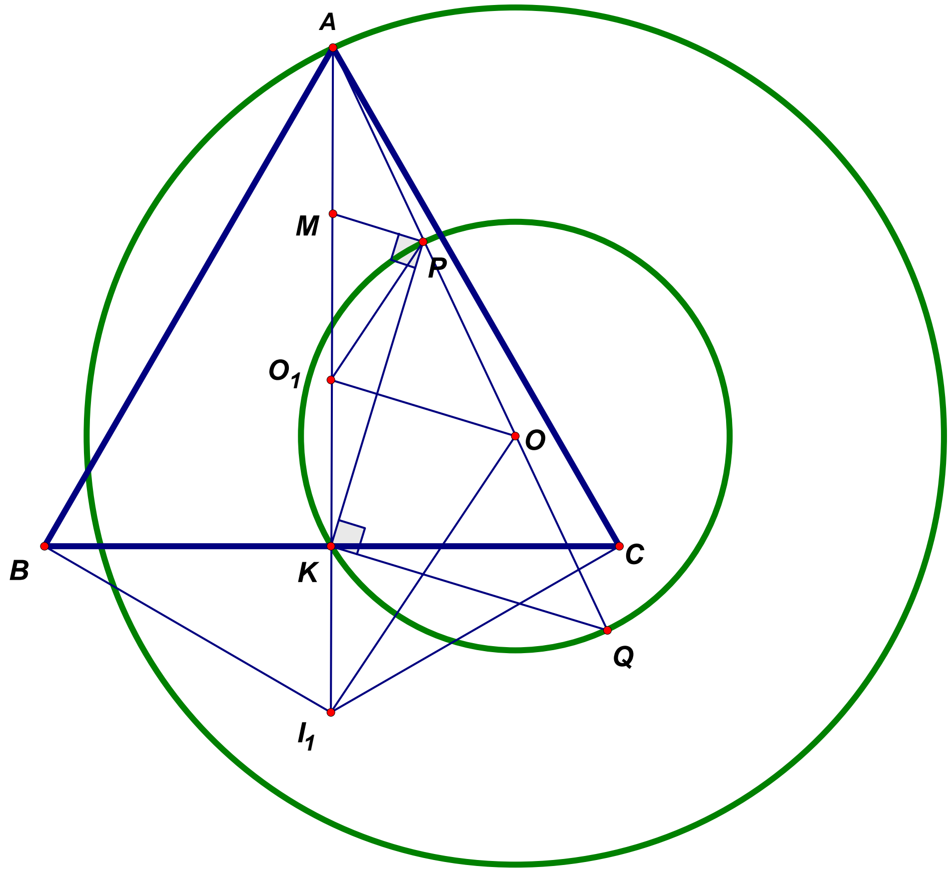
Из этого утверждения следует, что в случае «верхнего» (на рисунке) треугольника $\angle B_1OC_1=\frac{1}{2}\angle B_1I_1C_1=\frac{1}{2}120^0=60^0$, т.к. вписанный угол равен половине центрального. По той же причине для «нижнего» треугольника получим $\angle B_1OC_1=120^0$.

Для доказательства самого утверждения воспользуемся следующим легко проверяемым свойством правильного треугольника:

Пусть I_1 – центр окружности, касающейся сторон AB и AC правильного треугольника ABC в точках B и C соответственно, а K– середина стороны BC. Тогда точка K делит отрезок AI_1 в отношении 3:1, причем *I_1K равен половине радиуса этой окружности.*



Теперь докажем основное утверждение.



Проведем прямую AO и отметим точки P и Q ее пересечения с окружностью единичного радиуса. Точки M , O_1 и K делят отрезок AI_1 на четыре одинаковые части, каждая из которых равна $\dfrac{R}{2}$, где R – радиус окружности, касающейся сторон AB и AC в точках B *и* C. Мы хотим доказать, что $I_1O = R$.

Из условия следует, что точки P и O делят отрезок AQ на три равные части, поэтому из теоремы, обратной теореме Фалеса следует, что отрезки MP и KQ параллельны. Но $\angle PKQ$ - прямой, как опирающийся на диаметр, поэтому прямым будет и $\angle MPK$.

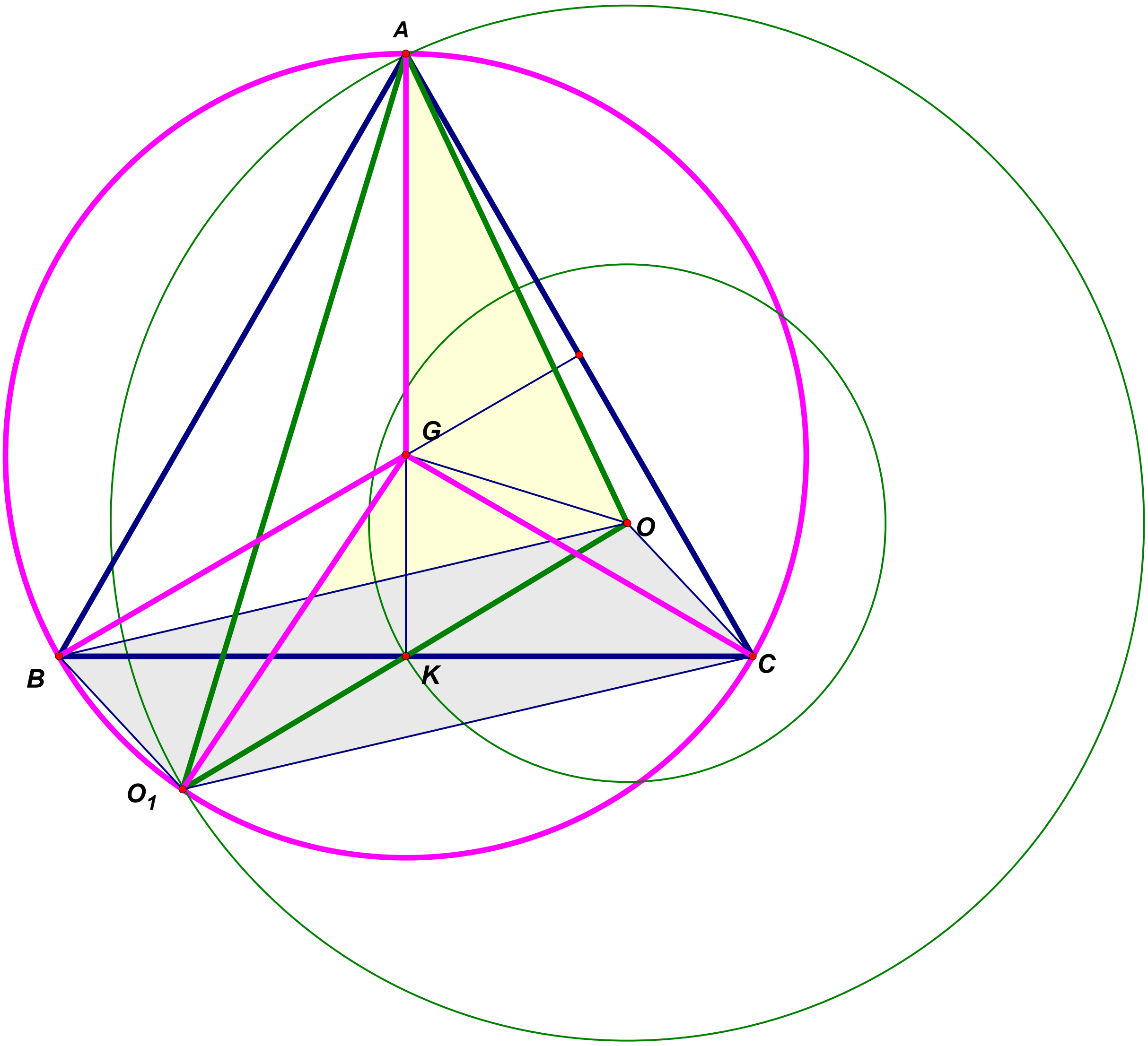
Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла равна половине гипотенузы, поэтому $O_1P = O_1M = O_1K = \frac{R}{2}$.

Теперь осталось только заметить, что отрезок O_1P является средней линией треугольника AI_1O и, значит, равен половине I_1O.

Второй способ.

(*Осечкина Мария,* г. Пермь, ФМШ № 9)

Рассмотрим, например, случай, когда точки O и A лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC.



Пусть K – середина BC, G- точка пересечения медиан треугольника ABC. Продолжим отрезок OK до пересечения с большей окружностью в точке O_1. По условию, $BK=KC$, $OK=KO_1$, поэтому четырехугольник $BOCO_1$ является параллелограммом, $\Rightarrow \angle BOC = \angle BO_1C$.

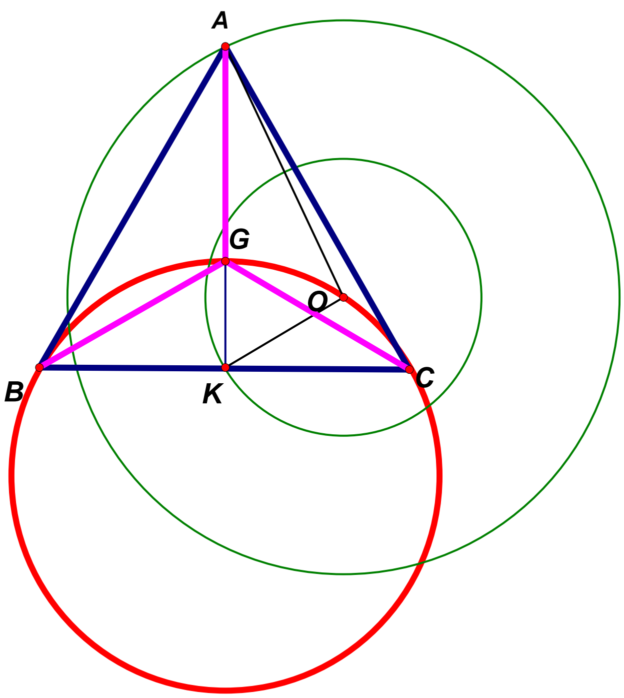
Далее, заметим , что G будет также центроидом (точкой пересечения медиан) и треугольника AOO_1, поскольку AK – медиана этого треугольника, и $AG:GK=2:1$.

И так как треугольник равнобедренный, то медиана OG является также биссектрисой, откуда следует равенство треугольников AGO и O_1GO.

Следовательно, $GA = GO_1 = GB = GC$, т.е. точки A,B,C,O_1 лежат на одной окружности, т.е. $\angle BO_1C = 180^0 - \angle BAC = 180^0 - 60^0 = 120^0$.

Аналогично рассматривая и второй случай, получим 60^0.

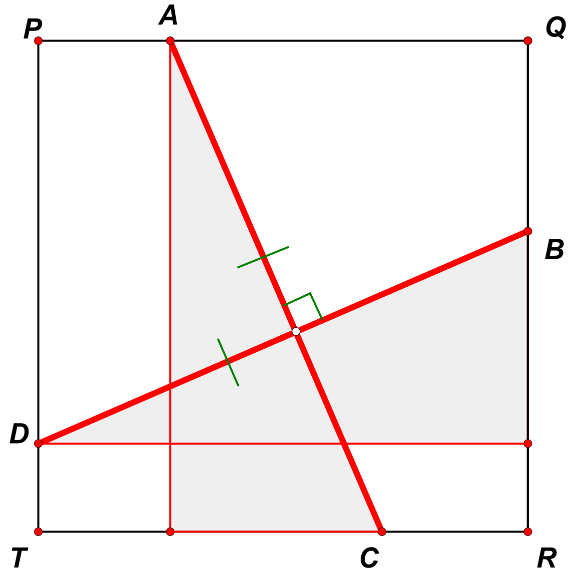
Третий способ.
(*Лысов Михаил,* г. Москва, Лицей «Вторая школа»)
Это, пожалуй, наиболее элегантное, решение основано на использовании следующей классической теоремы элементарной геометрии:
Пусть имеется некоторый отрезок AB на плоскости и некоторое положительное число $\lambda \neq 1$. Тогда геометрическое место точек X, таких что $\frac{AX}{BX} = \lambda$, есть некоторая окружность. Если P и Q –точки , которые делят отрезок AB в отношении λ (внутренним и внешним образом), то эта окружность совпадает с окружностью, построенной на отрезке P Q, как на диаметре. Она называется ***окружностью Аполония****.*



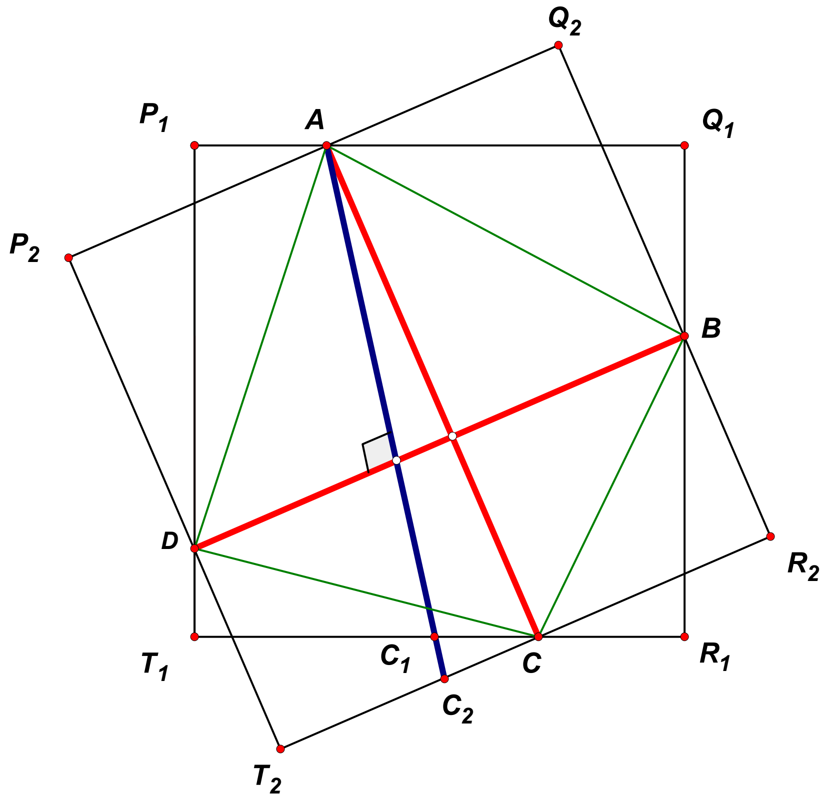
Поскольку из условия нашей задачи сразу следует, что $\frac{AG}{KG} = \frac{AB}{KB} = \frac{AC}{KC} = \frac{AO}{KO} = \frac{2}{1}$, отсюда вытекает, что точки B,G,O,C лежат на окружности Аполония для отрезка AK и $\lambda = 2$.
Понятно также, что $\angle BGC = 120^0 = \angle BOC$ (или $180^0 - \angle BOC$).

Задача 8. (Д. Терешин)
Вокруг выпуклого четырехугольника ABCD описаны три прямоугольника. Известно, что два из этих прямоугольников являются квадратами. Верно ли, что и третий обязательно является квадратом? (Прямоугольник описан около четырехугольника ABCD, если на каждой стороне прямоугольника лежит по одной вершине четырехугольника).

Решение:
Третий прямоугольник также будет квадратом.
Доказательство основано на следующем свойстве квадрата:
Пусть точки A и C лежат на одной паре противоположных сторон квадрата, а B и D – на другой. Тогда условия 1) AC$\perp$(перпендикулярен)BD и 2) AC=BD являются равносильными.



Это сразу следует из равенства прямоугольных треугольников, показанных на рисунке. Проведем, далее, в нашем четырехугольнике, вписанном в два квадрата, из точки A прямую, перпендикулярную BD и отметим ее точки пересечения с соответствующими сторонами квадрата: C_1 и C_2.



Из выше указанного свойства квадрата вытекает, что $AC_1 = BD$ и $AC_2 = BD$, т.е. $AC_1 = AC_2$, т.е. точки C_1 и C_2 должны совпадать. Но у двух сторон квадратов, содержащих эти точки, имеется только одна общая точка – C. Значит, построенный нами перпендикуляр совпадает с AC, и, следовательно, *диагонали четырехугольника ABCD равны и перпендикулярны.*

Очевидно, что если четырехугольник с таким свойством вписан в прямоугольник, то прямоугольник является квадратом.

Задача 9. (А. Мякишев)

Пусть O – центр правильного треугольника ABC. Из произвольной точки P плоскости опустили перпендикуляры на стороны треугольника или их продолжения. Обозначим через M точку пересечения медиан треугольника с вершинами в основаниях перпендикуляров. Докажите, что M – середина отрезка PO.

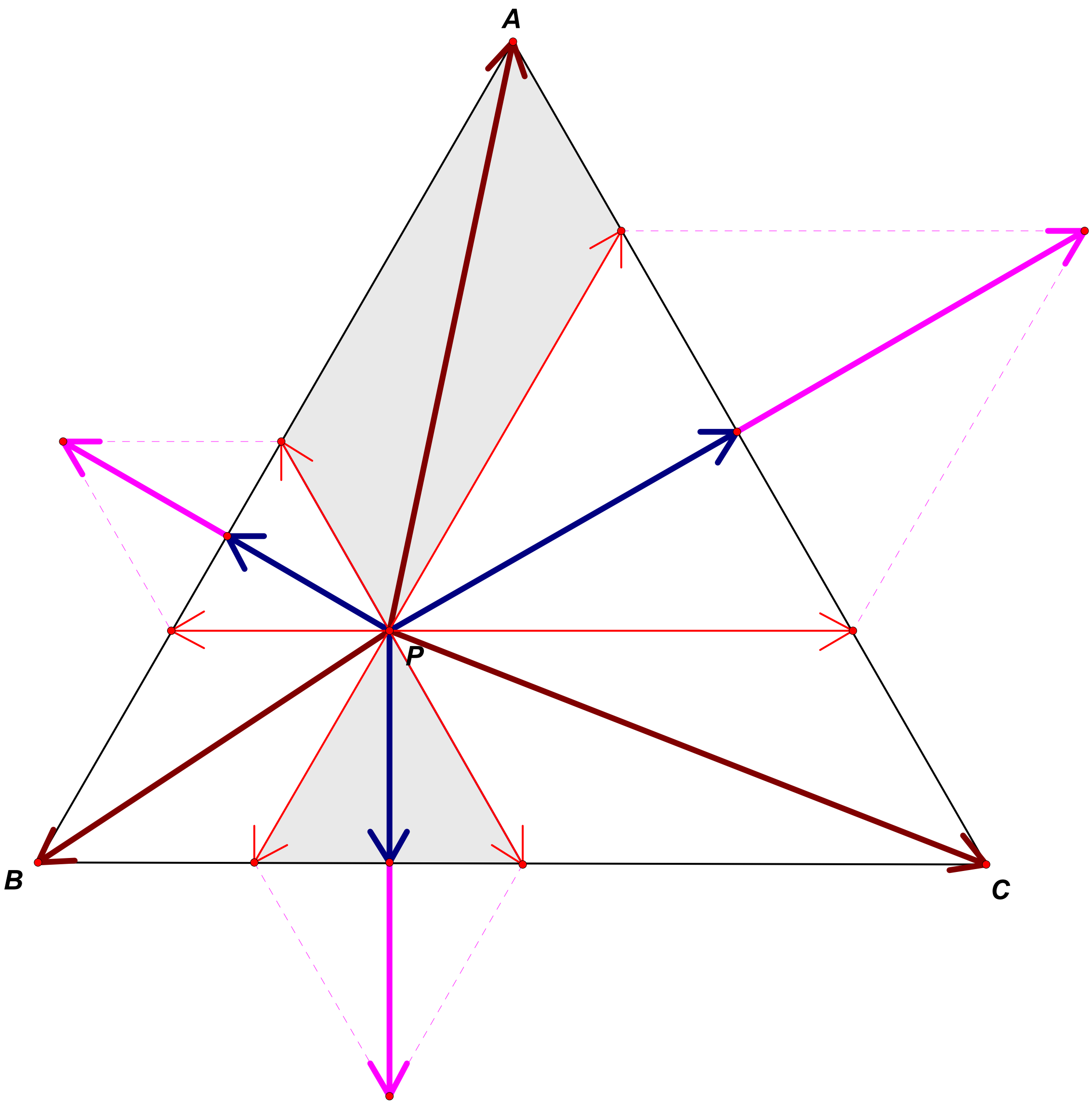
Решение:

В терминах векторов, нам нужно доказать, что $2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO}$.

Как известно, если G – точка пересечения медиан некоторого треугольника ABC, то для произвольной точки P выполняется равенство: $3\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$. С учетом этого свойства, задачу можно переформулировать следующим образом:

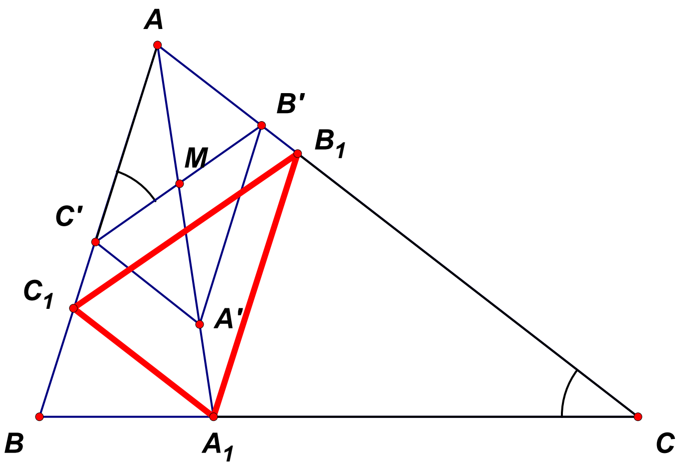
Пусть имеется правильный треугольник ABC и произвольная точка P. Рассмотрим вектора $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ *, а также три вектора* $\overrightarrow{n_a(P)}, \overrightarrow{n_b(P)}$ *и* $\overrightarrow{n_c(P)}$*, начало каждого из которых расположено в точке P, а конец – на основании перпендикуляра, опущенного из точки P на сторону треугольника. Тогда* $2\left(\overrightarrow{n_a(P)} + \overrightarrow{n_b(P)} + \overrightarrow{n_c(P)}\right) = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$.

Для доказательства рассмотрим еще шесть векторов, каждый из которых лежит на прямой, параллельной стороне треугольника и проходящей через точку P.

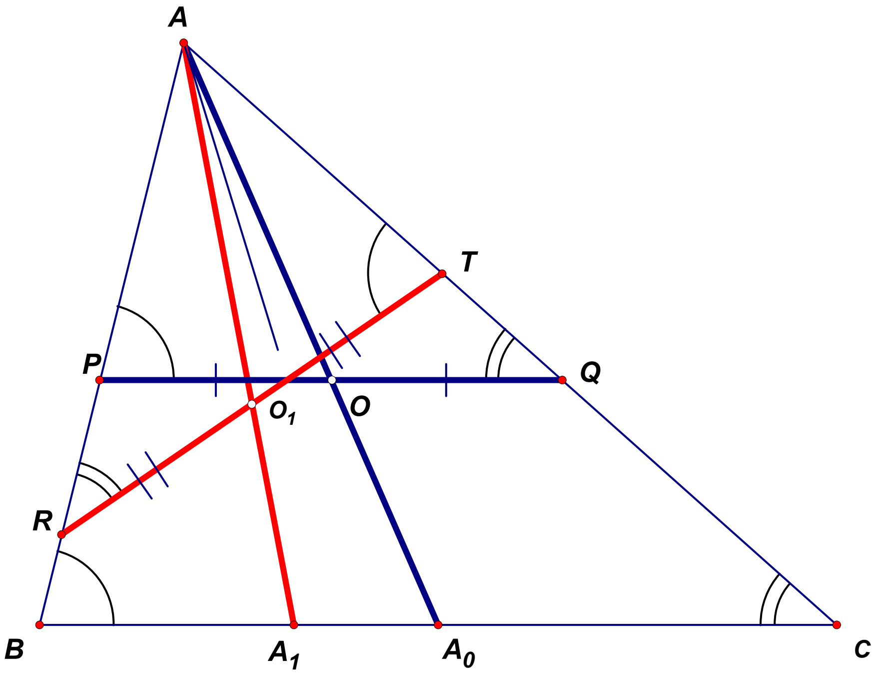


Начало каждого такого вектора расположено в точке P, а конец – на одной из сторон треугольника.
(На рисунке изображен случай, когда точка P лежит внутри треугольника).
Через эти вектора легко выразить как вектора, соединяющие P с вершинами, так и вектора с концами в основаниях перпендикуляров – поскольку параллельные линии разбивают треугольник на правильные треугольники и параллелограммы.
Как видим, наше утверждение доказано.
Легко также убедиться в том, что эти же рассуждения проходят и в случае, когда точка P расположена вне треугольника ABC.

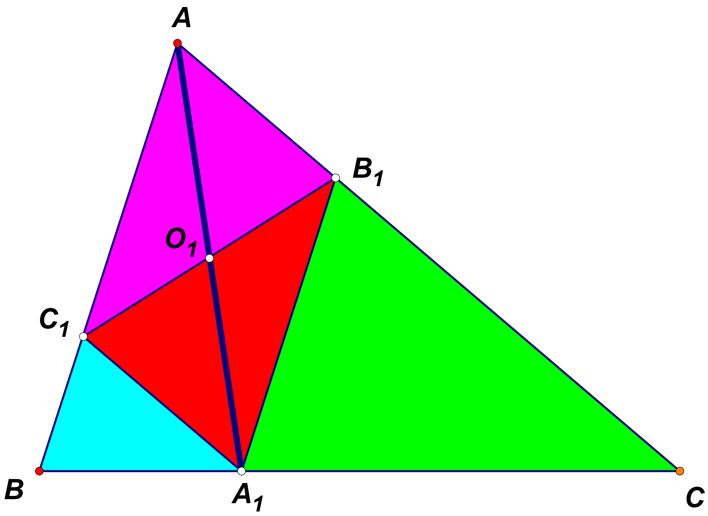
Задача 10. (Т. Емельянова)
Разрежьте неравносторонний треугольник на четыре подобных треугольника, среди которых не все одинаковы.
Решение:
Пусть $AB \neq AC$. Проведем отрезок $B'C'$, так чтобы $\angle AC'B' = \angle ACB$.



Ясно, что треугольники ABC и $AB'C'$ подобны, при этом $B'C'$ не параллелен BC.
Отметим середину отрезка $B'C'$, точку M, и достроим треугольник $AB'C'$ до параллелограмма $AB'A'C'$. Далее найдем точку A_1 пересечения AM и BC и построим параллелограмм $AB_1A_1C_1$. Отрезки A_1C_1, B_1A_1 и B_1C_1 осуществляют искомое разрезание.
Замечание:
В сущности, приведенное решение использует т.н. *симедиану* треугольника.
Симедианой называется прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы угла треугольника, через вершину которого проходит медиана.
Назовем *параллелью* (к стороне BC) треугольника любой отрезок PQ с концами на, соответственно, прямых AB и AC, параллельный BC. При этом, понятно, $\angle APQ = \angle ABC$ и $\angle AQP = \angle ACB$.
Назовем *антипараллелью* (к стороне BC) треугольника любой отрезок RT с концами на, соответственно, прямых AB и AC, такой, что $\angle ART = \angle ACB$ и $\angle ATR = \angle ABC$.(Как несложно проверить, в частности антипараллелью является отрезок, образованный основаниями соответствующих высот треугольника).
Очевидно, что отрезок является параллелью тогда и только тогда, когда соответствующая медиана делит его пополам.
Поскольку симметрия относительно прямой сохраняет углы и длины отрезков, из этого утверждения вытекает следующая
Лемма:
Отрезок является антипараллелью тогда и только тогда, когда соответствующая симедиана делит его пополам.



Теперь осуществим искомое разрезание.



Допустим, что $AB \neq AC$

Пусть AA_1 – симедиана треугольника, A_1C_1 и A_1B_1 – параллели к сторонам AC и AB соответственно. Поскольку $A_1C_1AB_1$ – параллелограмм, то его диагонали делятся точкой пересечения пополам, т.е. середина C_1B_1 лежит на симедиане, и потому, согласно лемме, отрезок C_1B_1 является антипараллелью.

Легко проверить, что треугольники $A_1B_1C_1$, AB_1C_1, C_1BA_1 и B_1A_1C подобны треугольнику ABC, и не все одинаковы (т.к. , понятно, для неравнобедренного треугольника основание симедианы A_1 не совпадает с серединой BC. Можно даже показать, что $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB^2}{AC^2}$ - еще одно интересное свойство симедианы).

Задача 11. (Л. Емельянов)

Квадрат разрезали на n прямоугольников со сторонами $a_i \times b_i, i = 1, \ldots, n$. *При каком наименьшем n в наборе* $\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$ *все числа могут оказаться различными?*

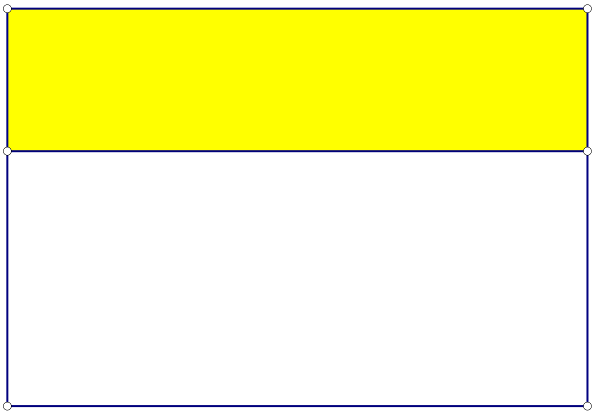
Решение:

Наименьшее значение n равно 5.

Покажем сначала, что никакой прямоугольник (в частности, квадрат) нельзя разрезать ни на 2, ни на 3, ни на 4 прямоугольника с различными сторонами.

Очевидно, что если прямоугольник разрезан на 2 прямоугольника, то у них есть общая сторона.

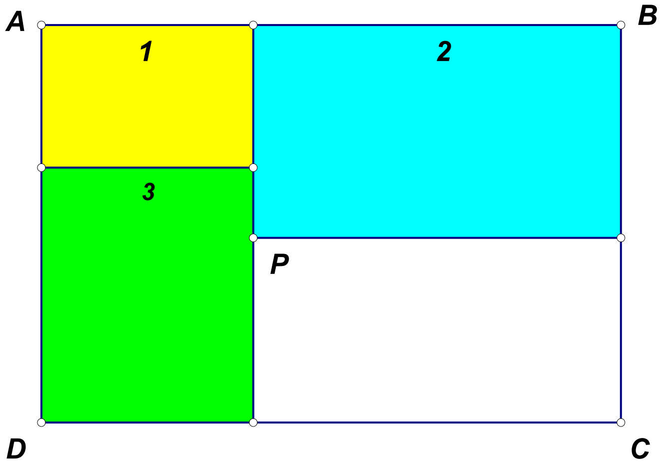
Пусть, далее, прямоугольник разрезан на 3 прямоугольника. Тогда один из них содержит две вершины исходного треугольника (так как три прямоугольника должны накрыть все 4 вершины исходного), и мы свели задачу к предыдущему случаю (оставшаяся часть-прямоугольник, который необходимо разбить на два).



Наконец, допустим, что прямоугольник разрезан на 4 других.

Имеем две возможности – либо один из прямоугольников разбиения содержит две вершины исходного (и мы сводим задачу к разрезанию прямоугольника на 3 части), либо каждый из прямоугольников разбиения содержит по 1 вершине исходного.

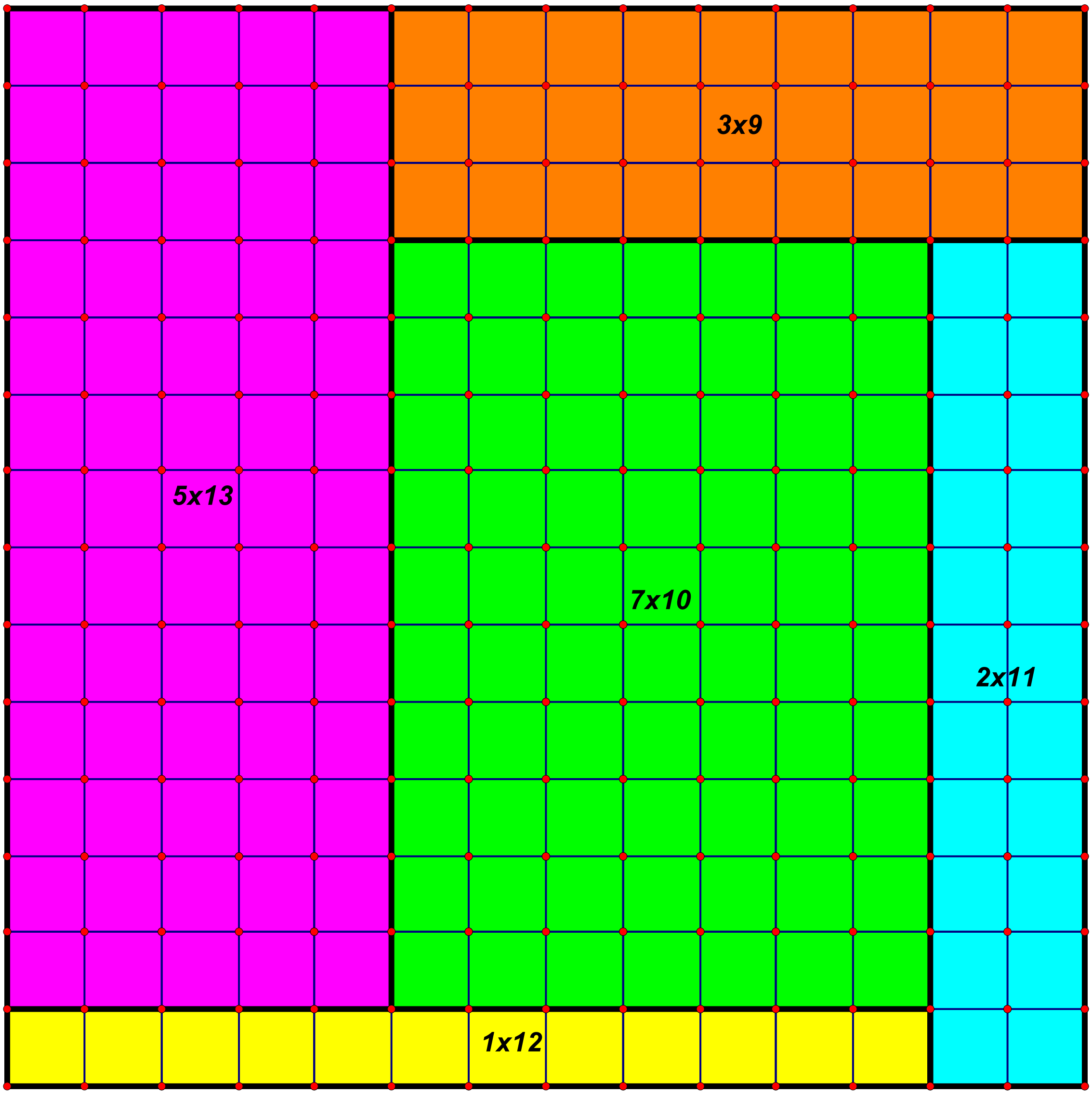
В последнем случае рассмотрим 2 прямоугольника, содержащие соседние вершины.



Они должны соприкасаться (т.к. очевидно, что если бы был «зазор» между ними, то его нельзя было бы покрыть двумя прямоугольниками, содержащими остальные две вершины исходного).

Рассмотрим тот прямоугольник из оставшихся, который содержит точку P. Он не может содержать вершину C, следовательно, он содержит вершину D и , значит, имеет общую сторону с первым прямоугольником.

Предъявим теперь одно из возможных разрезаний квадрата на 5 различных прямоугольников.

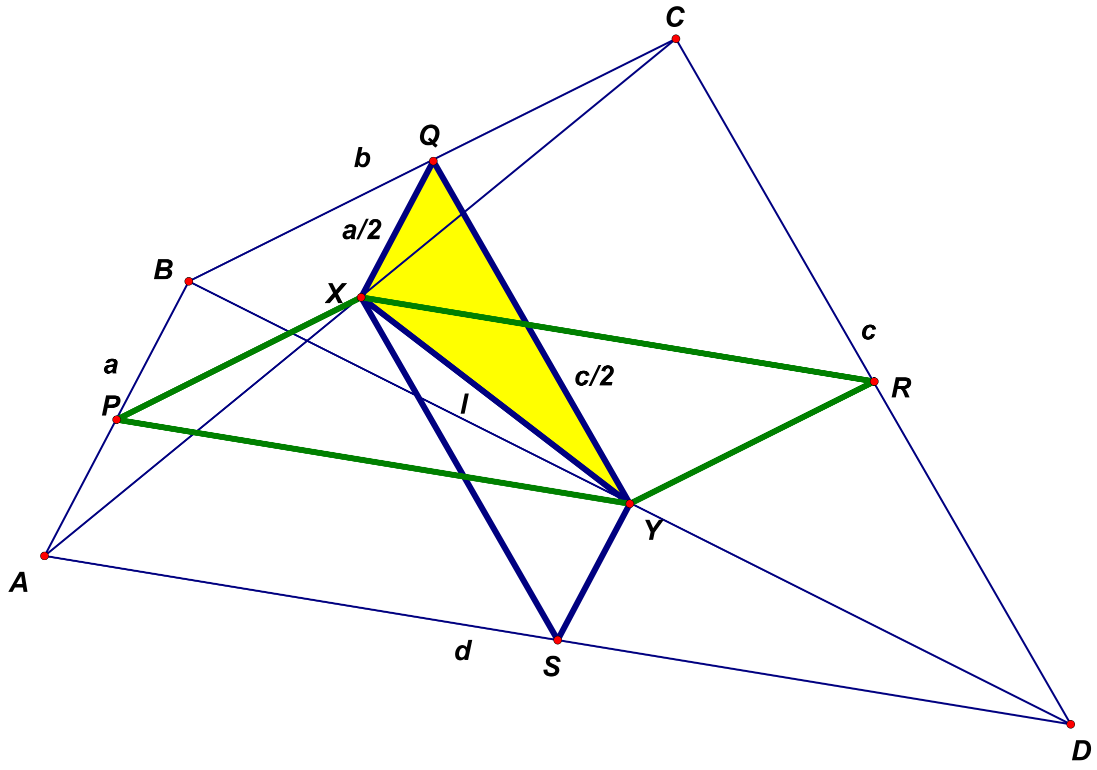


Задача 12. (В. Смирнов)

Постройте четырехугольник по заданным сторонам a,b,c и d и расстоянию l между серединами его диагоналей.

Решение:

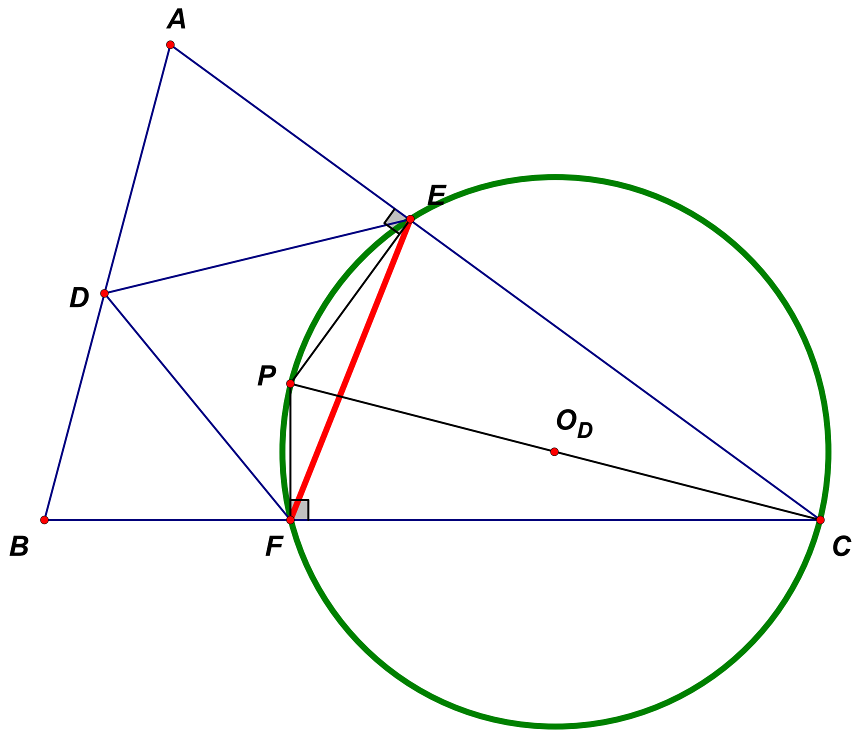
Пусть $ABCD$- искомый четырехугольник, $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d$, P, Q, R, S, X, Y - середины отрезков AB,BC,CD,DA,AC,BD соответственно. Так как QX,SY - средние линии треугольников ABC и ABD, то $QX=YS=\frac{a}{2}$. Аналогично, $QY=XS=\frac{c}{2}$. Следовательно, зафиксировав точки X и Y и построив треугольники XYQ и XYS, мы найдем точки Q и S. Аналогично находятся точки P и R. Проведя теперь через P,Q,R,S прямые, параллельные, соответственно, QX,PX,QY,PY, получим искомый четырехугольник.



Задача 13. (А.Заславский)

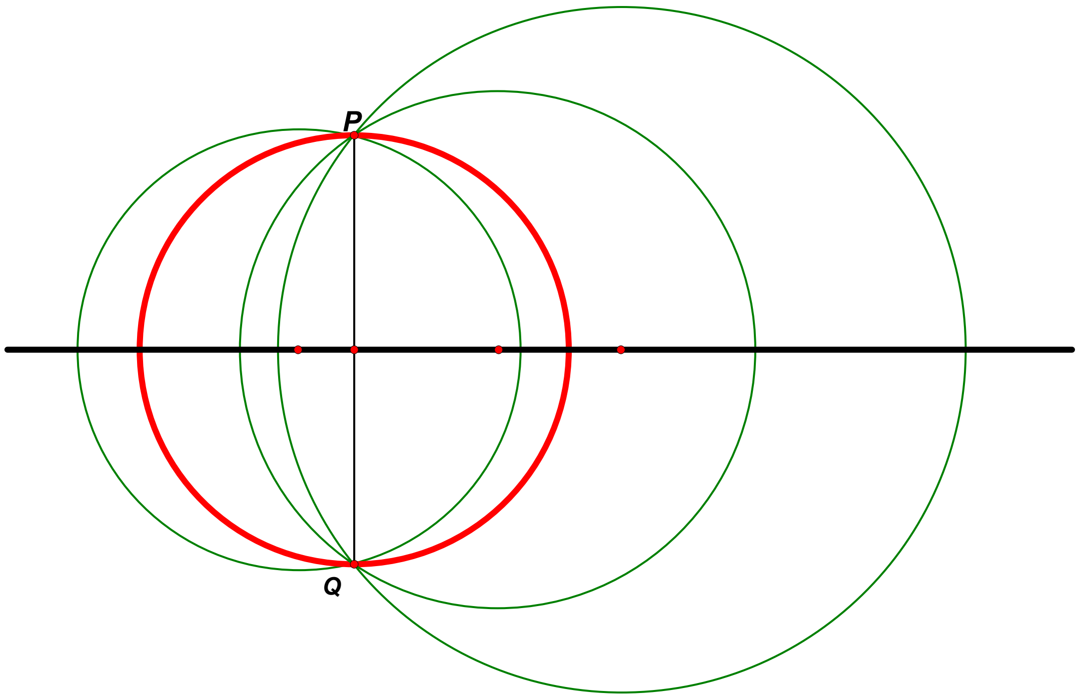
Дан треугольник ABC и две прямые l_1, l_2. Через произвольную точку D на стороне AB проводится прямая, параллельная l_1, пересекающая AC в точке E, и прямая, параллельная l_2, пересекающая BC в точке F. Построить точку D, для которой отрезок EF имеет наименьшую длину.

Решение:



Пусть *P* – точка пересечения перпендикуляров к *AC* в точке *E* и к *BC* в точке *F*. Когда *D* двигается по *AB*, стороны четырехугольника *DEPF* сохраняют направления, и, так как три вершины четырехугольника двигаются по прямым, четвертая также движется по прямой.

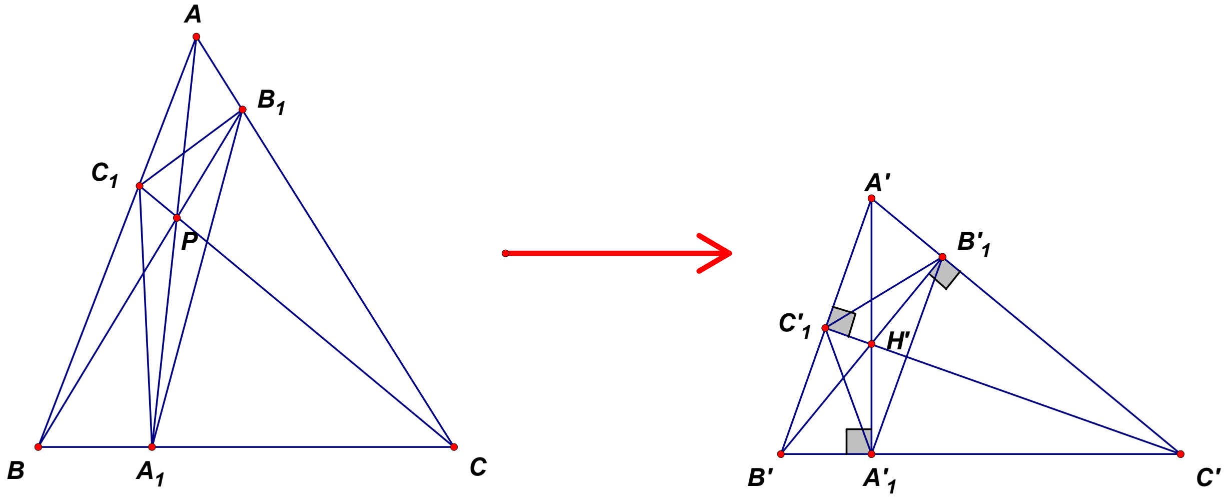
Следовательно, середина отрезка CP, являющаяся центром окружности треугольника CEF, также двигается по прямой. Значит, все эти окружности имеют общую хорду, т.е. помимо C – еще одну общую точку Q. Поскольку хорда EF опирается на постоянный угол C, то ее длина будет минимальной при минимальном радиусе описанной около CEF окружности. Однако среди всех окружностей, содержащих общую хорду, минимальный радиус, очевидно, будет иметь та из них, для которой эта хорда CQ является диаметром.



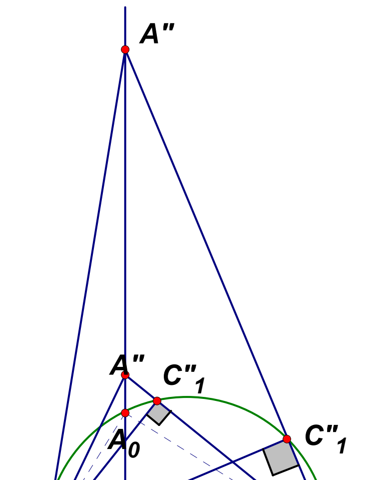
Отсюда вытекает, например, следующий способ построения точки D.
Проведем через A прямую, параллельную l_2 и найдем точку U ее пересечения с BC. Через B проведем прямую, параллельную l_1 и найдем точку V ее пересечения с AC. Пусть Q- вторая точка пересечения окружностей, описанных около ACU и BCV, E – вторая точка пересечения окружности с диаметром CQ и прямой AC. Тогда прямая, проходящая через E и параллельная l_1, пересекает AB в искомой точке.

Задача 14. (Л. Емельянов).
Пусть P – произвольная точка внутри треугольника ABC. Обозначим через A_1,B_1 и C_1 точки пересечения прямых AP, BP и CP соответственно со сторонами BC, CA и AB. Упорядочим площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, обозначив меньшую через S_1, среднюю- S_2, а большую – S_3. Докажите, что $\sqrt{S_1S_2} \le S \le \sqrt{S_2S_3}$, где S – площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение:
Первый способ.
Назовем треугольник $A_1B_1C_1$ *чевианным* треугольником точки P.
Оказывается, любой треугольник ABC можно подходящим *аффинным* преобразованием перевести в некоторый остроугольный треугольник $A'B'C'$, так что точка P переходит в его ортоцентр, а чевианный треугольник P - в *ортотреугольник* $A'B'C'$ (треугольник, образованный основаниями высот).



Действительно, возьмем произвольный отрезок $B'C'$, и отметим на нем такую точку A_1', что $\dfrac{B'A_1'}{C'A_1'} = \dfrac{BA_1}{CA_1}$, а затем восстановим в этой точке перпендикуляр к $B'C'$. На этом перпендикуляре построим точку A_0, такую, что $\angle B'A_0C' = \dfrac{\pi}{2}$ (точка пересечения перпендикуляра с окружностью, построенной на $B'C'$, как на диаметре).



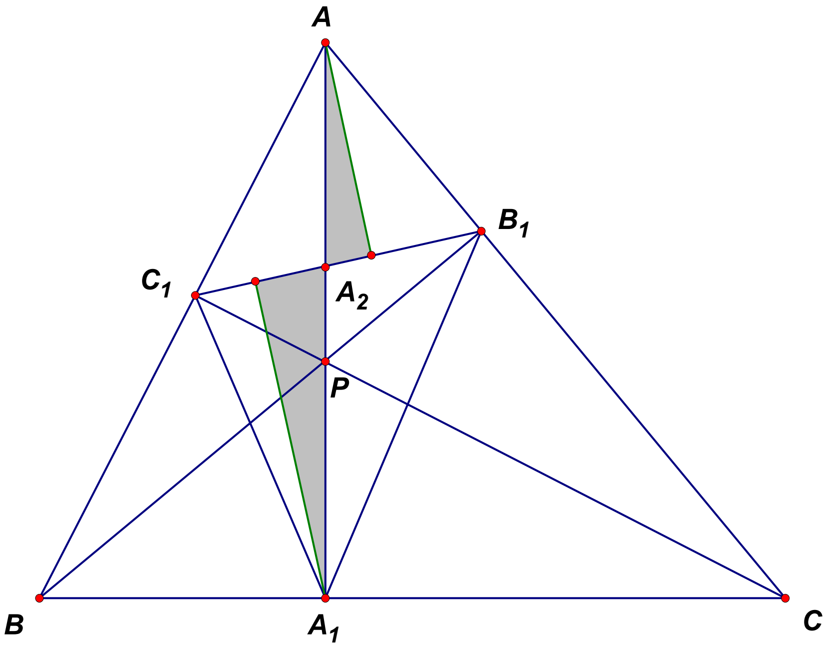
Далее, рассмотрим точку A'' на этом перпендикуляре и опустим высоту $B'C_1''$ на $A''C'$. Если A'' расположена близко к точке A_0, то отношение $\dfrac{C'C_1''}{A''C_1''}$ очень велико, а если A'' удаляется по перпендикуляру на бесконечность, то отношение стремится к нулю. Из соображений непрерывности следует, что найдется некоторая точка A' на перпендикуляре, такая что $\dfrac{C'C_1'}{A'C_1'} = \dfrac{CC_1}{AC_1}$. Соответственное равенство третьей пары отношений гарантировано теоремой Чевы.

Как известно, для любых двух треугольников ABC и $A'B'C'$ существует единственное аффинное преобразование, отображающее первый треугольник на второй. Поскольку аффинное преобразование прямые переводит в прямые , а также сохраняет отношение

длин отрезков – мы нашли аффинное преобразование, переводящее чевианный треугольник в некоторый ортотреугольник.
Кроме того, аффинное преобразование сохраняет и отношение площадей.
Сказанное означает, что нам достаточно доказать утверждение задачи для *остроугольного треугольника и его ортоцентра.*
Не ограничивая общности, будем считать, что площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C соответственно равны S_1, S_2, и S_3. Эти треугольники подобны исходному с коэффициентами $\cos A, \cos B, \cos C$ соответственно, поэтому

$S_1 \le S_2 \le S_3 \Leftrightarrow \frac{S_1}{S_{ABC}} \le \frac{S_2}{S_{ABC}} \le \frac{S_3}{S_{ABC}} \Leftrightarrow \cos^2 A \le \cos^2 B \le \cos^2 C \Leftrightarrow A \ge B \ge C$ - поскольку все углы острые, косинусы положительны и убывают. Из последней цепочки неравенств следует, что $C \le \frac{\pi}{3}$ и $A \ge \frac{\pi}{3}$ (иначе $A + B + C \ne \pi$).
Докажем теперь, что $\sqrt{S_1 S_2} \le S$.
$\sqrt{S_1 S_2} \le S \Leftrightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S} \cdot \frac{S_2}{S}} \le 1 \Leftrightarrow$ (после возведения в квадрат и деления числителя и знаменателя на $S^2{}_{ABC}$) $\frac{\cos^2 A \cdot \cos^2 B}{(1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C)^2} \le 1$.
Но, как нетрудно проверить, в любом треугольнике имеет место равенство:
$1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C = 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$, поэтому наше неравенство равносильно
$\cos^2 A \cdot \cos^2 B \le 4\cos^2 A \cdot \cos^2 B \cdot \cos^2 C \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \cos^2 C \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \cos C \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \ge C$.
Аналогично доказывается, что $S \le \sqrt{S_2 S_3}$.

Второй способ.



Не ограничивая общности, будем считать, что площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C соответственно равны S_1, S_2, и S_3.
Пусть точка P имеет (относительно треугольника ABC) *нормированные* барицентрические координаты $p : q : r$, т.е. $p + q + r = 1$. Поскольку P расположена внутри треугольника, то

p, q, r - положительные величины. Выразим через них $\frac{S_1}{S}$. Обозначим через A_2 точку пересечения B_1C_1 и AA_1. Поскольку треугольники AB_1C_1 и $A_1B_1C_1$ имеют общее основание, то, очевидно, $\frac{S_1}{S} = \frac{AA_2}{A_1A_2}$. Далее, понятно что A_2 имеет координаты $2p : q : r$ (центр масс системы $2pA$ и $(q+r)A_1$ расположен на прямой AA_1, а системы $(p+q)C_1$ и $(p+r)B_1$ - на прямой B_1C_1), откуда по правилу рычага имеем $\frac{AA_2}{A_1A_2} = \frac{q+r}{2p} = \frac{1-p}{2p}$.

Совершенно аналогично, $\frac{S_2}{S} = \frac{1-q}{2q}$ и $\frac{S_3}{S} = \frac{1-r}{2r}$. Поскольку $S_1 \le S_2 \le S_3$, отсюда следует, что $\frac{1}{2p} \le \frac{1}{2q} \le \frac{1}{2r}$ или $p \ge q \ge r$. С учетом равенства $p + q + r = 1$ имеем также $p \ge \frac{1}{3}; r \le \frac{1}{3}$.

Докажем теперь, что $\sqrt{S_1S_2} \le S$.

$\sqrt{S_1S_2} \le S \Leftrightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S} \cdot \frac{S_2}{S}} \le 1 \Leftrightarrow (1-p)(1-q) \le 4pq \Leftrightarrow 1 - p - q \le 3pq \Leftrightarrow r \le 3pq \Leftrightarrow \frac{pq}{r} \ge \frac{1}{3}$.

Но $p \ge \frac{1}{3} \Rightarrow pq \ge \frac{1}{3}q \Rightarrow \frac{pq}{r} \ge \frac{1}{3}\frac{q}{r}$. Наконец, $q \ge r \Rightarrow \frac{q}{r} \ge 1 \Rightarrow \frac{1}{3}\frac{q}{r} \ge \frac{1}{3}$.

Точно также доказывается, что $S \le \sqrt{S_2S_3}$ (используя неравенство $r \le \frac{1}{3}$).

Замечание:

Идеи, на которых основывалось доказательство, можно реализовать, не используя геометрию масс. Например, ввести отношения $\lambda = \frac{BA_1}{CA_1}; \beta = \frac{CB_1}{AB_1}; \gamma = \frac{AC_1}{BC_1}$ и с помощью теоремы Фалеса (проводя соответствующие параллели) выразить через них отношения площадей.

Третий способ.

(*Авксентьев Евгений,* г. Ростов-на-Дону, МОУ Гимназия № 5).

Следующее симпатичное решение основано на т.н. *теореме Мёбиуса:*

Пусть P – произвольная точка внутри треугольника ABC. Обозначим через A_1, B_1 и C_1 точки пересечения прямых AP, BP и CP соответственно со сторонами BC, CA , AB , а площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C и $A_1B_1C_1$ - S_1, S_2, S_3 и S соответственно. Тогда $S^3 + (S_1 + S_2 + S_3)S^2 - 4S_1S_2S_3 = 0$.

(Это несложно доказать, используя, например, найденные нами отношения площадей в предыдущих рассуждениях).

Рассмотрим функцию $\Phi(x) = x^3 + (S_1 + S_2 + S_3)x^2 - 4S_1S_2S_3$. По теореме Мёбиуса, $\Phi(S) = 0$. Кроме того, очевидно, что $\Phi(x)$ возрастает на $(0;+\infty)$ (как сумма двух возрастающих функций). Поэтому нам достаточно показать, что $\Phi\left(\sqrt{S_1S_2}\right) \le 0 \le \Phi\left(\sqrt{S_2S_3}\right)$, при условии того, что $S_1 \le S_2 \le S_3$.

Но $\Phi\left(\sqrt{S_1S_2}\right) = S_1S_2\left(\sqrt{S_1S_2} + S_1 + S_2 - 3S_3\right) \le 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{S_1S_2} + S_1 + S_2 - 3S_3\right) \le 0$.

Однако $\sqrt{S_1S_2} \le \frac{S_1 + S_2}{2}$ (среднее геометрическое двух положительных величин не превосходит их среднего арифметического), поэтому

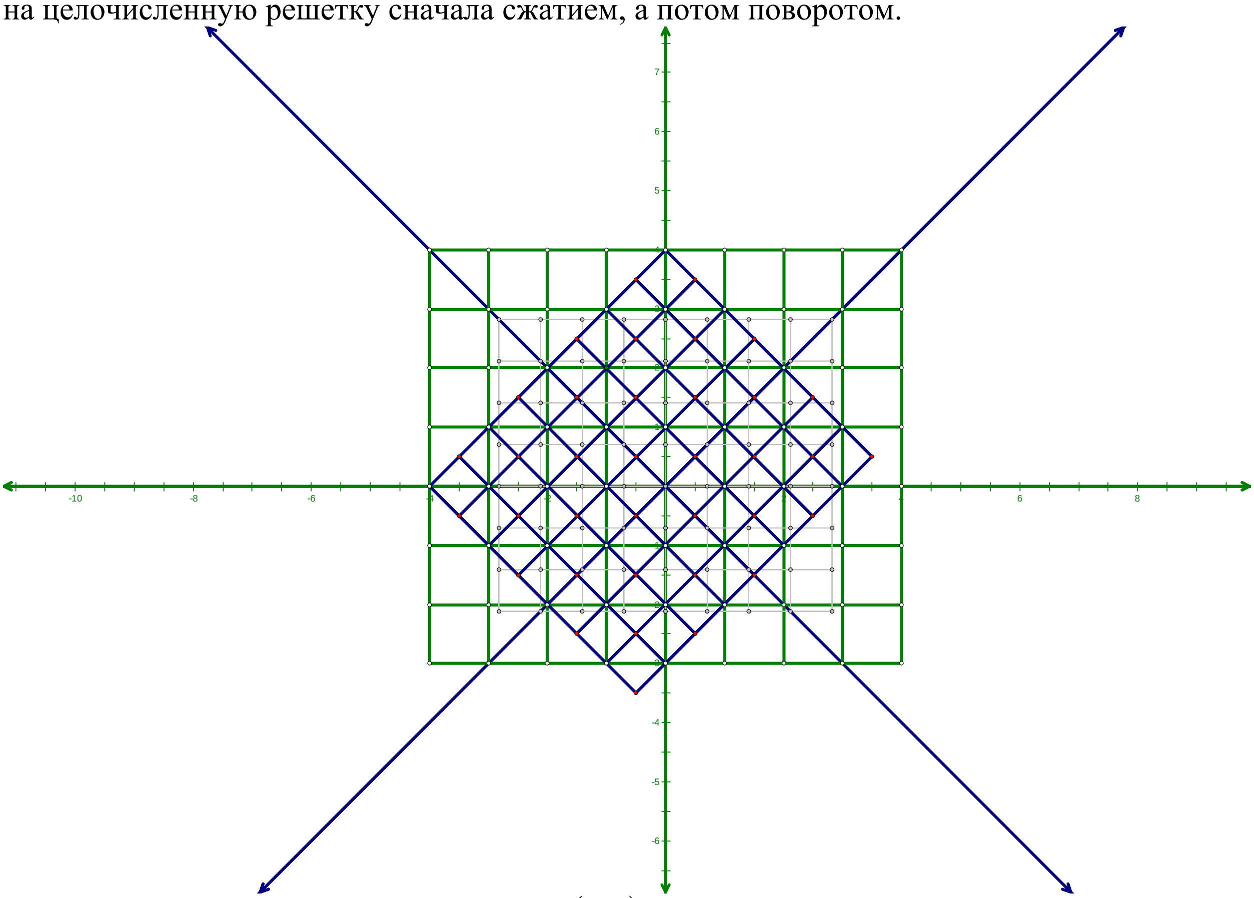
$\left(\sqrt{S_1S_2} + S_1 + S_2 - 3S_3\right) \le \frac{3}{2}(S_1 + S_2) - 3S_3 \le \frac{3}{2}2S_3 - 3S_3 = 0.$

С другой стороны, $\Phi\left(\sqrt{S_3S_2}\right)=S_3S_2\left(\sqrt{S_3S_2}+S_3+S_2-3S_1\right)\geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{S_3S_2}+S_3+S_2-3S_1\right)\geq 0$,
и $\left(\sqrt{S_3S_2}+S_3+S_2-3S_1\right)\geq 3\sqrt{S_3S_2}-3S_1\geq 3\sqrt{S_1^{\,2}}-3S_1=0.$

Задача 15. (А.Заславский)
Дана окружность с центром в начале координат. Докажите, что найдется окружность меньшего радиуса, на которой лежит не меньше точек с целыми координатами.
Решение:

Рассмотрим поворотную гомотетию с центром в начале координат, коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и углом поворота $\frac{\pi}{4}$. Если квадрат радиуса данной окружности – четное число, то все ее целые точки переходят в целые, и мы получаем искомую окружность. Если квадрат радиуса – нечетное число, то все целые точки переходят в центры единичных квадратов с вершинами в целых точках, и искомая окружность получается после переноса на вектор $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Это достаточно очевидно из наглядных соображений – на рисунке изображено действие на целочисленную решетку сначала сжатием, а потом поворотом.



Чисто формально, точка с координатами (x,y) под действием указанных поворота и растяжения, переходит в точку с координатами $\begin{matrix} x'=\frac{x}{2}-\frac{y}{2} \\ y'=\frac{x}{2}+\frac{y}{2} \end{matrix}$. Если квадрат радиуса-четное число, то x и y одной четности, поэтому x', y' - целые и $x'^2+y'^2=\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{R^2}{2}$.

Если же квадрат радиуса- число нечетное, то четность x и y различна, поэтому после сдвига на вектор $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ получим целую точку $\begin{matrix} x'' = \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \\ y'' = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \end{matrix}$ и

$$(x'' - \frac{1}{2})^2 + (y'' - \frac{1}{2})^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{R^2}{2}.$$

Задача 16. (А.Заславский, Б.Френкин)

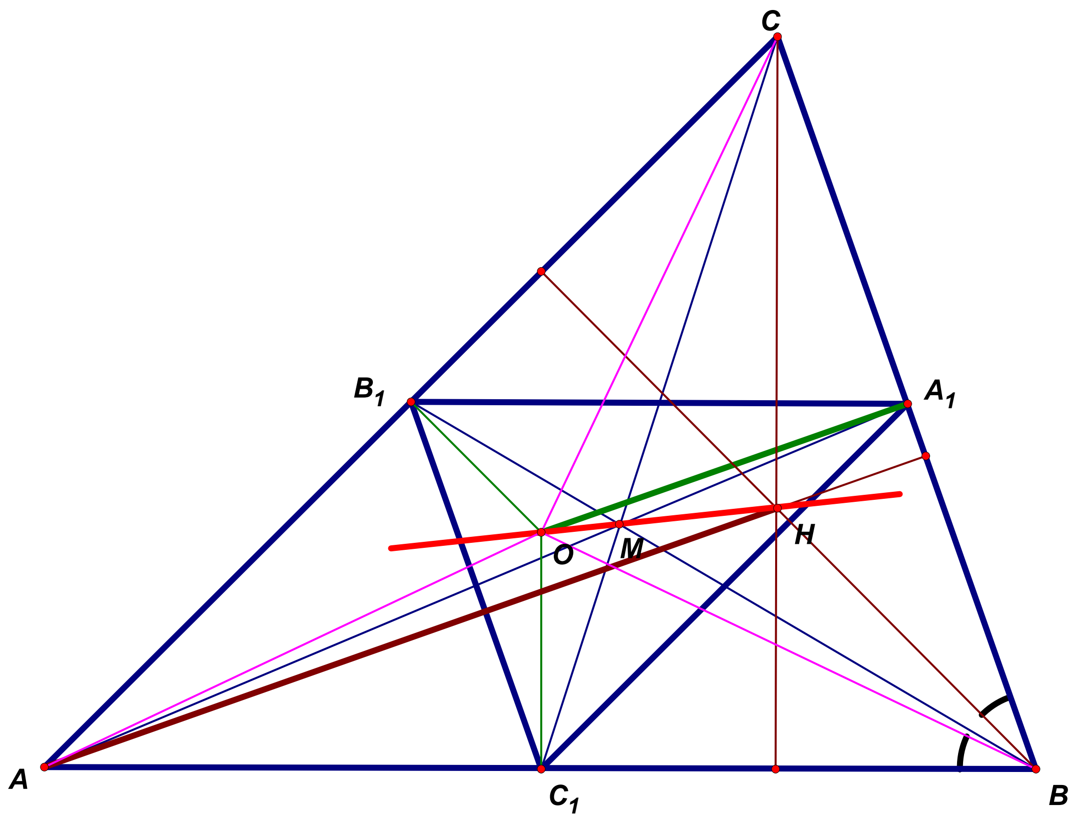
В остроугольном неравностороннем треугольнике отметили 4 точки: центры вписанной и описанной окружностей, центр тяжести (точка пересечения медиан) и ортоцентр (точка пересечения высот). Затем сам треугольник стерли. Оказалось, что невозможно установить, какому центру соответствует каждая из отмеченных точек. Найдите углы треугольника.

Решение:

Треугольник, удовлетворяющий условию задачи, равнобедренный с углами

$\arccos\frac{1}{4}; \arccos\frac{1}{4}; \pi - 2\arccos\frac{1}{4}$.

Пусть ABC – исходный треугольник, A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, CA, AB соответственно. Так как треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны относительно общего центра тяжести M (с коэффициентом $-\frac{1}{2}$), а центр O описанной окружности треугольника ABC является ортоцентром треугольника $A_1B_1C_1$, - точка M лежит на отрезке OH (H – ортоцентр треугольника ABC) и HM=2MO (прямая, содержащая эти три центра, называется *прямой Эйлера* треугольника ABC).



Поэтому, если точка I (центр вписанной окружности) не лежит на одной прямой с тремя остальными точками, то можно однозначно установить роль каждой из точек в треугольнике ABC. Отметим, что эта прямая проходит не более, чем через одну вершину треугольника, так что можно считать, что точки A и B не лежат на ней.

Так как $\angle OBA = \angle HBC = \frac{\pi}{2} - \angle C$, BI является биссектрисой угла HBO. Следовательно, точка I лежит на отрезке OH, причем OI=2IH (иначе роль точек устанавливается однозначно). По свойству биссектрисы получаем, что BO=2BH. Рассуждая аналогично, получим, что AO=2AH. Таким образом, $AH = BH = \frac{R}{2}$, где R – радиус описной около ABC окружности.

Заметим теперь, что из гомотетии, указанной в начале решения, следует также, что $AH = 2OA_1$ (и эти отрезки параллельны). Понятно также, что $OA_1 = R\cos A$ (т.к. $\angle BOA_1 = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}2\angle A$). Поэтому $AH = 2R\cos A \Rightarrow \frac{R}{2} = 2R\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{1}{4}$.

Точно также доказывается, что $\cos B = \frac{1}{4}$.

Задача 17. (А.Мякишев)

В треугольник ABC вписана окружность и отмечен ее центр I и точки касания P,Q,R со сторонами BC, CA и AB соответственно. Одной линейкой постройте точку K, в которой окружность, проходящая через вершины B и C, касается (внутреннем образом) вписанной окружности.

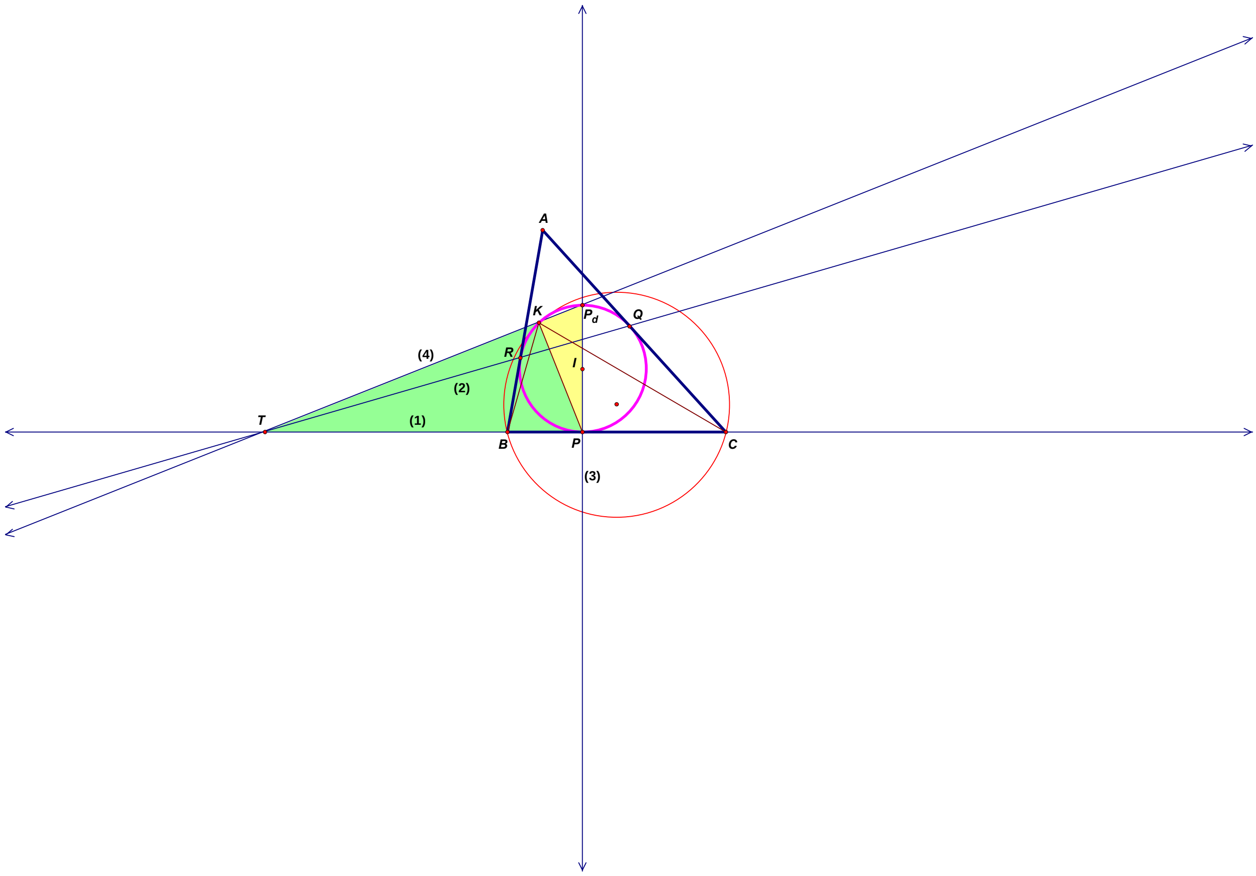
Решение:

Согласно известной теореме Штейнера, *если на плоскости фиксирована окружность с отмеченным центром, то одной линейкой можно построить все то же самое, что и линейкой с циркулем.*

Но применение стандартных методов, не учитывающих особенностей заданной в условии конструкции, требует изрядного количества «шагов». Естественно, требовалось при построении ограничиться минимальным количеством линий.

Оказывается, можно обойтись всего лишь четырьмя!

Сразу заметим, что если AB=AC, то построение очевидно (K совпадает с точкой, диаметрально противоположной точке P) и будем рассматривать случай, когда $AB \neq AC$.



Построение:

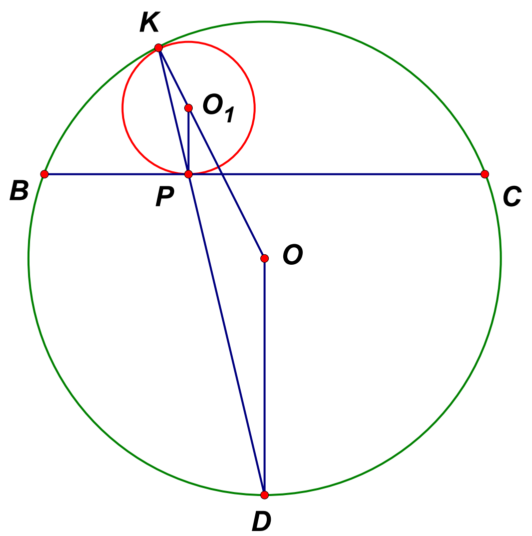
1. Проведем прямую BC .
2. Проведем прямую QR и отметим точку T пересечения этой прямой с прямой BC.
3. Построим точку P_d , диаметрально противоположную точке P.
4. Проведем прямую P_dT и отметим точку K – вторую точку пересечения этой прямой с вписанной окружностью.

Точка K и есть искомая.

Доказательство:

Понятно, что точка T будет делить отрезок BC в том же отношении, что и точка P (по теореме Чевы, $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$, а по теореме Менелая, $\frac{BT}{TC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$, $\Rightarrow \frac{BP}{PC}=\frac{BT}{TC}$).

Пусть интересующая нас окружность построена. Тогда KP – биссектриса угла BKC (по известной *лемме Архимеда – пусть прямая пересекает данную окружность в точках B и C; рассмотрим произвольную окружность, касающуюся данной в точке K, а прямой BC в точке P; тогда прямая KP проходит через середину одной из двух дуг BC –* справедливость этого факта вытекает из подобия равнобедренных треугольников KO_1P и KOD).



По свойству биссектрисы, $\dfrac{BP}{CP} = \dfrac{KB}{KC} = \lambda \neq 1$.

Поэтому точка K лежит на *окружности Аполония* (см. решение задачи № 7, способ № 3) для отрезка BC с отношением λ, построенной на PT как на диаметре, т.е. $\angle\ TKP$ – прямой, или, что тоже, прямым является угол $\angle\ PKP_d$.

Из этих рассуждений следует обоснование нашего построения.

Задача 18. (В. Протасов)

На плоскости даны три прямые l_1, l_2, l_3, образующие треугольник, и отмечена точка O – центр описанной окружности этого треугольника. Для произвольной точки X плоскости обозначим через X_i точку, симметричную точке X относительно прямой l_i, $i = 1,2,3$.

а) Докажите, что для произвольной точки M прямые, соединяющие середины отрезков O_1O_2 и M_1M_2 , O_2O_3 и M_2M_3 , O_3O_1 и M_3M_1 , пересекаются в одной точке;

б) где может лежать эта точка пересечения?

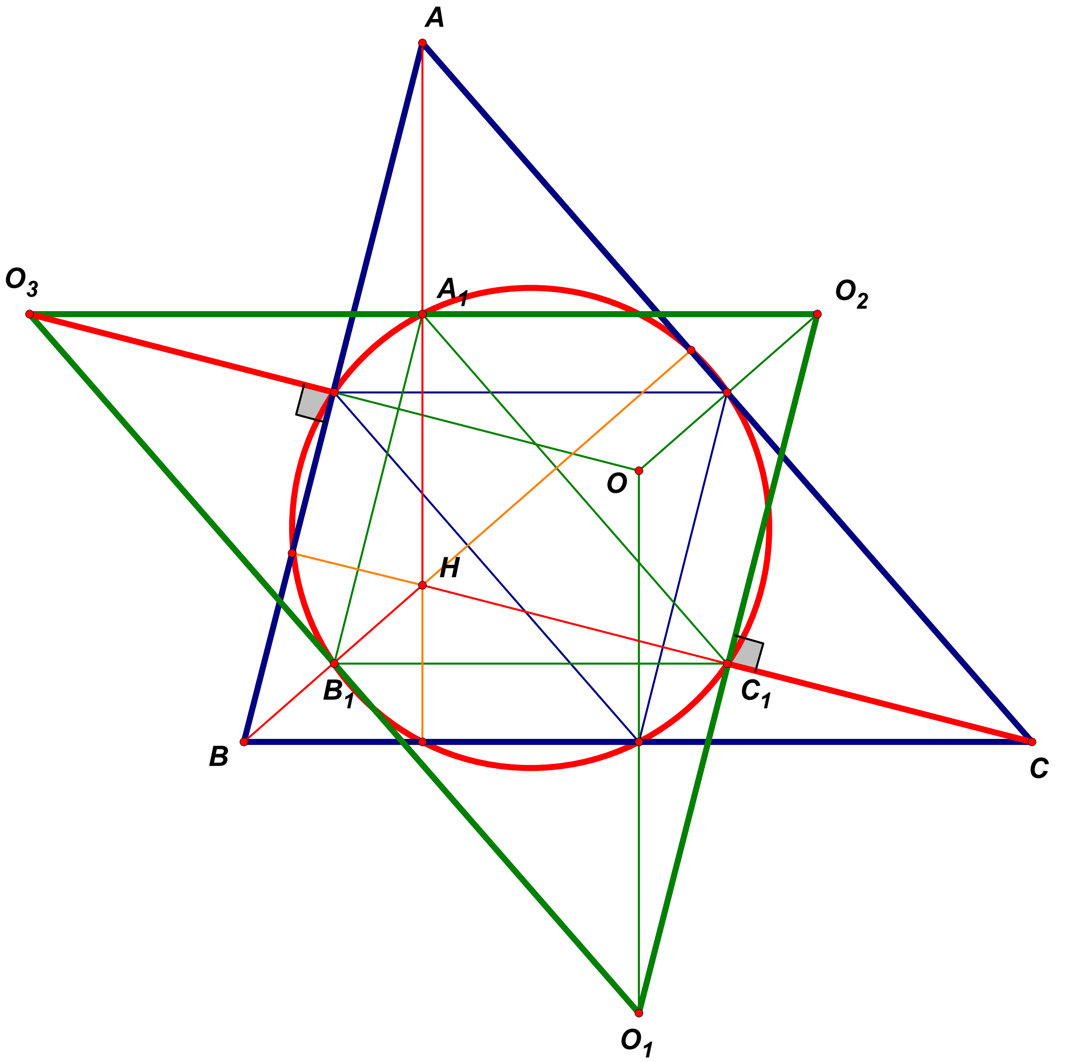
Решение:

Первый способ.

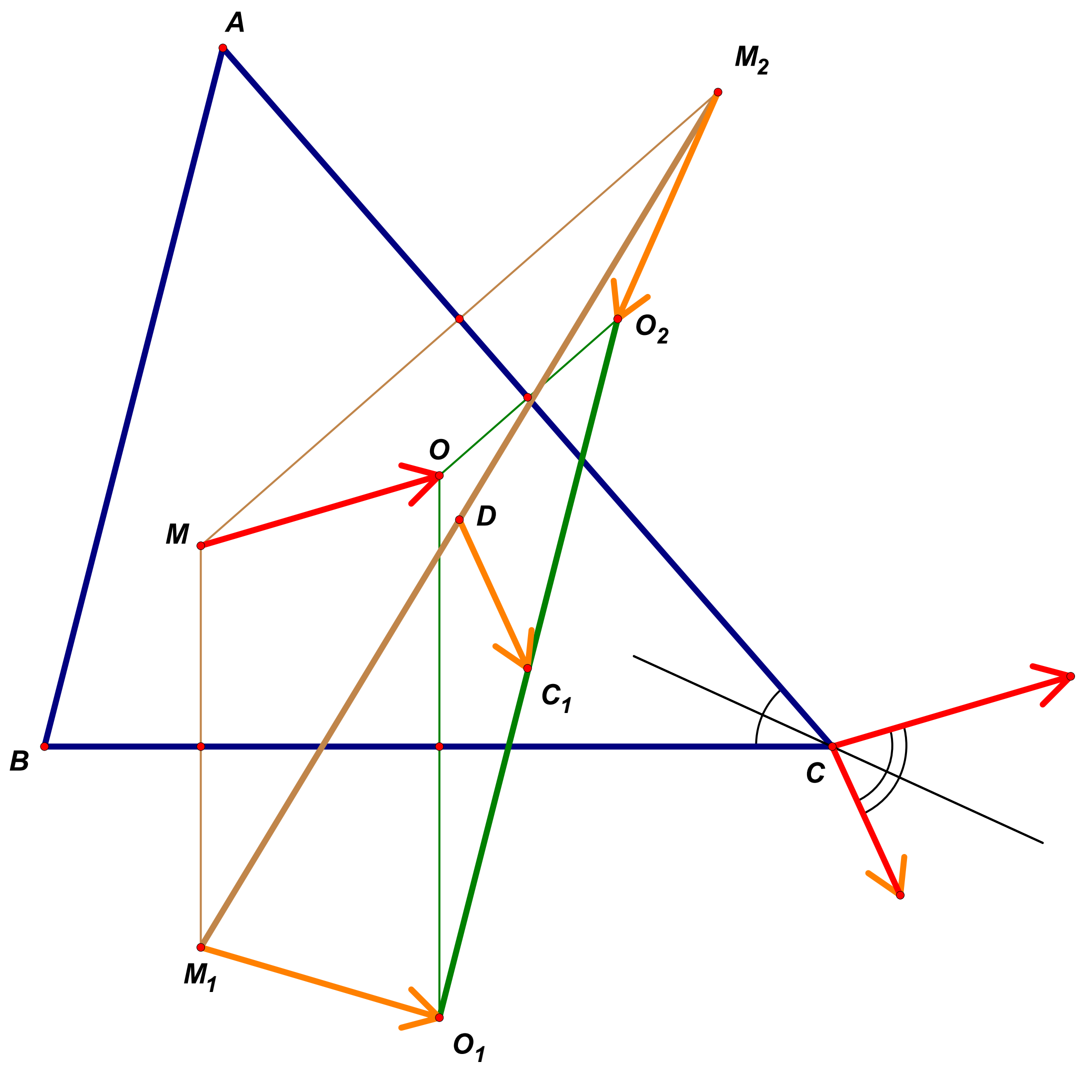
Покажем, что эти прямые пересекаются в точке, лежащей на *окружности Эйлера* .

(Напомним, что окружностью Эйлера треугольника ABC называют окружность, описанную около его серединного треугольника, т.е. проходящую через середины его сторон. На этой окружности также лежат основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами.)

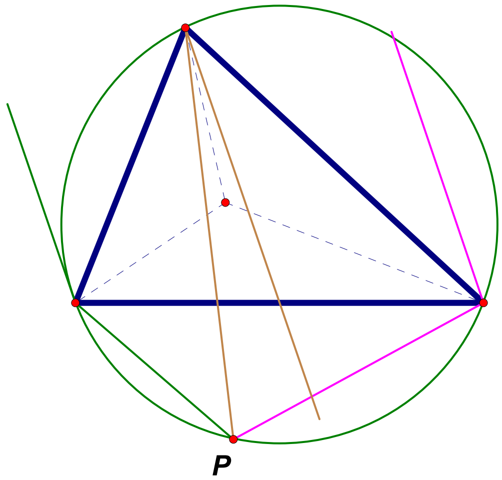
Пусть ABC – треугольник, образованный прямыми l_i, H – его ортоцентр. Тогда середины O_1O_2 , O_2O_3 , O_3O_1 совпадают с серединами отрезков AH, BH, CH (в дальнейшем будем обозначать их A_1, B_1, C_1) и, стало быть, лежат на окружности Эйлера треугольника ABC. Действительно, стороны треугольника $O_1O_2O_3$ параллельны средним линиям треугольника ABC и вдвое больше их, поскольку переводятся друг в друга гомотетией с центром в O и коэффициентом 2. Следовательно, треугольник $O_1O_2O_3$ центрально симметричен ABC. Значит, прямая, проходящая через C и середину O_1O_2 , параллельна прямой, проходящей через O_3 и середину AB, т.е. совпадает с высотой треугольника ABC, а H является центром гомотетии ABC и $A_1B_1C_1$.



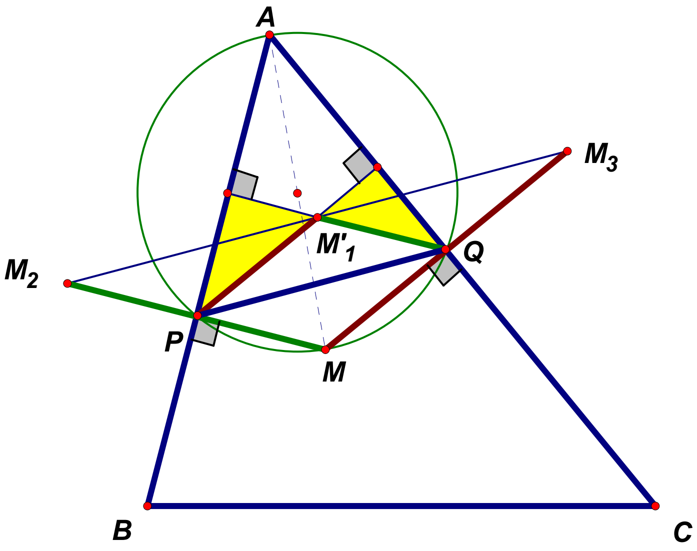
Пусть, далее, M – произвольная точка, D – середина M_1M_2. Тогда $\overrightarrow{DC_1} = \dfrac{\overrightarrow{M_1O_1} + \overrightarrow{M_2O_2}}{2}$ и, так как $\overrightarrow{M_1O_1}$ и $\overrightarrow{M_2O_2}$ получаются друг из друга поворотом вокруг точки C на угол $2C$, $\overrightarrow{DC_1}$ образует с каждым из них угол, равный C. Кроме того, $\overrightarrow{M_1O_1}$ и $\overrightarrow{M_2O_2}$ переходят в $\overrightarrow{M\ O}$ при симметрии относительно CB и CA соответственно, поэтому $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{M\ O}$ образуют равные углы с биссектрисой угла C (а значит, равные углы и с биссектрисой угла C_1 в треугольнике $A_1B_1C_1$).



Проведя аналогичные рассуждения для двух других середин, приходим к выводу, что прямые, соединяющие A_1, B_1, C_1 с серединами сторон треугольника $M_1M_2M_3$, симметричны относительно биссектрис треугольника $A_1\ B_1C_1$ прямым, проходящим через A_1, B_1, C_1 и параллельным OM.
В заключении воспользуемся следующей классической теоремой планиметрии:
Тройка прямых, выходящих из вершин треугольника, пересекается в одной точке, расположенной на описанной около этого треугольника окружности, тогда и только тогда, когда прямые, симметричные данным относительно биссектрис соответствующих углов, параллельны.
(Несложное доказательство использует простой подсчет углов).



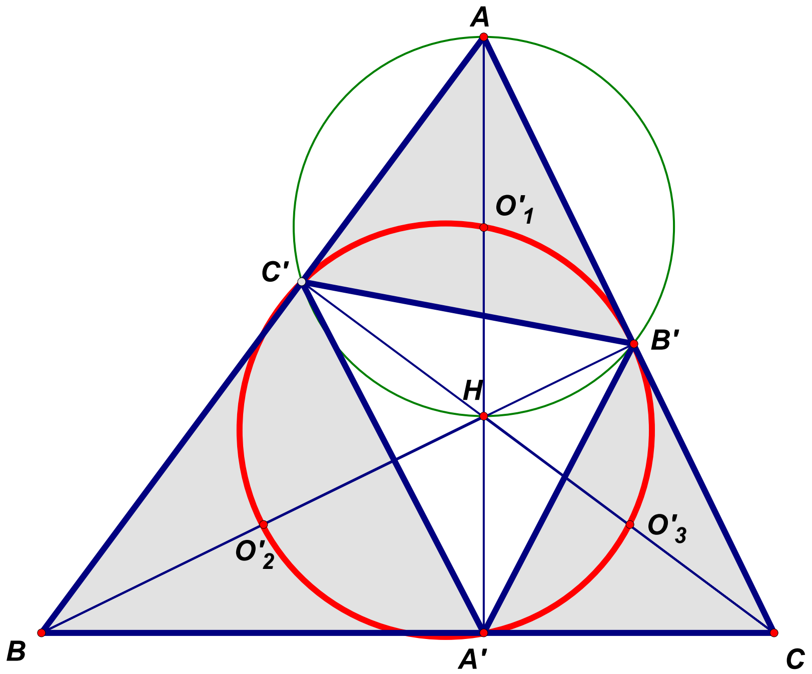
Согласно этой теореме, тройка прямых в нашей задаче пересекается на описанной около треугольника $A_1\ B_1C_1$ окружности, т.е. на окружности Эйлера исходного треугольника.
Второй способ.
(*Авксентьев Евгений,* г. Ростов-на-Дону, МОУ гимназия № 5).
Итак, ABC – треугольник, образованный прямыми l_i, H – его ортоцентр и A', B', C' - основания высот, опущенных на стороны *BC, CA, AB* соответственно.
Дадим теперь следующее определение:
Пусть имеются две подобные фигуры Ψ_1 и Ψ_2 и некоторое преобразование подобия H, переводящее одну фигуру в другую. Скажем, что *две фигуры* Φ_1 *и* Φ_2 *одинаково расположены относительно* Ψ_1 *и* Ψ_2, если преобразование H также переводит Φ_1 в Φ_2.
Теперь докажем, что точки M_1' (середина M_3M_2) и M одинаково расположены относительно треугольников $AB'C'$ и ABC (как известно, эти треугольники подобны с коэффициентом $\frac{1}{|\cos A|}$, причем подобие это можно представить как композицию осевой симметрии относительно биссектрисы угла A и гомотетии с центром в A – см. замечание к решению задачи № 10). Для этого достаточно показать, что $AM_1' = AM|\cos A|$ (отношение расстояния от отрезка до его образа равно коэффициенту подобия) и что отношение расстояний от точки M_1' до AB и AC обратно пропорционально отношению расстояний от M до тех же сторон (т.е. прямая AM_1' при симметрии относительно биссектрисы угла A переходит в прямую AM).



Так как $M_1'Q$ – средняя линия треугольника M_2MM_3, то она перпендикулярна AB. Из тех же соображений $M_1'P$ перпендикулярна AC, поэтому M_1' - ортоцентр треугольника APQ, а значит, $AM_1' = 2\rho|\cos A|$, где ρ - радиус окружности, описанной около APQ (как было показано в решении задачи № 16). Очевидно, что $\rho = \dfrac{AM_1'}{2}$. Равенство же обратных отношений до сторон вытекает из подобия заштрихованных на рисунке треугольников. Точно также доказывается, что M_2' и M одинаково расположены относительно $A'BC'$ и ABC, а M_3' и M - относительно $A'B'C$ и ABC.

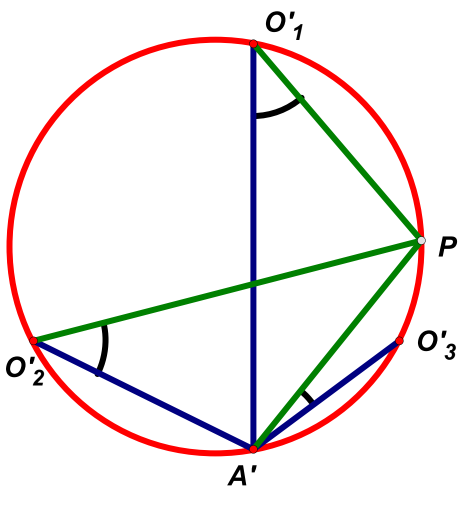
Теперь, если в качестве M мы выберем точку O – центр описанной около ABC окружности, то, очевидно, точки O_1', O_2', O_3' будут серединами отрезков, соединяющих ортоцентр H треугольника ABC с его вершинами (Поскольку прямые, соединяющие вершину треугольника с H и O, симметричны относительно соответствующей биссектрисы, – факт, с которым мы уже сталкивались при решении задачи № 16- и потому, например, точка O_1' лежит на прямой AH. Кроме того, $AO = R$ и $AH = 2R|\cos A| \Rightarrow AO_1' = \dfrac{AH}{2}$ - и т.д.).

Из доказанной нами одинаковой расположенности следует, что прямые $O_1'M_1'$, $O_2'M_2'$ и $O_3'M_3'$ одинаково расположены относительно треугольников $AB'C'$, $A'BC'$ и $A'B'C$ (т.е. $O_1'M_1'$ и $O_2'M_2'$ одинаково расположены относительно $AB'C'$ и $A'BC'$ и т.д.- циклическими перестановками).



Кроме того, понятно (ведь при подобии треугольников соответственные элементы переходят в соответственные, и, значит, центры описанных окружностей- друг в друга), что и прямые $O_1'A'$, $O_2'A'$ и $O_3'A'$ одинаково расположены относительно тех же треугольников, причем все эти четыре точки находятся на одной окружности – окружности Эйлера треугольника *ABC*.

Наконец, отсюда заключаем, что углы между парами $O_1'M_1'$ и $O_1'A'$, $O_2'M_2'$ и $O_2'A'$, $O_3'M_3'$ и $O_3'A'$ одинаковы.



Таким образом, мы показали, что прямые $O_1'M_1'$, $O_2'M_2'$ и $O_3'M_3'$ пересекаются в одной точке, расположенной на окружности Эйлера исходного треугольника.

Задача 19. (А. Тарасов)

Как известно, Луна вращается вокруг Земли. Будем считать, что Земля и Луна – это точки, а Луна вращается вокруг Земли по круговой орбите с периодом один оборот в месяц.

Летающая тарелка находится в плоскости лунной орбиты. Она может перемещаться прыжками через Луну и Землю – из старого места (точки A) она моментально

появляется в новом (в точке A') так, что в середине отрезка $A\,A'$ находится или Луна, или Земля. Между прыжками летающая тарелка неподвижно висит в космическом пространстве.
а) Определите, какое минимальное количество прыжков потребуется летающей тарелке, чтобы допрыгнуть из любой точки внутри лунной орбиты до любой другой точки внутри лунной орбиты.
б) Докажите, что летающая тарелка, используя неограниченное количество прыжков, может допрыгнуть из любой точки внутри лунной орбиты до любой другой точки внутри лунной орбиты за любой промежуток времени, например, за секунду.

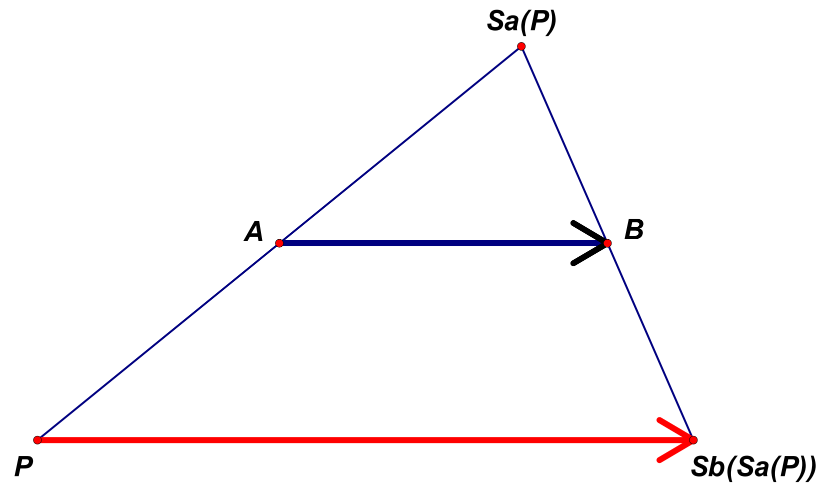
Решение:

а)

Из любой точки внутри лунной орбиты можно допрыгнуть до любой другой точки внутри лунной орбиты за два прыжка. Для этого оба раза надо прыгнуть относительно луны, сначала в момент, когда Луна находится в точке L_1, а второй раз когда луна в точке L_2.

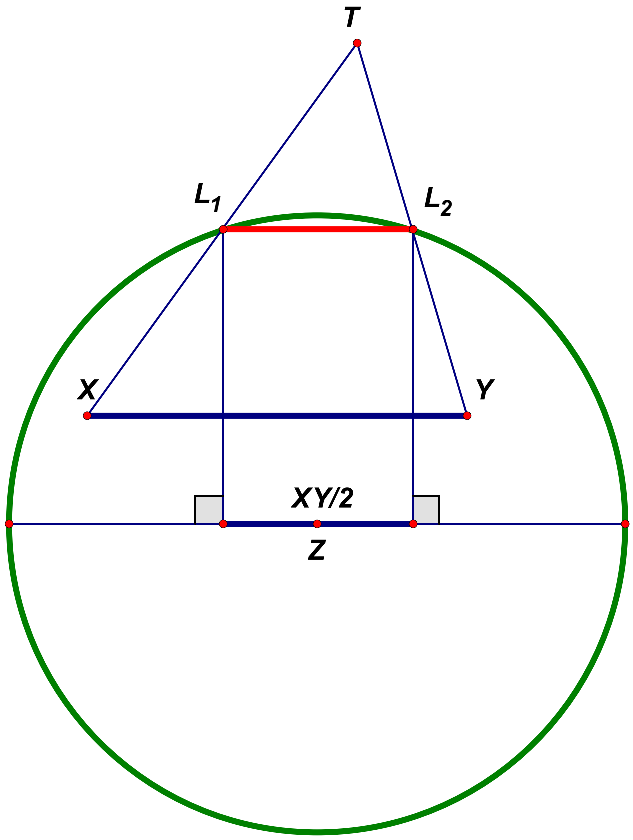
После двух прыжков летающая тарелка переместится на вектор $2\overrightarrow{L_1L_2}$.

(Поскольку композиция двух центральных симметрий есть параллельный перенос на удвоенный вектор с началом в первом центре и концом во втором – см. рис.)

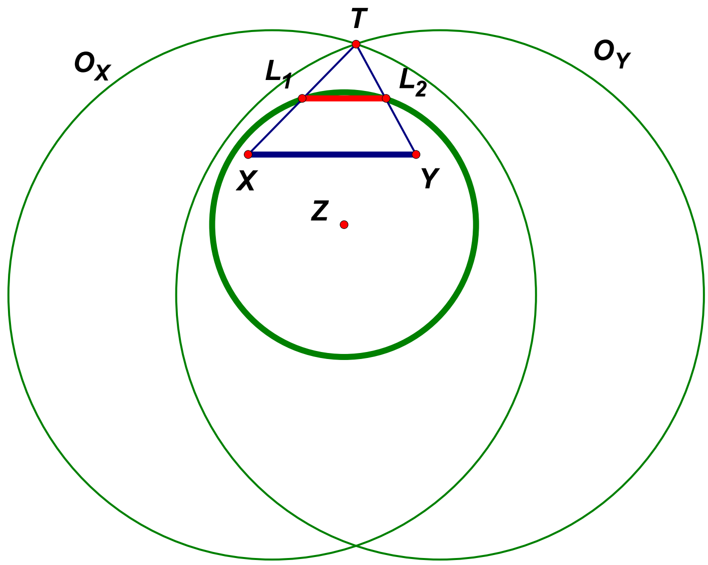


Для любых двух точек внутри орбиты X и Y можно найти хорду L_1L_2, такую , что $|XY| = 2|L_1L_2|$.

Эту хорду можно, например, построить, проведя диаметр, параллельный *(XY)*, и отложить на нем отрезок длиной $\frac{|XY|}{2}$, середина которого совпадает с центром окружности, а затем из концов этого отрезка провести перпендикуляры, которые и отсекут искомую хорду.



А можно рассмотреть гомотетии с центрами в точках X и Y и коэффициентом 2. Образы лунной орбиты при этом должны пересечься, поскольку, если радиус лунной орбиты R и центры образов- O_x, O_y, то $|O_xO_y| < |XY| + 2(|XZ| + |YZ|) < 4R$.



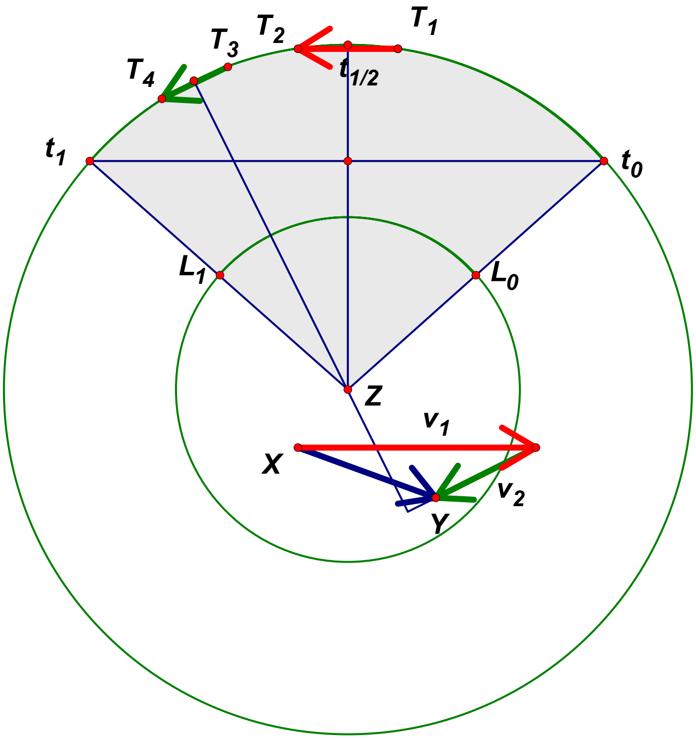
б)

Пусть начальное положение Луны- L_0, конечное – L_1.

Будем рассматривать пару прыжков сначала относительно Земли, а потом относительно Луны , как двойной прыжок. При этом тарелка перемещается на вектор $2\overrightarrow{ZL}$, конец этого вектора- точка T – будет лежать на дуге окружности t_0t_1 с центром в Z и радиусом, вдвое большим, чем радиус орбиты Луны. Будем такие вектора в дальнейшем обозначать просто $\vec{T}$.

Мы прыгаем мгновенно, значит, в любой момент времени мы можем прыгнуть на *целое* число прыжков $k\,\vec{T}$ (чтобы прыгнуть на вектор $-\vec{T}$, сначала надо прыгнуть относительно Луны, а потом относительно Земли).

Теперь, чтобы из точки X попасть в точку Y, надо представить вектор $\overrightarrow{XY}$ как конечную сумму векторов, состоящих из слагаемых вида $k_i\vec{T_i}$, $k_i \in Z$, а T_i – некоторый набор точек на дуге t_0t_1, расположенных последовательно друг за другом.



Сначала представим $\overrightarrow{XY}$ в виде суммы $\vec{v_1}+\vec{v_2}$, так чтобы оба этих вектора были бы перпендикулярны некоторым радиусам нашего сектора. Это можно сделать, положив $\vec{v_1}=\lambda\left(\vec{t_1}-\vec{t_0}\right), \vec{v_2}=\overrightarrow{XY}-\vec{v_1}$. Поскольку $\vec{v_1}$ перпендикулярен «серединному» радиусу при всех значениях λ и при увеличении λ по модулю $\vec{v_2}$ стремится к $-\vec{v_1}$, то при достаточно большом λ $\vec{v_2}$ также будет перпендикулярен некоторому радиусу.

Очевидно, что найдутся достаточно большие по модулю целые m_1 и m_2 и некоторые точки на дуге T_1, T_2, T_3, T_4, расположенные последовательно и такие, что $\vec{v_1}=m_1\left(\vec{T_2}-\vec{T_1}\right)$ и $\vec{v_2}=m_2\left(\vec{T_4}-\vec{T_3}\right)$.

Искомое представление получено.

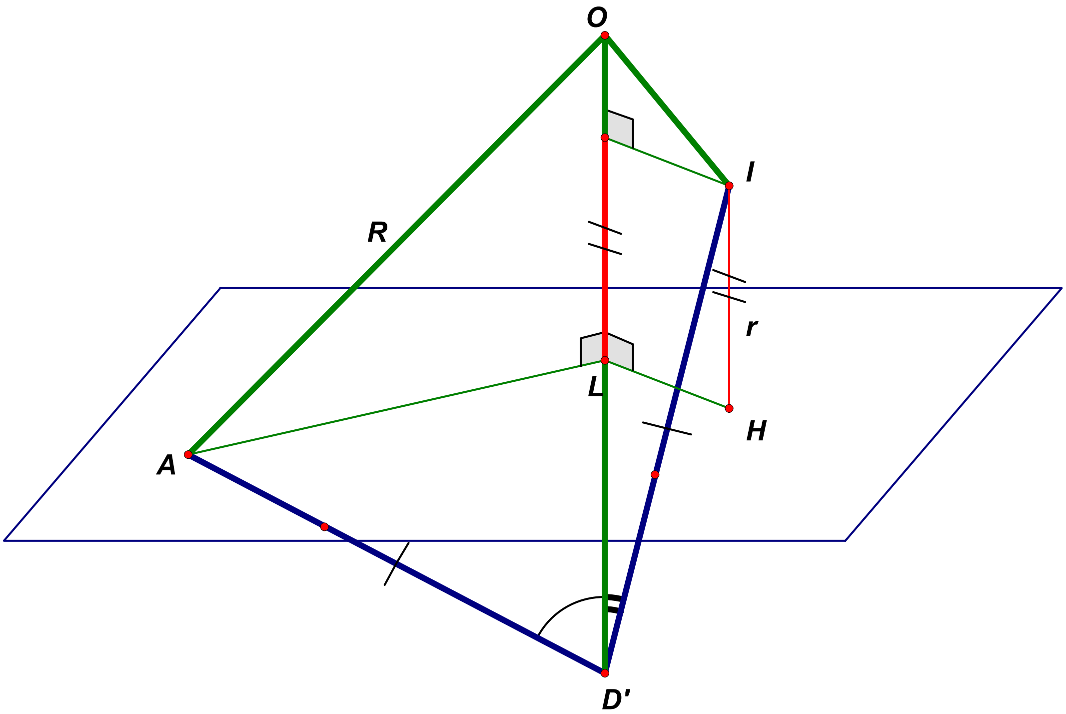
Задача 20. (А.Заславский)

Пусть I – центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$, A', B', C', D' - центры сфер, описанных около тетраэдров $IBCD$, $ICDA$, $IDBA$, $IABC$ соответственно. Докажите, что сфера, описанная около $ABCD$, целиком лежит внутри сферы, описанной около $A'B'C'D'$.

Эта задача оказалась своеобразной рекордсменкой – с ней не удалось справиться никому из принимавших участие в заочном туре.

Решение:

Пусть *R, r* – радиусы описанной и вписанной сфер *ABCD, O* – центр описанной сферы *ABCD, L* – центр описанной окружности треугольника *ABC*, *H* – проекция *I* на плоскость *ABC*. Из условия следует, что *O* и D' лежат на перпендикуляре к плоскости *ABC*, проходящем через *L*, поэтому прямые OD' и *IH* параллельны. Кроме того, $D'A = D'I$ (как радиусы сферы, описанной около *IABC*), *OA=R, IH=r.*



Дважды применим теорему косинусов – к треугольникам $AD'O$ и $OD'I$:

$R^2 = D'A^2 + D'O^2 - 2D'A \cdot D'O \cos \angle AD'O$,

$OI^2 = D'I^2 + D'O^2 - 2D'I \cdot D'O \cos \angle ID'O$.

Вычитая из первого равенства второе, получим:

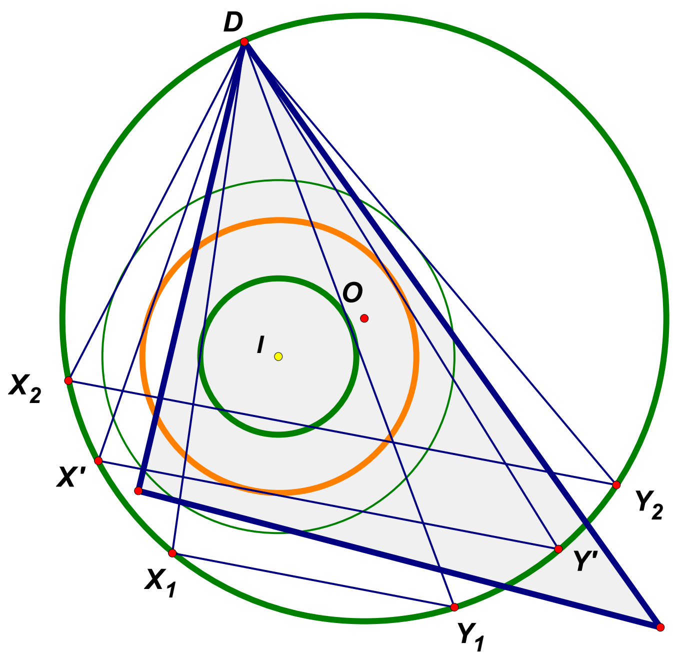
$R^2 - OI^2 = 2D'O \cdot \left| \left(D'A \cos \angle AD'O - D'I \cos \angle ID'O \right) \right| = 2D'O \cdot IH$.

Следовательно, $D'O = \dfrac{R^2 - OI^2}{2r}$.

Аналогично доказывается, что и точки A', B', C' удалены от *O* на такое же расстояние. Таким образом, сферы *ABCD* и A', B', C', D' *концентричны* (т.е. их центры совпадают) и $D'O = \rho$ - радиус сферы, описанной около A', B', C', D'.

Докажем, что $\rho > R \Leftrightarrow \dfrac{R^2 - OI^2}{2R} > r$.

Для этого проведем плоскость *DOI*. Она пересекает описанную и вписанную сферу по окружностям с центрами *O, I* и радиусами *R, r* , а тетраэдр – по некоторому треугольнику. Вершина *D* этого треугольника лежит на большей окружности, а из двух других вершин по крайней мере одна лежит внутри этой окружности. Кроме того, меньшая окружность целиком лежит внутри этого треугольника и внутри большей окружности.



Поэтому, если провести через D хорды DX_1 и DY_1 большей окружности, касающейся меньшей, то меньшая окружность окажется строго внутри треугольника DX_1Y_1. Будем теперь «раздувать» меньшую окружность, сохраняя центр и увеличивая радиус. Из соображений непрерывности следует, что наступит момент, когда «раздутая» окружность (некоторого радиуса r') будет *вписана* в треугольник $DX'Y'$, образованный парой касательных с вершиной в D.

Этот же треугольник будет *вписан* в большую окружность, поэтому для него выполняется классическое соотношение, выражающее расстояние между центрами вписанной и описанной окружности через их радиусы (т.н.*формула Эйлера*):

$OI^2 = R^2 - 2Rr'$.

Следовательно, $r' = \dfrac{R^2 - OI^2}{2R}$. Понятно также, что $r' > r$.

Задача решена.

Задача 21. (Н. Долбилин)

Планета «Тетраинкогнито», покрытая «океаном», имеет форму правильного тетраэдра с ребром 900 *км. Какую площадь океана накроет «цунами» через* 2 *часа после тетратрясения с эпицентром в*

а) центре грани,

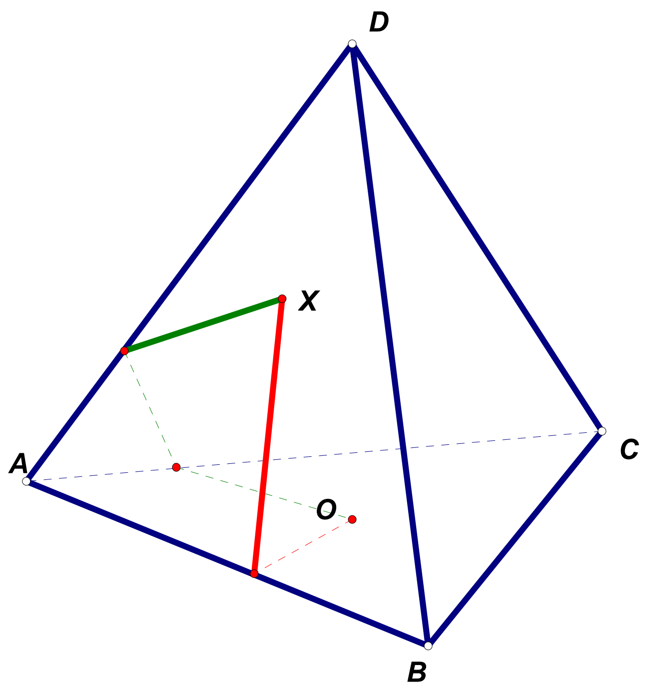
б) середине ребра,

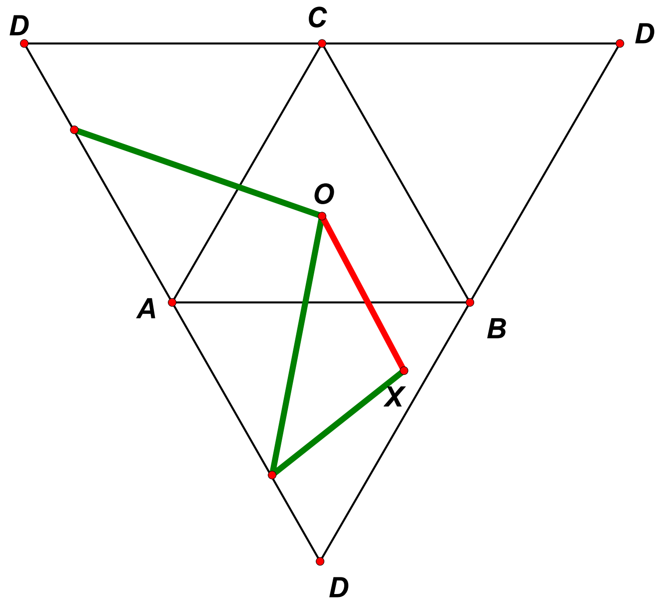
если скорость распространения цунами 300 *км/час?*

Решение:

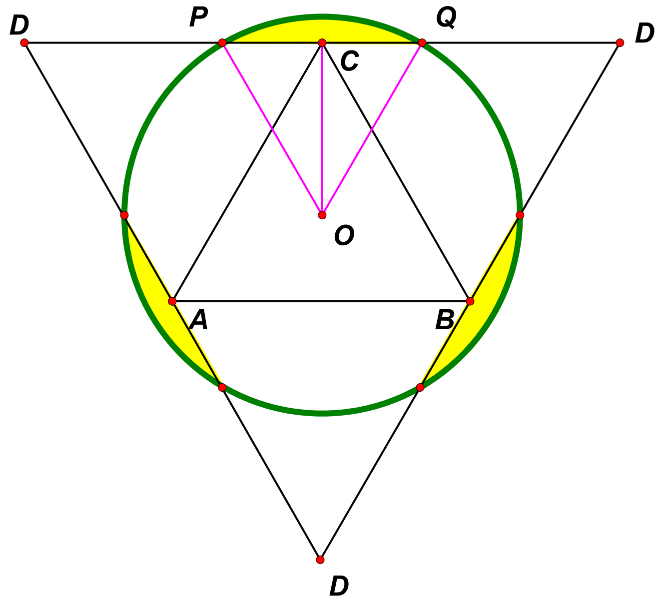
а)

Рассмотрим развертку в виде правильного треугольника и докажем, что кратчайший путь из его центра в любую точку будет на этой развертке отрезком. Пусть O - центр грани ABC, X - точка на грани ABD и некоторый путь из O в X пересекает сначала ребро AC. Если продолжить этот путь на развертке, мы попадем в некоторую точку на ребре AD. Но в эту точку ведет и симметричный путь через ребро AB, через которое в X можно попасть напрямую.





Поэтому площадь, которую накроет цунами, есть разность между площадью круга радиусом 600 км и утроенной площадью сегмента.



$$\cos\angle POC=\frac{OC}{OP}=\frac{900}{\sqrt{3}\cdot 600}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \angle POQ=\frac{\pi}{3}.$$

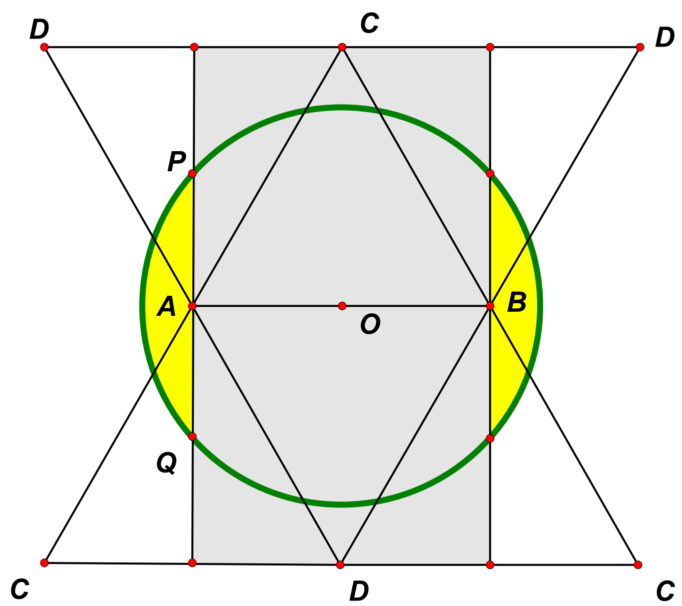
Площадь сегмента есть разность площадей сектора и треугольника:

$$S_{сег.}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}600^2-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}600^2\Rightarrow S_{цунами}=\pi\cdot 600^2-\frac{3}{2}\cdot 600^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=180000\pi+270000\sqrt{3}\,.$$

б)

Рассматривая «двойную» развертку тетраэдра, и рассуждая как в предыдущем случае, убеждаемся в том, что кратчайшие пути лежат внутри заштрихованного прямоугольника.



Площадь, которую накроет цунами, есть разность площади круга и удвоенной площади сегмента.

$$\angle POA=\arccos\frac{OA}{OP}=\arccos\frac{3}{4}\Rightarrow \angle POQ=2\arccos\frac{3}{4}\,.$$

$PQ = 2PA = 2PO\sin\angle POA = 300\sqrt{7}$

$S_{сег.} = S_{сек.} - S_{тр.} = 2\cdot 180000\arccos\frac{3}{4} - 67500\sqrt{7}$.

$S_{иск.} = S_{кр.} - 2S_{сег.} = \pi\cdot 600^2 - 2\cdot 360000\arccos\frac{3}{4} + 135000\cdot\sqrt{7} =$

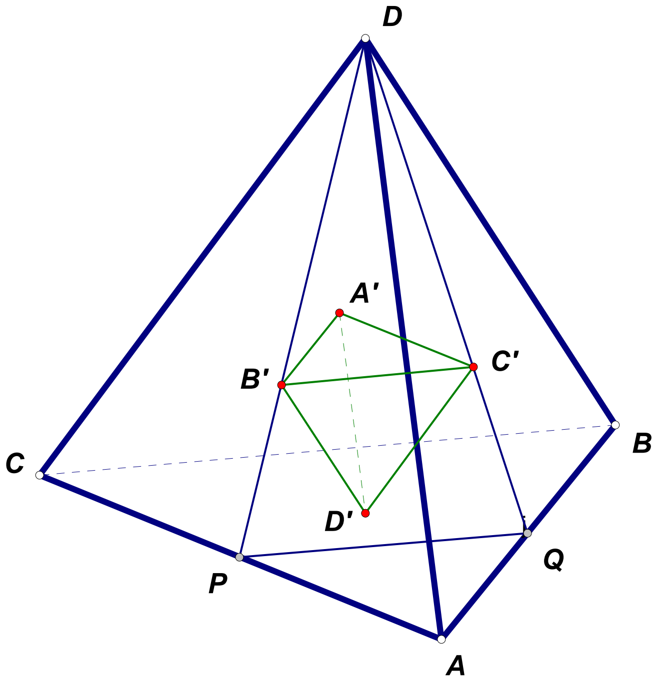
$= 720000\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{3}{4}\right) + 135000\cdot\sqrt{7} = 720000\cdot\arcsin\frac{3}{4} + 135000\cdot\sqrt{7}$.

Задача 22. (В. Босс)

К граням тетраэдра восстановлены перпендикуляры в их центрах тяжести (точках пересечения медиан). Докажите, что проекции трех перпендикуляров на четвертую грань пересекаются в одной точке.

Решение:

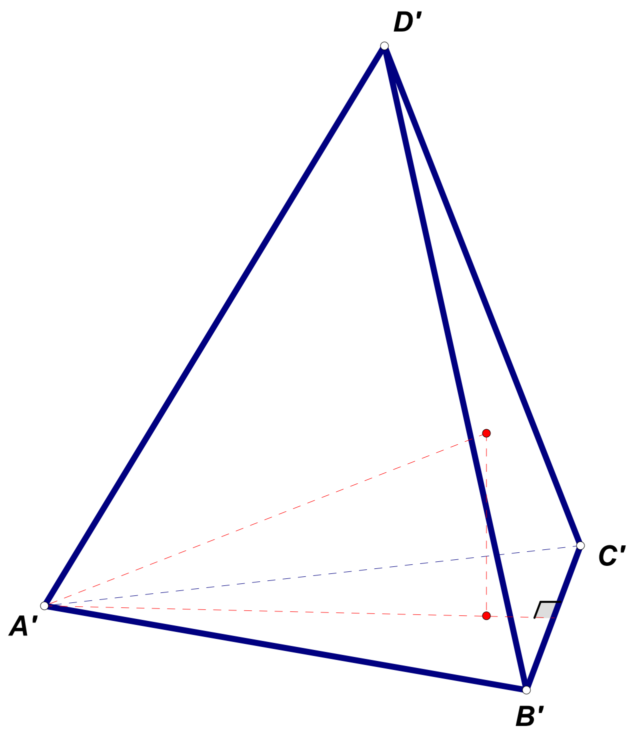
Пусть *ABCD* – данный тетраэдр, A', B', C', D' - центры тяжести граней *BCD, CDA, DAB, ABC.* Оказывается, грани тетраэдра, образованного центроидами, параллельны соответственным граням исходного тетраэдра. Так, например, плоскость *ABC* параллельна плоскости $A'B'C'$ и т.д.



Действительно, пусть точки *P* и *Q* – середины *AC* и *AB.* Так как центроид делит медиану в отношении 2: 1, то, по теореме, обратной теореме Фалеса, $B'C' \parallel PQ$. Но $PQ \parallel BC$, как средняя линия, следовательно, $B'C' \parallel BC$. Точно также, $A'C' \parallel AC$, и, по признаку параллельности двух плоскостей, грани параллельны.

Поэтому перпендикуляры, восстановленные из точек A', B', C', D' к соответствующим граням *ABCD*, являются высотами тетраэдра A', B', C', D' .

По теореме о трех перпендикулярах их проекции на плоскость грани $A'B'C'$ являются высотами этой грани и, значит, пересекаются в одной точке. Но тогда их проекции на параллельную плоскость *ABC* также пересекаются в одной точке.

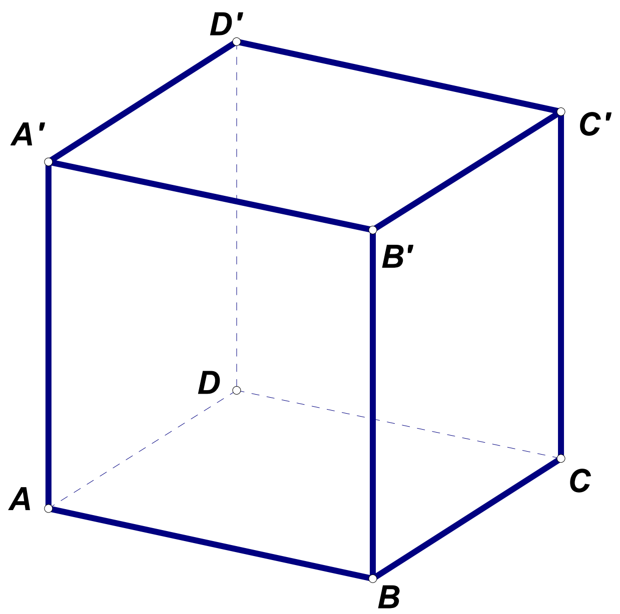


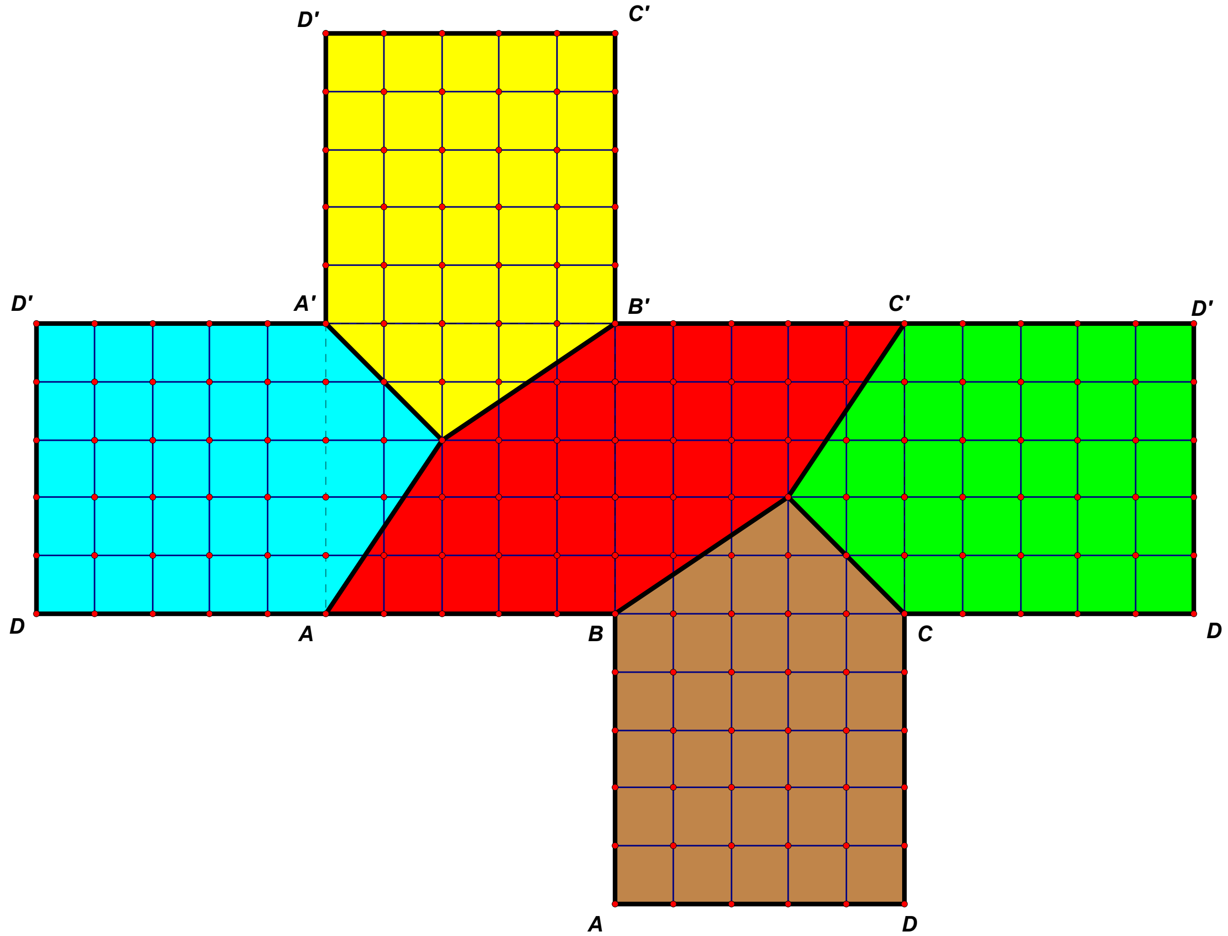
Задача 23. (Л. и Т. Емельяновы)

Оклейте куб в один слой пятью равновеликими выпуклыми пятиугольниками.

Решение:

Например, это можно сделать следующим образом, рассмотрев такую развертку куба:





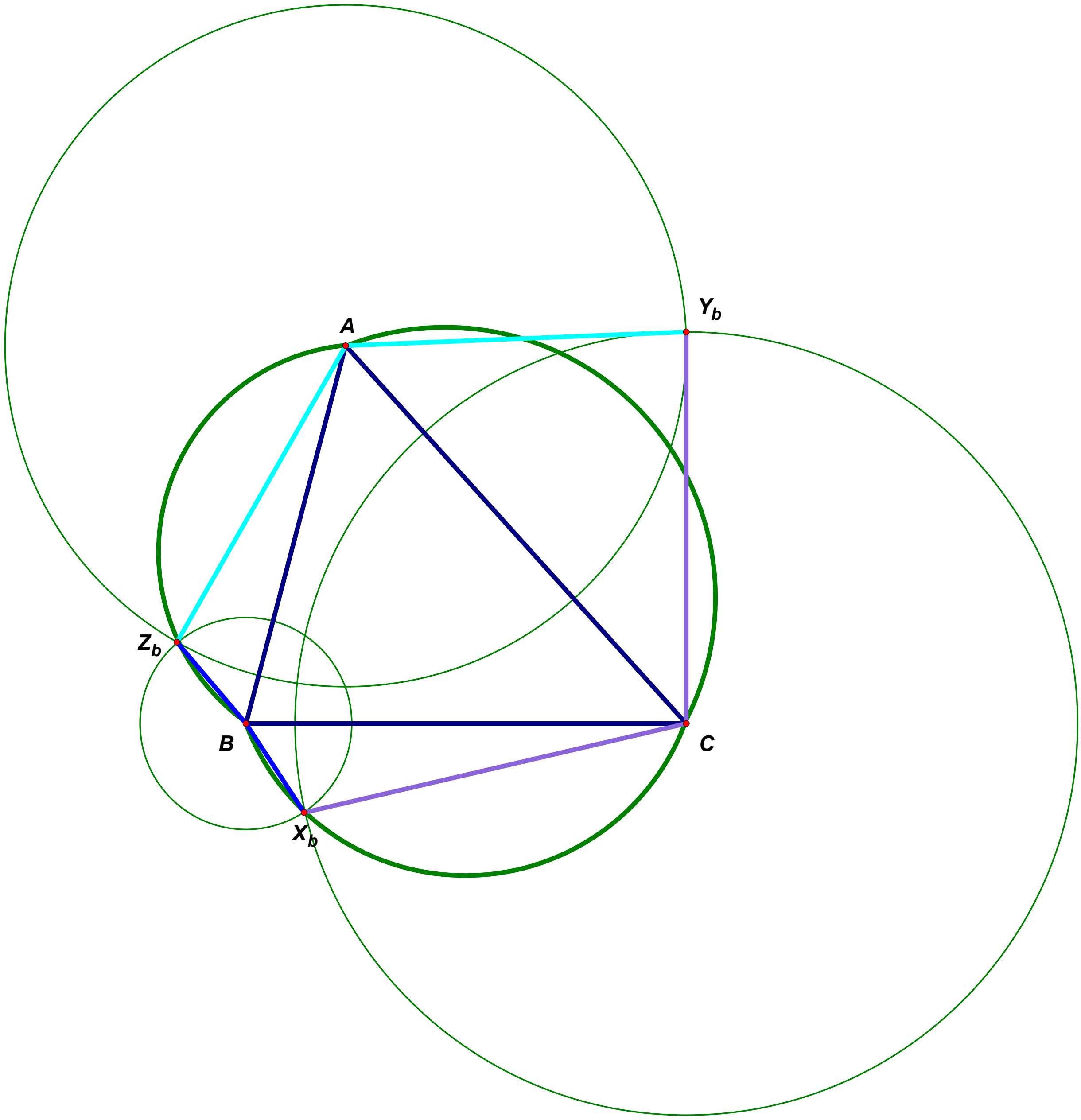
Задача 24. (В. Сендеров)

Дан треугольник, все углы которого меньше φ, *где* $\varphi < \dfrac{2\pi}{3}$. *Докажите, что в пространстве существует точка, из которой все стороны треугольника видны под углом* φ.

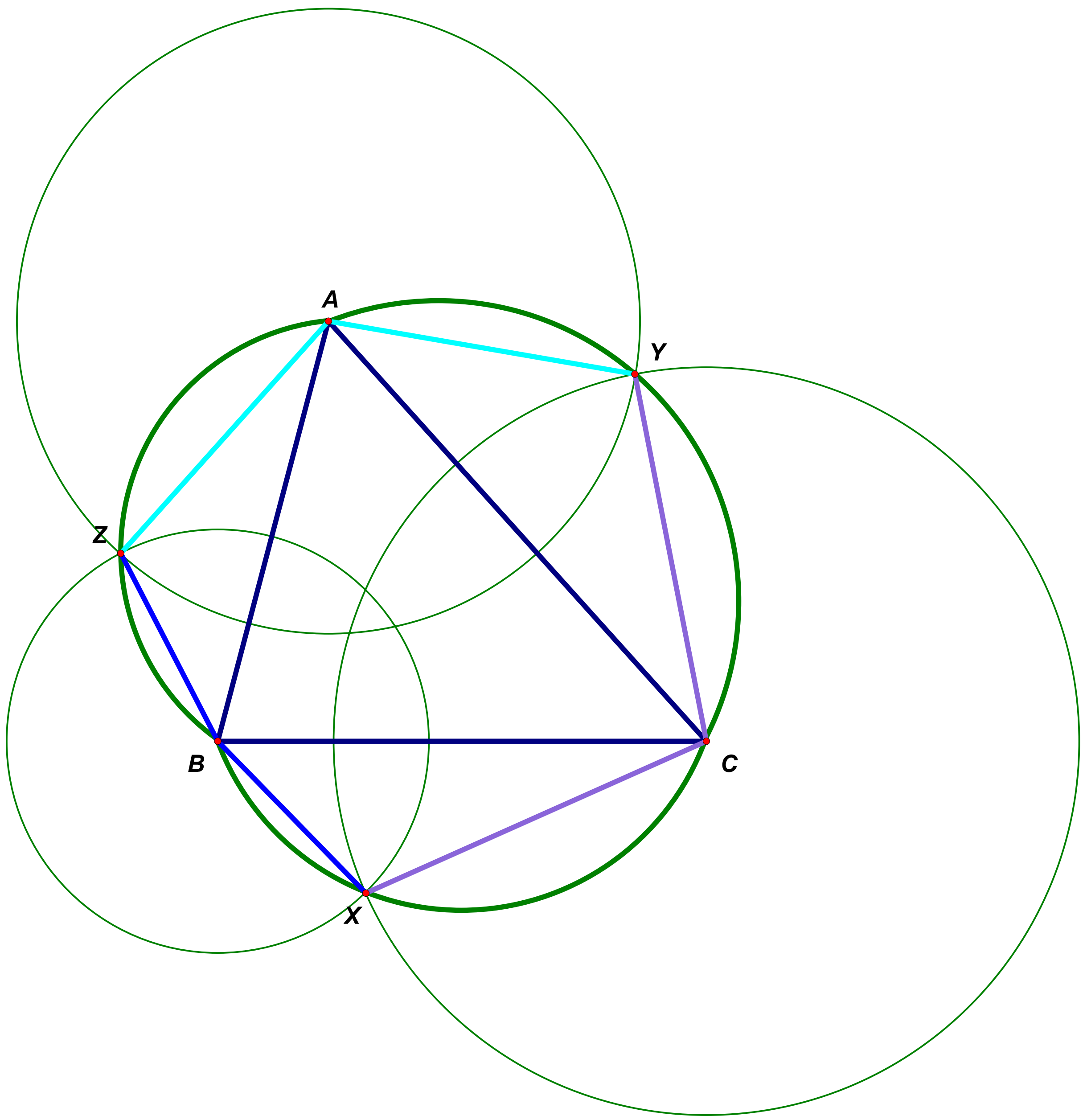
Решение:

Первый способ.

Пусть ABC – данный треугольник. Построим на каждой его стороне во внешнюю сторону дуги, вмещающие угол φ. Покажем, что на дугах BC, CA, AB найдутся точки X, Y, Z соответственно, такие что $AZ=AY$, $BZ=BX$, $CX=CY$. Пусть AC – наибольшая сторона треугольника, AB – наименьшая. Возьмем произвольную точку Z на дуге AB, найдем на дуге BC точку X, такую, что $BX=BZ$ (X определяется однозначно, так как $AB \le BC$), и построим точку Y, лежащую по разные стороны с B от прямой AC и такую, что $AY=AZ$, $CY=CX$. При $Z=B$ имеем $AY=AB$, $CY=CB$. Следовательно, $\angle AYC = \angle B < \varphi$ и Y лежит вне сегмента, построенного на AC.



При $Z=A$ точка Y не существует, так как $AC \geq BC$. Следовательно, при некотором промежуточном положении точки Z, точка Y попадает на дугу AC.

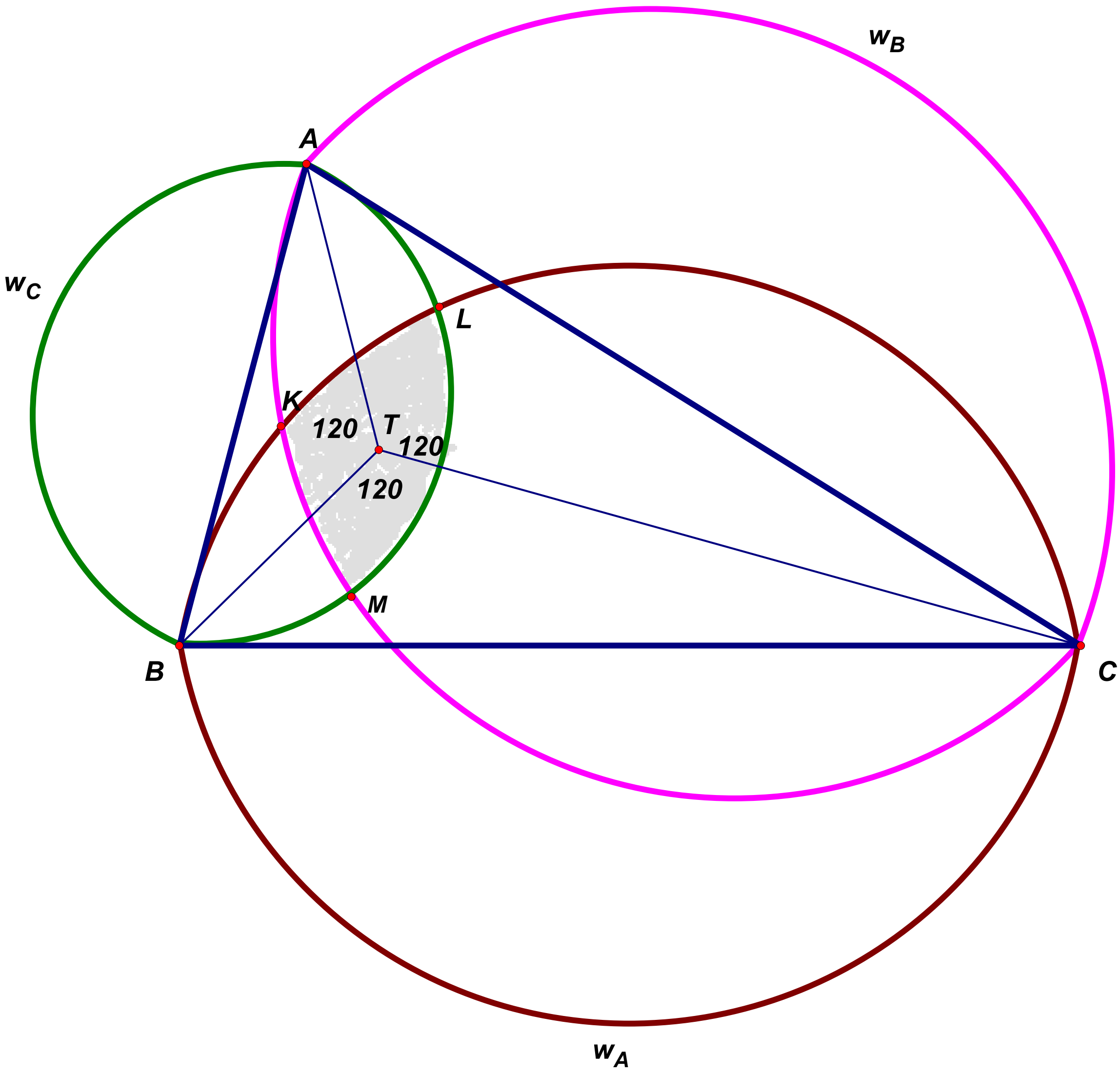


Осталось доказать, что из треугольников *ABC, ABZ, BCX, ACY* можно склеить тетраэдр, т.е. что хотя бы в одной из вершин *A, B, C* угол треугольника *ABC* меньше суммы примыкающих к той же вершине углов двух других треугольников. Если это не так, то $\angle A + \angle B + \angle C \geq 3\pi - 3\varphi > 3\pi - 3\cdot\dfrac{2\pi}{3} = \pi$ - противоречие.

(*Мы воспользовались известной теоремой стереометрии: три плоских углов с общей вершиной образуют трехгранный угол тогда и только тогда, когда любой из них меньше суммы двух других*).

Второй способ.
(*Печёнкин Николай,* г. Москва, школа № 192)
Для каждого из отрезков *AB, BC* и *CA* построим на плоскости множество точек, из которых эти отрезки видны под углом φ - получим 6 дуг. Для *BC* пусть это множество ω_A, для *AC* - ω_B и для *AB* - ω_C. *K, L, M* - точки пересечения этих множеств.

Очевидно, существует область, лежащая внутри всех трех областей с границами из двух дуг (этой области, например, принадлежит точка *Ферма-Торичелли,* из которой все стороны треугольника видны под углом $\frac{2\pi}{3}$).



Понятно, что M лежит в области, ограниченной ω_A, L – ω_B, а K – ω_C.
Далее, множество точек пространства, из которых отрезок BC виден под углом φ - поверхность, получающаяся при вращении ω_A относительно BC. Обозначим ее F_A. Аналогично получим еще две поверхности - F_B, F_C. Пересечением F_A и F_B будет некоторая непрерывная кривая, проходящая через C и K, причем K лежит внутри тела, ограниченного F_C, а C – вне его. Значит, линия пересечения F_A и F_B будет также пересекать и F_C.

Вторая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

1. (В.Смирнов) Две прямые на плоскости, пересекающиеся под углом $46°$, являются осями симметрии фигуры F. Какое наименьшее число осей симметрии может иметь эта фигура?

   Решение. Ответ: 90.

   Пусть l_1, l_2 — оси симметрии F. Применив последовательно симметрию относительно l_1, симметрию относительно l_2 и снова симметрию относительно l_1, получим симметрию относительно прямой, симметричной l_2 относительно l_1 (рис.1). Следовательно, осями симметрии F будут все прямые, образующие с l_1 углы $46°, 2\cdot 46°, \dots, n\cdot 46°, \dots$. Так как $46n$ при $n < 90$ не делится на 180, эти прямые для $n = 1, \dots, 90$ различны, т.е. F имеет по крайней мере 90 осей симметрии. С другой стороны, правильный 90-угольник удовлетворяет условию задачи и имеет ровно 90 осей симметрии.

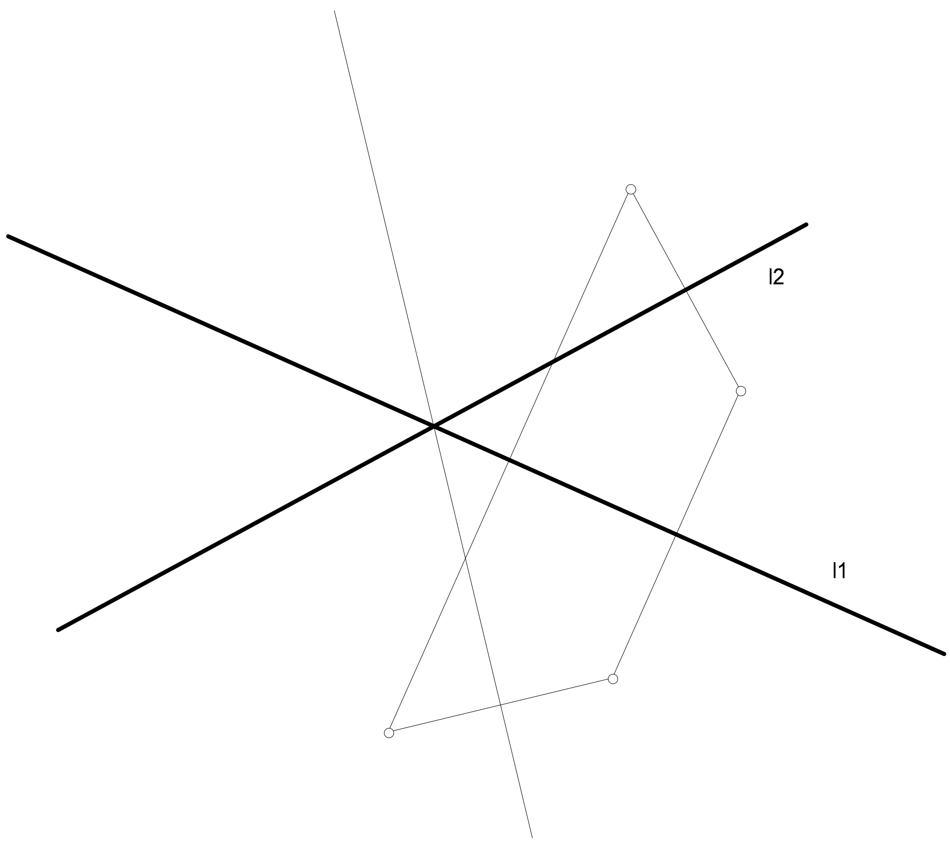


Рис.1

2. (А.Акопян) Точки A, B движутся с равными скоростями по двум равным окружностям. Докажите, что серединные перпендикуляры к AB проходят через фиксированную точку.

   Решение. (Найдено девятиклассником московской гимназии 1543 Никитой Баканчевым) Пусть l — прямая, при симметрии относительно которой окружности переходят друг в друга, A' — точка, симметричная A относительно l. Тогда точки B и A' движутся по одной окружности с противоположными скоростями, и значит, серединный перпендикуляр к отрезку $A'B$ не меняется. Точка его пересечения с l является центром описанной окружности треугольника $AA'B$, следовательно, серединный перпендикуляр к AB все время проходит через эту точку.

3. (Фольклор) На карте указаны отрезки трех прямолинейных дорог, соединяющих три деревни, но сами деревни расположены за пределами карты. Кроме того, на карте не указана пожарная часть, находящаяся на равном расстоянии от трех деревень, хотя место ее расположения

находится в пределах карты. Можно ли найти это место с помощью циркуля и линейки, если проводить построения только в пределах карты?

Решение. Возьмем на карте произвольную точку P. При гомотетии с центром P и достаточно малым коэффициентом k точки пересечения дорог перейдут в некоторые точки A, B, C, лежащие в пределах карты, так что можно найти центр O описанной около треугольника ABC окружности. Гомотетия с центром P и коэффициентом $1/k$ переводит O в искомую точку.

4. (А.Горская, И.Богданов) а) Даны два квадрата $ABCD$ и $DEFG$, причем точка E лежит на отрезке CD, а точки F, G вне квадрата $ABCD$. Найдите угол между прямыми AE и BF.

   б) Даны два правильных пятиугольника $OKLMN$ и $OPRST$, причем точка P лежит на отрезке ON, а точки R, S, T вне пятиугольника $OKLMN$. Найдите угол между прямыми KP и MS.

   Решение. а) Пусть H — вторая точка пересечения описанных около квадратов окружностей (рис.4.1). Т.к $\angle AHD = 45°$, $\angle DHF = 90°$, $\angle EHF = 135°$, точки A, E, H лежат на одной прямой. Аналогично, точки B, H, F лежат на одной прямой. Следовательно, искомый угол равен $\angle BHA = 45°$.

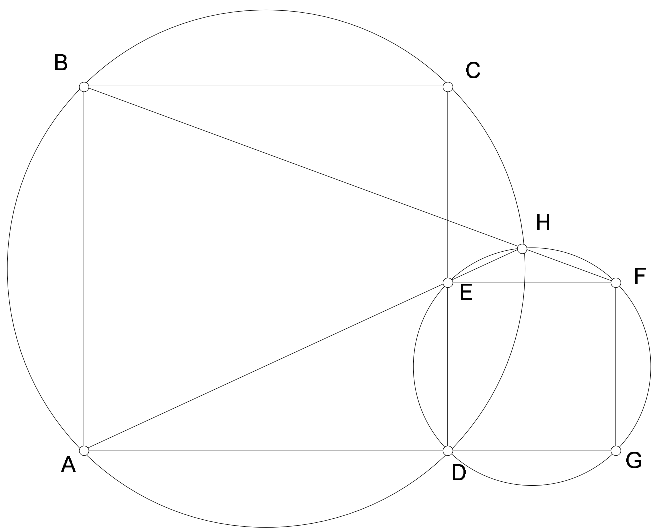


Рис.4.1

   б) Ответ: $72°$. Решение аналогично п. а) (рис.4.2).

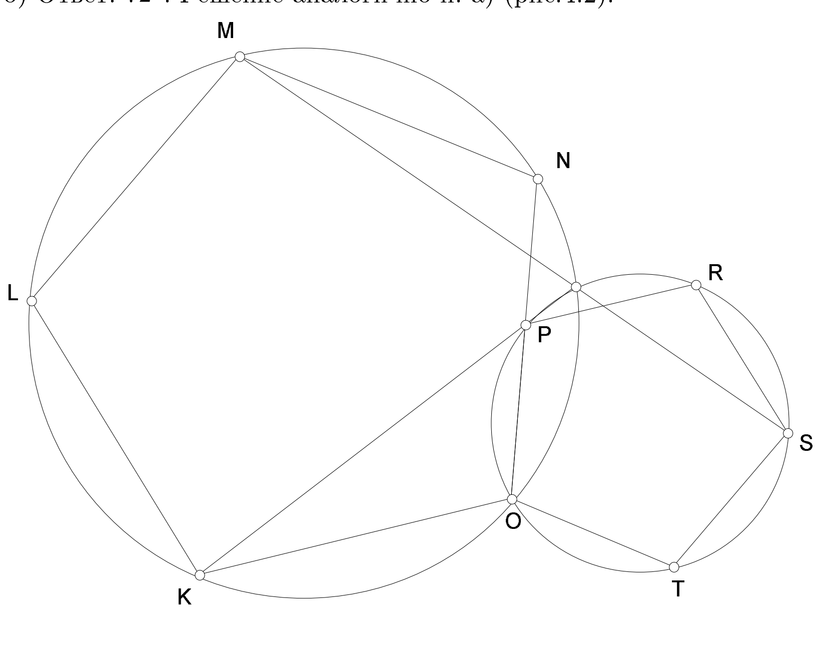


Рис.4.2

5. (А.Тарасов) а) Сложите квадрат 10×10 из прямоугольной полоски 1×118.

   б) Сложите квадрат 10×10 из прямоугольной полоски $1 \times (100 + 9\sqrt{3})$ (примерно 1x115.58).

   В обоих пунктах полоску можно сгибать, но не разрывать.

   Решение. а) Пусть точки A, B расположены на противоположных сторонах полоски на расстоянии 10 от края, C, D на растоянии 12. Согнув полоску по сгибам, показанным на рис.5.1, расположим ее часть, лежащую правее CD рядом с частью, лежащей левее AB. Повторив эту операцию 9 раз и загнув образовавшиеся прямоугольные треугольники, получим искомый квадрат.

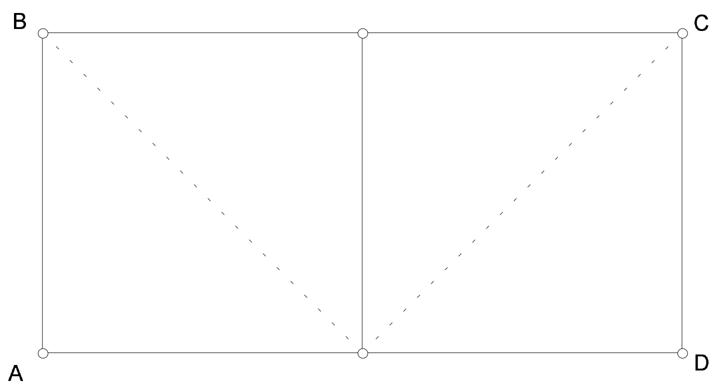


Рис.5.1

   б) Пусть точки A, B расположены на противоположных сторонах полоски на расстоянии 10 от края, C, D на растоянии $10 + \sqrt{3}$. Согнув полоску по сгибам, показанным на рис.5.2, расположим ее часть, лежащую правее CD рядом с частью, лежащей левее AB. Повторив эту операцию 9 раз и загнув образовавшиеся треугольники, получим искомый квадрат.

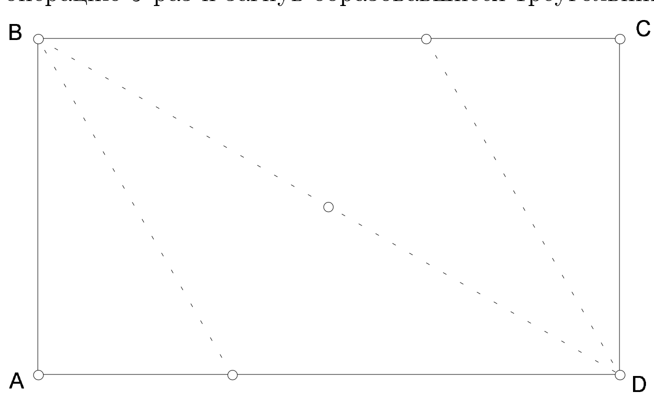


Рис.5.2

6. (А.Афанасьев) а) (8-9) Дан отрезок AB с точкой C внутри него, являющийся хордой окружности радиуса R. Впишите в образовавшийся сегмент окружность, которая проходит через точку C и касается исходной окружности.

   б) (9-10) Дан отрезок AB с точкой C внутри него, являющейся точкой касания окружности радиуса r. Проведите через A и B окружность, касающуюся исходной окружности.

   Решение. Докажем сначала следующий факт.

Лемма. Пусть окружность, вписанная в сегмент, ограниченный дугой и хордой AB, касается дуги в точке C, а хорды в точке D. Тогда CD — биссектриса угла ACB.

Доказательство. Пусть O — центр большой окружности, O' — центр малой, L — середина дуги AB, не содержащей точки C (рис.6). Так как O' лежит на отрезке OC, а $O'D \parallel OL$, равнобедренные треугольники $O'DC$ и OLC подобны. Следовательно, D лежит на отрезке CL и прямая CD делит угол ACB пополам.

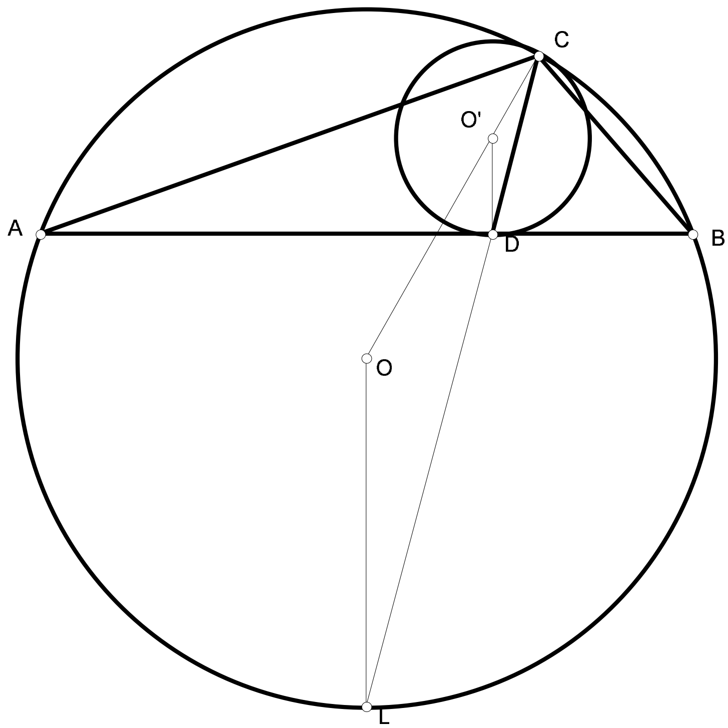


Рис.6

Теперь приведем решение задачи.

а) Пусть искомая окружность касается данной в точке X. Из леммы следует, что $AX/XB = AC/CB$. Множество точек, удовлетворяющих этому условию, — это окружность с центром на прямой AB (она называется *окружностью Аполлония* точек A и B). Возьмем любую из точек пересечения окружности Аполлония с данной, соединим ее с центром данной окружности и найдем точку пересечения этой прямой с перпендикуляром, восставленным из C к AB. Получим центр искомой окружности. Задача имеет два решения, так как окружность можно вписать в любой из двух сегментов, на которые хорда AB делит данный круг.

б) Аналогично п.а) построим окружность Аполлония и найдем отличную от C точку ее пересечения с данной окружностью. Искомая окружность проходит через эту точку и точки A, B. Задача имеет единственное решение.

7. (Д.Калинин) Внутри квадрата $ABCD$ взята точка E, а вне — точка F, так что треугольники ABE и BCF равны. Найдите углы треугольника ABE, если известно, что отрезок EF равен стороне квадрата, а угол BFD — прямой.

   Решение. Так как угол BFD прямой, точка F лежит на описанной около квадрата окружности, т.е. $\angle BFC = 135^\circ = \angle AEB$ (так как два других угла треугольника AEB, очевидно, острые). Так как $\angle ABE = \angle CBF$[1], $\angle EBF = 90^\circ$ и $BE/EF = \frac{1}{\sqrt{2}} = BE/AB$. Применяя к треугольнику ABE теорему синусов, получаем, что $\sin\angle EAB = BE \sin\angle AEB/AB = 1/2$. Следовательно, $\angle EAB = 30^\circ$, $\angle EBA = 15^\circ$ (рис.7).

[1] нетрудно убедиться, что случай $\angle ABE = \angle BCF$ невозможен.

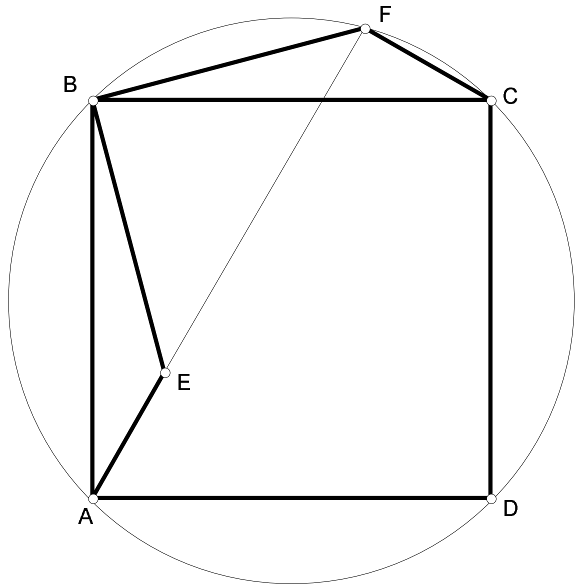


Рис.7

8. (А.Блинков) Отрезок AB делит квадрат на две части, в каждую из которых можно вписать окружность. Радиусы этих окружностей равны r_1 и r_2, причем $r_1 > r_2$. Найдите длину AB.

Решение. Если отрезок AB является диагональю квадрата, то он делит квадрат на два равных треугольника, и $r_1 = r_2$, что противоречит условию задачи. Если же одна из частей является четырехугольником, то сумма его стороны AB с противоположной больше суммы двух других сторон (рис.8.1), и вписать в него окружность нельзя. Следовательно, AB делит квадрат на треугольник и пятиугольник (рис.8.2).

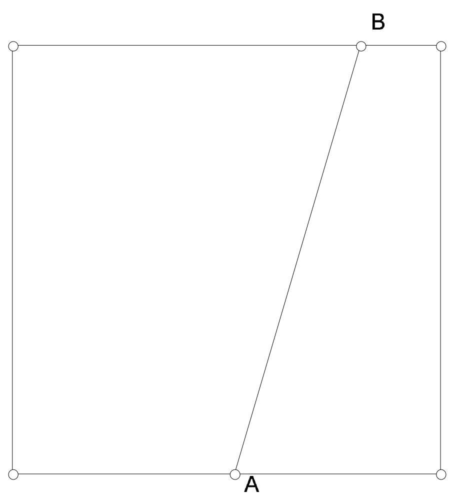


Рис.8.1

Окружности с радиусами r_1, r_2 являются вневписанной и вписанной окружностями прямоугольного треугольника ABC. Значит, $r_1 = (AB + BC + CA)/2$, $r_2 = (BC + CA - AB)/2$, и $AB = r_1 - r_2$.

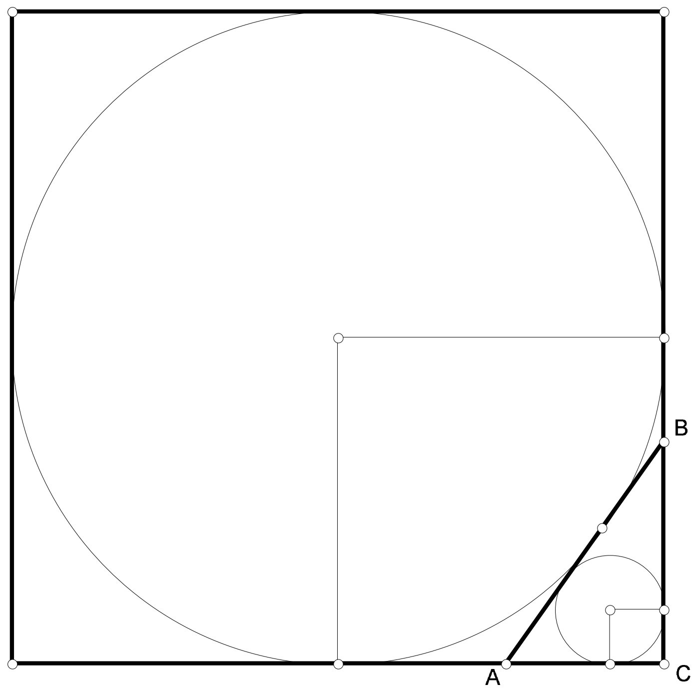


Рис.8.2

9. (А.Канель) Пусть прямая $L(\alpha)$ соединяет точки единичной окружности, отвечающие углам α и $\pi - 2\alpha$. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, то прямые $L(\alpha)$, $L(\beta)$ и $L(\gamma)$ пересекаются в одной точке[2].

   Решение. Пусть A, B, C — точки окружности, соответствующие углам α, β, γ. Перпендикуляр из центра окружности к прямой AB пересекает окружность в точке, соответствующей углу $(\alpha+\beta)/2 = \pi - \gamma/2$, а перпендикуляр к прямой $L(\gamma)$ — в точке, соответствующей углу $(\gamma + \pi - 2\gamma)/2 = \pi/2 - \gamma/2$. Следовательно, $L(\gamma)$ — высота треугольника ABC. Аналогично, $L(\alpha)$, $L(\beta)$ — высоты ABC, и значит все три прямые пересекаются в его ортоцентре.

10. (Б.Френкин) При каких n правильный n-угольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на $n-2$ равнобедренных (и, возможно, равносторонних) треугольников?

    Решение. Ответ: n должно быть суммой двух степеней двойки, может быть равных (в этом случае само n – степень двойки).

    Рассмотрим треугольник разбиения ABC, содержащий центр (рис.10.1). Если сторона AB не является стороной исходного многоугольника, то отрезает от него многоугольник, в котором является наибольшим расстоянием между вершинами. Следовательно, AB должна быть основанием треугольника разбиения, и число отрезаемых ею сторон четно. Для боковых сторон указанного треугольника можно провести аналогичные рассуждения, следовательно, число сторон, которые отрезает AB, есть степень двойки. (Если AB – сторона исходного многоугольника, то она отрезает 2^0 сторон.) Это верно и для сторон BC и AC. Так как в треугольнике ABC хотя бы две стороны равны, то $n = 2^k + 2^k + 2^l = 2^{k+1} + 2^l$.

[2]Условие задачи было опубликовано с опечаткой

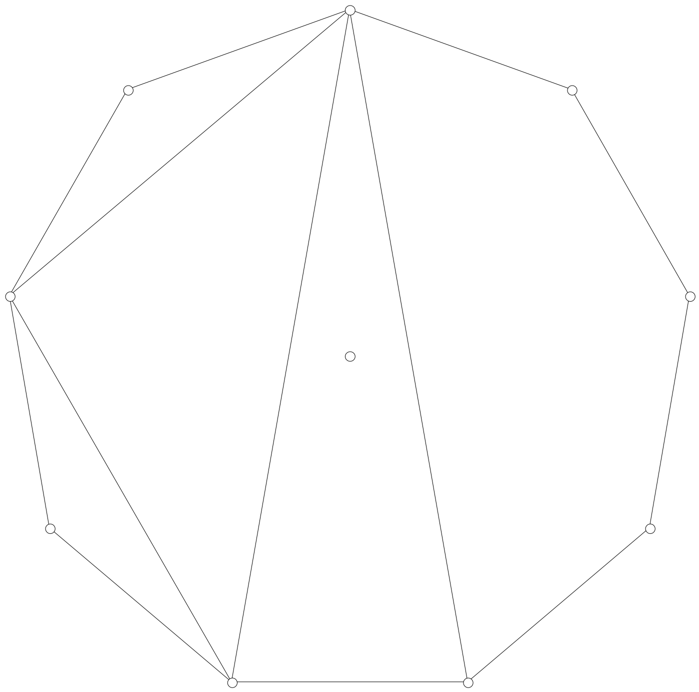


Рис.10.1

Обратно, пусть $n = 2^k + 2^l$, приччм $k > 0$. Пусть A – одна из вершин правильного n-угольника, а вершины B и C отстоят от неч на 2^{k-1} сторон в двух направлениях. Тогда $AB = AC$, и существует разрезание нужного вида, содержащее $\triangle ABC$ (см. рис. 10.2).

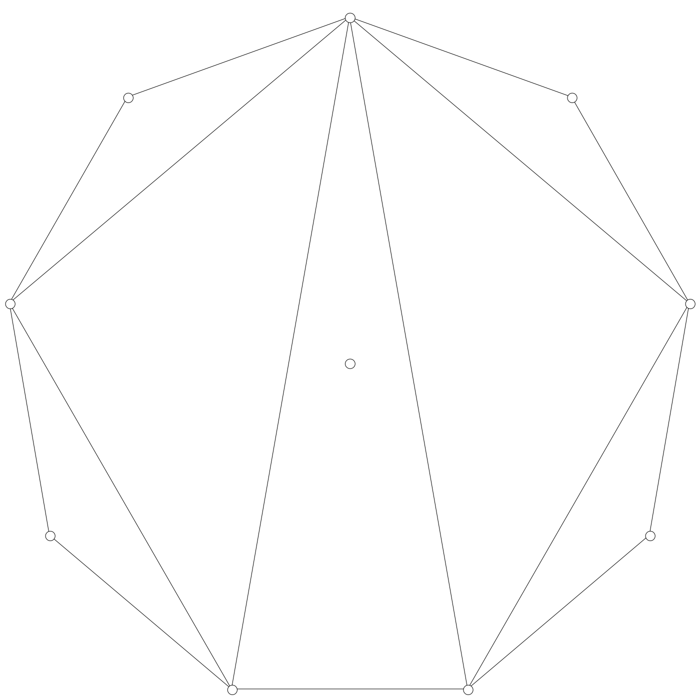


Рис.10.2

11. (А.Заславский) В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности; A', B', C' — точки, симметричные A, B, C относительно противоположных сторон; A_1, B_1, C_1 — точки

пересечения прямых OA' и BC, OB' и AC, OC' и AB. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть O_a, O_b, O_c — точки, симметричные O относительно BC, CA, AB. Очевидно, что прямые CO_c OC' и AB пересекаются в одной точке, так что для решения задачи достаточно доказать, что прямые AO_a, BO_b и CO_c пересекаются в одной точке.

Так как треугольник $O_aO_bO_c$ гомотетичен серединному трегольнику ABC с центром O и коэффициентом 2, он центрально симметричен треугольнику ABC и прямые, соединяющие соответствующие вершины этих треугольников, проходят через центр симметрии. Нетрудно также убедиться, что эта точка является для каждого из треугольников центром окружности 9 точек.

12. (Б.Френкин) В треугольнике ABC биссектриса угла A равна полусумме высоты и медианы, проведћнных из вершины A. Докажите, что если $\angle A$ тупой, то $AB = AC$.

Решение. Предположим, что утверждение задачи неверно. Пусть H, L, M — основания высоты, биссектрисы и медианы, P — середина дуги BC описанной окружности треугольника, не содержащей точки A (рис.12).

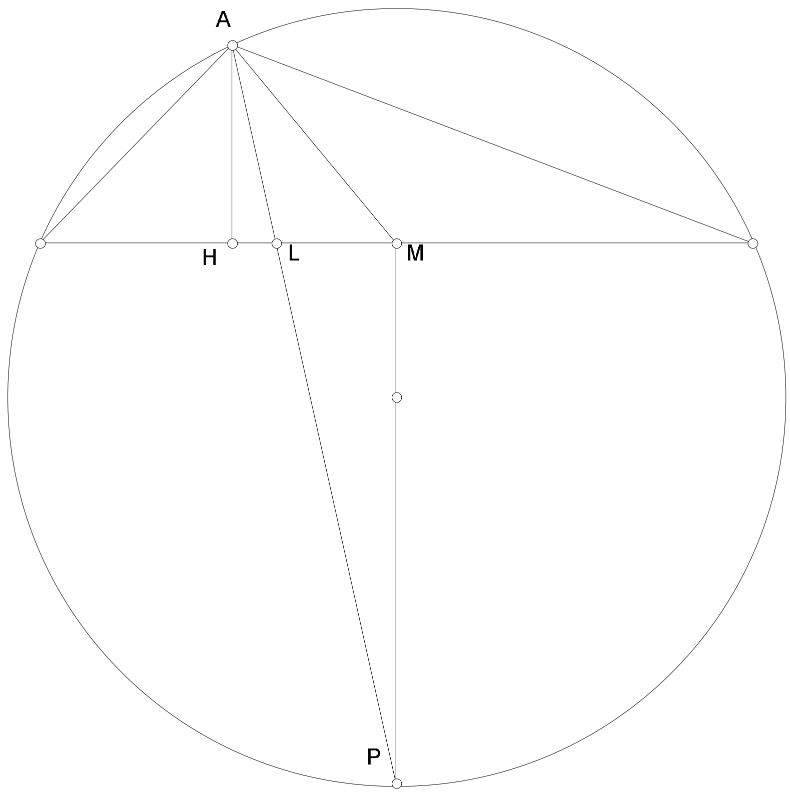


Рис.12

Если угол A тупой, $PM > AH$. Поскольку L лежит на отрезке AP, отсюда следует, что $HL < LM$, и значит, отрезок AL меньше медианы треугольника AHM, которая, в свою очередь, меньше полусуммы сторон AH и AM — противоречие.

13. (А.Акопян) Даны две прямые a и b, а также точки A и B. Точка X скользит по прямой a, а точка Y по прямой b, так что $AX \parallel BY$. Найдите ГМТ пересечения AY с XB.

Решение. Проведем через A прямую, параллельную b и пересекающую a в точке U. Аналогично, проведем через B прямую, параллельную a и пересекающую b в точке V. Для любых удовлетворяющих условию точек X, Y соответствующие стороны треугольников AUX и YUB параллельны. Следовательно, эти треугольники гомотетичны, т.е. прямые AY, BX и UV пересекаются в центре гомотетии. Очевидно, что так можно получить любую точку прямой UV.

14. (А.Заславский) Дана окружность и не лежащая на ней фиксированная точка P. Найдите геометрическое место ортоцентров треугольников ABP, где AB — диаметр окружности.

Решение. Пусть C — ортоцентр; A', B', C' — основания высот ABP, проведенных из A, B, P; P' — проекция C на прямую OP (рис.14). Так как $\angle CC'O = \angle CP'O = 90^\circ$, точки O, C, C', P' лежат на окружности, и $CP \cdot PC' = OP \cdot PP'$. Аналогично, $CP \cdot PC' = BP \cdot PA'$. Но A' лежит на исходной окружности, следовательно, $BP \cdot A'P = |R^2 - OP^2|$. Таким образом, произведение $OP \cdot PP'$, а значит, и точка P' не зависят от выбора диаметра AB, т.е. искомым геометрическим местом будет прямая, проходящая через P' и перпендикулярная OP.

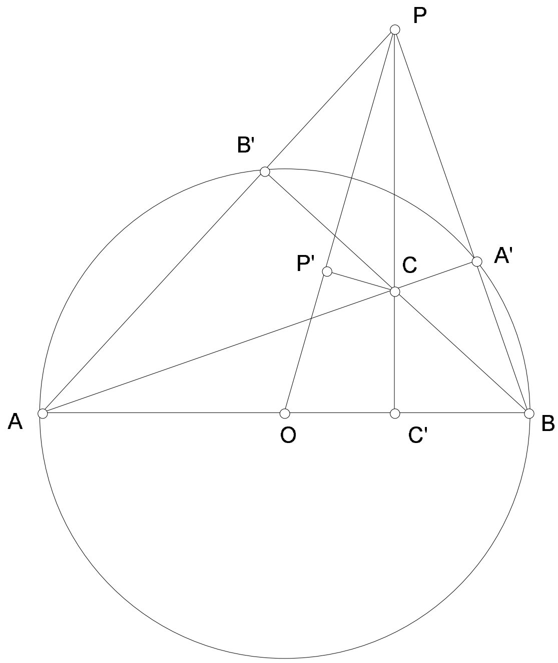


Рис.14

15. (В.Протасов) Около треугольника ABC описана окружность и в него же вписана окружность, которая касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Прямая B_1C_1 пересекает прямую BC в точке P, а точка M — середина отрезка PA_1. Докажите, что отрезки касательных, проведенных из точки M к вписанной и описанной окружности, равны.

Решение. Пусть $AB < AC$. Так как прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, из теорем Чевы и Менелая получаем, что $PB/PC = A_1B/AC$. Кроме того, $MB = (PB - A_1B)/2$, $MC = (PC + A_1C)/2$, $MA_1 = (PB + A_1B)/2 = (PC - A_1C)/2$. Следовательно, $MB/MA_1 = MA_1/MC = A_1B/A_1C$, что равносильно утверждению задачи.

16. (П.Пушкарь) На сторонах треугольника ABC построены во внешнюю сторону правильные треугольники. Оказалось, что их вершины образуют правильный треугольник. Верно ли, что исходный треугольник — правильный?

Решение. Ответ: верно. Предположим противное. Тогда один из углов треугольника ABC, например, угол $A > 60^\circ$. Тогда луч $B'C'$ лежит вне угла $AB'C$, а, так как $\angle A'B'C' = \angle AB'C = 60^\circ$, луч $B'A'$ лежит внутри этого угла, и значит, луч $A'B'$ лежит внутри угла $B'AC'$ (рис.16). Аналогично, луч $A'C'$ лежит внутри этого угла, что противоречит равенству $\angle B'A'C' = \angle BA'C = 60^\circ$.

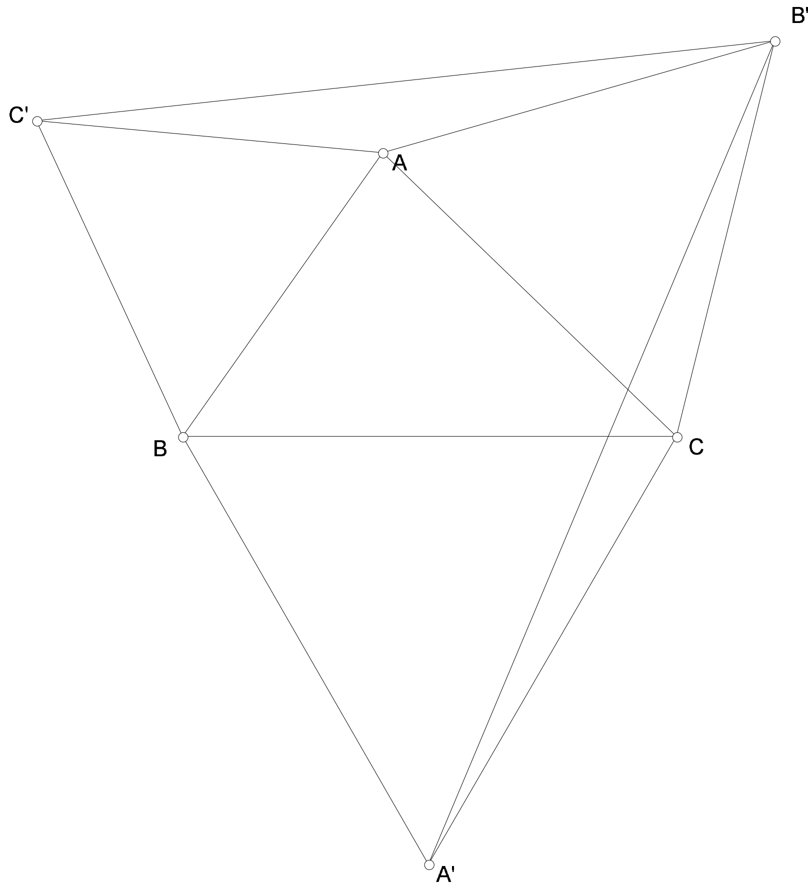


Рис.16

17. (А.Заславский) В двух окружностях, пересекающихся в точках A и B, проведены параллельные хорды A_1B_1 и A_2B_2. Прямые AA_1 и BB_2 пересекаются в точке X, а прямые AA_2 и BB_1 — в точке Y. Докажите, что $XY \parallel A_1B_1$.

    Решение. Утверждение задачи равносильно тому, что точки A, B, X, Y лежат на одной окружности, т.е. $\angle XAY = \angle XBY$. Но $\angle XAY = \angle BAA_2 - \angle BAX = \angle BAA_2 - \angle BB_1A_1$, $\angle XBY = \angle B_2BA - \angle AA_1B_1$. При этом из параллельности A_1B_1 и A_2B_2 следует, что $\angle ABB_1 + \angle A_1B_1B = \angle BAA_2 + \angle B_2A_2A$, откуда, очевидно, и вытекает искомое утверждение.

18. (А.Акопян) Через ортоцентр H треугольника ABC проведены две перпендикулярные прямые, одна из которых пересекает BC в точке X, а другая пересекает AC в точке Y. Прямые AZ, BZ параллельны соответственно прямым HX и HY. Докажите, что точки X, Y, Z лежат на одной прямой.

    Решение. Рассмотрим для определенности случай, изображенный на рис.18. Пусть U — точка пересечения HX и BZ, V — точка пересечения HY и AZ. Тогда утверждение задачи равносильно равенству $HU/UX = YV/HV$ или $HU/YV = HV/XU$. В прямоугольных треугольниках AYV и BUH углы AYV и BUH равны, так как их стороны перпендикулярны. Следовательно, треугольники подобны и $HU/YV = BU/AV$. Аналогично, $HV/XU = BU/AV$. Другие случаи рассматриваются аналогично.

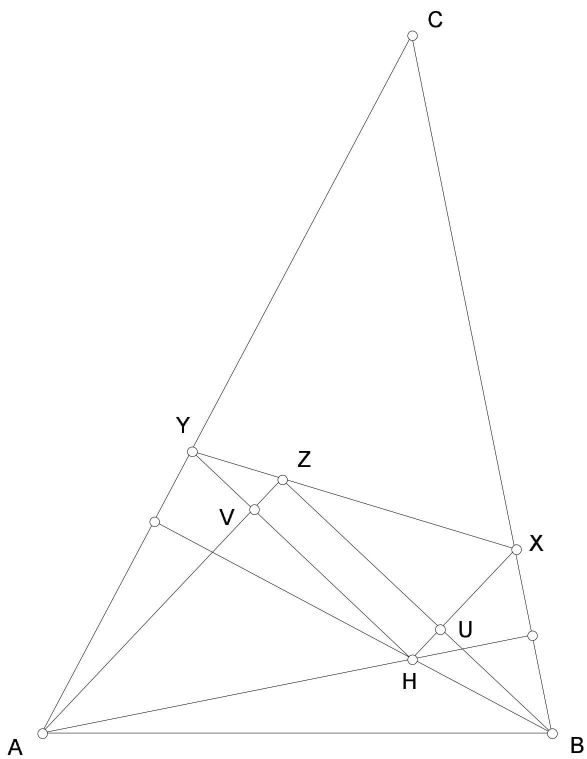


Рис.18

19. (Л.Емельянов) Через середины сторон треугольника T проведены прямые, перпендикулярные биссектрисам противолежащих углов треугольника. Эти прямые образовали треугольник T_1. Докажите, что центр описанной около T_1 окружности находится в середине отрезка, образованного центром вписанной окружности и точкой пересечения высот треугольника T.

   Решение. Стороны треугольника T_1 являются внешними биссектрисами углов треугольника T_0, образованного средними линиями T, и значит, пересекаются в центрах его вневписанных окружностей. При этом биссектрисы внутренних углов T_0 являются высотами T_1, т.е. его центр вписанной окружности I_0 совпадает с ортоцентром T_1, а центр описанной O_0 является центром окружности, проходящей через середины T_1 и, значит, серединой отрезка I_0O_1, где O_1 — центр описанной окружности T_1. Кроме того, O_0 — середина отрезка OH, где O, H — центр описанной окружности и ортоцентр T, а центр тяжести T M делит отрезок HO в отношении $2:1$ (рис.19). Гомотетия с центром I_0 и коэффициентом $\frac{1}{3}$ переводит центр I вписанной окружности T в M, а гомотетия с центром O_0 и коэффициентом -3 переводит M в H. Так как композиция этих гомотетий есть центральная симметрия с центром O_1, O_1 — середина IH.

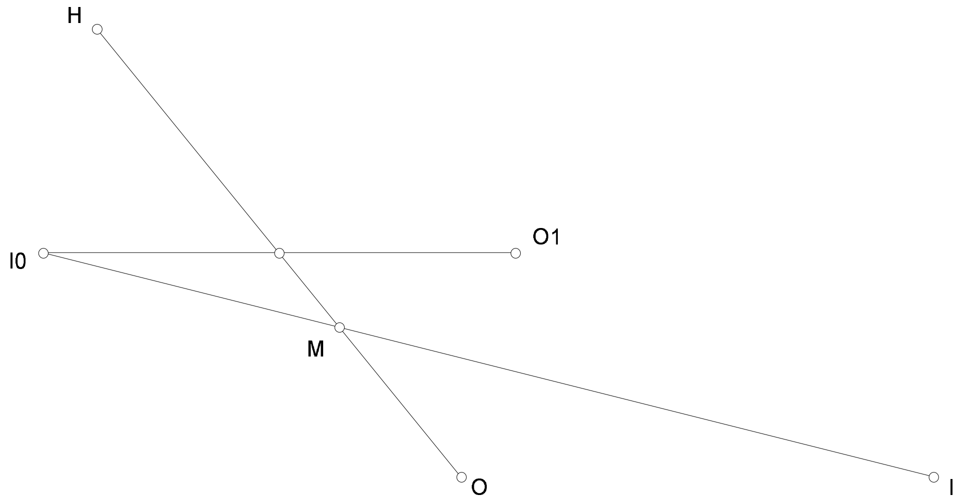


Рис.19

20. (А.Заславский) Даны четыре точки A, B, C, D. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Точки A_2, B_2, C_2, D_2 — ортоцентры треугольников $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, $A_1B_1C_1$ и т.д. Докажите, что все окружности, проходящие через середины сторон таких треугольников, пересекаются в одной точке.

   Решение. Докажем сначала, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников ABC, BCD, CDA и DAB, пересекаются в одной точке. Пусть X — точка пересечения окружностей 9 точек треугольников ACD и BCD, отличная от середины AB, Y, Z, U — середины AC, BC, CD. Тогда $\angle YXZ = \angle YXU + \angle XUZ = \angle DCA + \angle BDC = \angle BCD$, т.е. X лежит на окружности 9 точек треугольника ABC. Аналогично, X лежит и на окружности 9 точек треугольника ABD. Далее, так как окружности 9 точек треугольников DA и ACB_1 совпадают, точка X лежит также на окружностях 9 точек треугольников ABB_1 и CBB_1. Аналогично она лежит на окружностях 9 точек треугольников ABA_1 и BCC_1, а, значит, и на окружностях 9 точек треугольников A_1B_1B, BB_1C_1 и $A_1B_1C_1$, откуда и следует утверждение задачи.

   Более короткое решение можно получить, используя следующий факт.

   Пусть точки U, V, W лежат на равносторонней гиперболе. Тогда ортоцентр треугольника UVW также лежит на этой гиперболе, а его окружность 9 точек проходит через ее центр.

   Действительно, проведя равностороннюю гиперболу через точки A, B, C, D, получим, что все окружности проходят через ее центр.

21. (А.Заславский) На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты точки C', A', B'. Докажите, что для площадей соответствующих треугольников выполняется неравенство:

$$S_{ABC}S^2_{A'B'C'} \geq 4S_{AB'C'}S_{BC'A'}S_{CA'B'},$$

   причем равенство достигается тогда и только тогда, когда прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

   Решение. Обозначим $P_1 = AB' \cdot BC' \cdot CA'$, $P_2 = BA' \cdot AC' \cdot CB'$. Нетрудно убедиться, что $S_{A'B'C'} = (P_1 + P_2)/4R$, где R — радиус описанной окружности ABC, и, следовательно

$$\frac{S_{AB'C'}S_{BC'A'}S_{CA'B'}}{S_{ABC}S^2_{A'B'C'}} = \frac{P_1P_2}{(P_1+P_2)^2} \leq \frac{1}{4},$$

   причем равенство возможно лишь при $P_1 = P_2$, что равносильно пересечению прямых AA', BB' и CC' в одной точке.

22. (А.Заславский) Дана окружность, точки A, B на ней и точка P. Пусть X — произвольная точка окружности, Y — точка пересечения прямых AX и BP. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников PXY.

Решение. Пусть Q — отличная от X точка пересечения окружностей ABX и PXY. Тогда $\angle ABQ = \angle AXQ = \angle YXQ = \angle YPQ = \angle BPQ$. Значит $\angle BQP = \pi - (\angle BPQ + \angle QBP) = \pi - \angle ABP$ не зависит от выбора точки X. Следовательно, все окружности PXY проходят через Q и их центры лежат на серединном перпендикуляре к PQ.

23. (А.Мякишев) Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, G — центр тяжести его как однородной пластины (т.е. точка пересечения двух прямых, каждая из которых соединяет центроиды треугольников, имеющих общую диагональ).

а) (9-10) Пусть около $ABCD$ можно описать окружность с центром в O. Точку H определим аналогично G, взяв вместо центроидов ортоцентры. Докажите, что точки H, G, O лежат на одной прямой и $HG : GO = 2 : 1$.

б) (10-11) Пусть в $ABCD$ можно вписать окружность с центром в I. Точкой Нагеля N описанного четырехугольника назовем точку пересечения двух прямых, каждая из которых проходит через точки на противоположных сторонах четырехугольника, симметричные точкам касания вписанной окружности относительно середин сторон. (Эти прямые делят периметр четырехугольника пополам). Докажите, что N, G, I лежат на одной прямой, причем $NG : GI = 2 : 1$.

Решение. а) Пусть M_a и H_a — соответственно центроид и ортоцентр треугольника BCD. Центроиды и ортоцентры остальных трех треугольников обозначим аналогично. Все треугольники имеют общую описанную окружность с центром в O. Рассмотрев прямые Эйлера этих треугольников, заметим, что четырехугольник $M_aM_bM_cM_d$ переходит в четырехугольник $H_aH_bH_cH_d$ при гомотетии с центром в O и коэффициентом 3. Соответственно, точки пересечения диагоналей этих четырехугольников переходят друг в друга.

б) Обозначим через M_1 центр тяжести периметра четырехугольника. Точка G лежит на отрезке IM_1 и делит его в отношении $2 : 1$. Действительно, M_1 — это центр тяжести четырех точек, помещенных в середины сторон четырехугольника с массами, пропорциональными их длинам, а G — центр тяжести четырех точек, помещенных в центрах тяжести треугольников IAB, IBC, ICD, IDA с массами, пропорциональными площадям этих треугольников. Очевидно, две этих системы точек гомотетичны с центром I и коэффициентом $\frac{2}{3}$.

Пусть a, b, c, d — длины касательных к вписанной окружности из вершин A, B, C, D. Очевидно, что, если поместить в A, B, C, D массы a, b, c, d, то центром тяжести полученной системы будет точка N, а, если поместить в вершины массы $2a+b+d$, $2b+a+c$, $2c+b+d$, $2d+c+a$, то — точка M_1. Осталось показать, что I — центр тяжести масс $b+d$, $a+c$, $b+d$, $a+c$.

Точка I удовлетворяет соотношению $S_{IAB} - S_{IBC} + S_{ICD} - S_{IDA} = 0$. Этому же соотношению удовлетворяют середины U и V диагоналей четырехугольника. Следовательно, эти три точки лежат на одной прямой (это утверждение называется *теоремой Монжа*). Пусть теперь X, Y — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AD. Тогда прямая XY образует равные углы с этими сторонами и по теореме Брианшона проходит через точку L пересечения диагоналей. Применив теорему синусов к треугольникам LXB и LYD, получим, что $BL/DL = b/d$. Аналогично, $AL/CL = a/c$. Отсюда и из соотношений $S_{UBC}/S_{UAD} = BL/DL$, $S_{VBC}/S_{VAD} = CL/AL$, $S_{IBC}/S_{IAD} = (b+c)/(a+d)$ вытекает, что I делит отрезок AC в отношении $(a+c)/(b+d)$, что и требуется.

24. (Фольклор) а) Через фиксированную точку P внутри данной окружности проводятся два перпендикулярных луча, пересекающие окружность в точках A и B. Найдите геометрическое место проекций P на прямые AB.

б) Через фиксированную точку P внутри данной сферы проводятся три попарно перпендикулярных луча, пересекающие сферу в точках A, B, C. Найдите геометрическое место проекций точки P на плоскости ABC.

Решение. а) Пусть P_1 — точка, симметричная P относительно прямой AB, P_2 — точка, симметричная P относительно середины отрезка AB. Тогда треугольники ABP_1 и ABP_2 симметричны относительно серединного перпендикуляра к AB, следовательно, $OP_1 = OP_2$. Так как $APBP_2$ — прямоугольник, $OA^2 + OB^2 = OP^2 + OP_2^2$, т.е. расстояние OP_2 не зависит от выбора лучей PA, PB. Следовательно, точки P_1, P_2 лежат на окружности с центром O, а проекция P на AB на окружности вдвое меньшего радиуса с центром в середине отрезка OP.

б) Достроим пирамиду $PABC$ до прямоугольного параллелепипеда $PAC'BCB'P'A'$. Аналогично п.а) получаем, что $OP'^2 = 3R^2 - 2OP^2$, т.е. точка P' лежит на сфере с центром O. Так как центр тяжести M треугольника ABC лежит на отрезке PP' и делит его в отношении $1:2$, M лежит на сфере, центром которой является точка, лежащая на отрезке OP и делящая его в отношении $2:1$. Далее, проекцией O на плоскость ABC является центр O' описанной около треугольника ABC окружности, а проекцией P — его ортоцентр H. Так как M лежит на отрезке $O'H$ и $MH = 2MO'$, $MK = KH$, т.е. искомым ГМТ будет сфера с центром K и радиусом равным $\sqrt{3R^2 - 2OP^2}/3$.

25. (А.Заславский) В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах BC, CD и DA равны α, а при остальных ребрах — β. Найдите отношение AB/CD.

    Решение. Из условия следует равенство трехгранных углов в вершинах A и B, C и D. Следовательно, $\angle CBD = \angle CBA = \angle DAC = \angle DAB$, $\angle ADB = \angle CDB = \angle DCA = \angle BCA$, и все грани тетраэдра подобны. При этом $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{CD} = \frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle BAD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. Значит, $\frac{AB}{CD} = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^3$.

26. (Д.Терешин) Даны четыре конуса с общей вершиной и образующей одинаковой длины (но, возможно, с разными радиусами оснований). Каждый из них касается двух других. Докажите, что четыре точки касания окружностей оснований конусов лежат на одной окружности.

    Решение. Окружности оснований конусов лежат на сфере с центром в вершине конусов и радиусом, равным их образующей. Инверсия с центром в любой точке этой сферы переводит ее в плоскость, а окружности в окружности на этой плоскости, каждая из которых касается двух других. Из теоремы об угле между касательной и хордой сразу следует, что четыре точки касания лежат на одной окружности, которой соответствует окружность на сфере.

III олимпиада по геометрии памяти И.Ф.Шарыгина, 2007 год. Заочный тур

1. (Б.Френкин) Треугольник разрезан на несколько (не менее двух) треугольников. Один из них равнобедренный (не равносторонний), а остальные — равносторонние. Найдите углы исходного треугольника.

   Ответ. 30°, 60°, 90°.

   Решение. Среди вершин неравностороннего треугольника, по крайней мере, одна не является вершиной исходного треугольника. Сумма углов треугольников разбиения, сходящихся в этой вершине, равна 180° или 360°. Следовательно, угол треугольника кратен 60°, и так как треугольник не равносторонний, этот угол равен 120°. Тогда два других угла этого треугольника равны 30° и соответствующие вершины находятся в вершинах исходного треугольника. Углы треугольника в этих вершинах могут равняться только 30°, 90° или 150°, при этом хотя бы один из двух углов не равен 30°, а их сумма меньше 180°. Единственный возможный вариант — 30° и 90°. Такой треугольник требуемым образом разрезать можно, например, проведя медиану из прямого угла (рис.1).

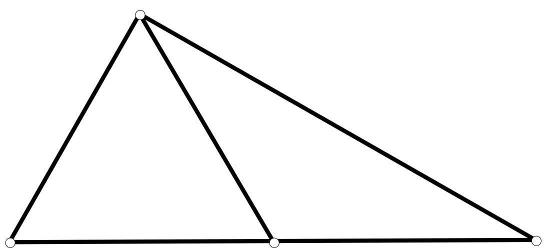


Рис.1

2. (А.Блинков) Каждая диагональ четырехугольника разбивает его на два равнобедренных треугольника. Верно ли, что четырехугольник — ромб?

   Решение. Неверно. Например, пусть ABC — равнобедренный треугольник, в котором угол B тупой и не равен 120°, D — центр окружности, описанной около ABC. Тогда четырехугольник $ABCD$ удовлетворяет условиям задачи и не является ромбом.

3. (Б.Френкин) Отрезки, соединяющие внутреннюю точку выпуклого неравностороннего n-угольника с его вершинами, делят n-угольник на n равных треугольников. При каком наименьшем n это возможно?

   Ответ. $n = 5$.

   Решение. Докажем, что при $n = 3, 4$ указанная ситуация невозможна. При $n = 3$ углы треугольников разбиения, сходящиеся во внутренней точке, равны, так как сумма любых двух разных углов меньше 180°. Но тогда равны и противолежащие им стороны, являющиеся сторонами многоугольника.

   Можно рассуждать и по-другому. Так как треугольники, на которые разрезается данный треугольник равны, то равны радиусы описанных около них окружностей и площади. Из первого условия следует, что точка, определяющая разрезание, является ортоцентром треугольника, а из второго, что она является его центром тяжести. Но ортоцентр и центр тяжести совпадают только в правильном треугольнике.

   Пусть четырехугольник $ABCD$ разрезан на равные треугольники отрезками из точки O. Тогда $\angle OAB = \angle OCB$, как углы, противоположные одной и той же стороне равных треугольников. Аналогично $\angle OAD = \angle OCD$, $\angle OBC = \angle ODC$, $\angle OBA = \angle ODA$. Следовательно, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, и $ABCD$ — параллелограмм. Так как отрезки из O делят его на равновеликие треугольники, O — точка пересечения его диагоналей, а тогда из равенства треугольников следует, что $ABCD$ — ромб.

   При $n = 5$ указанная ситуация возможна (рис.2).

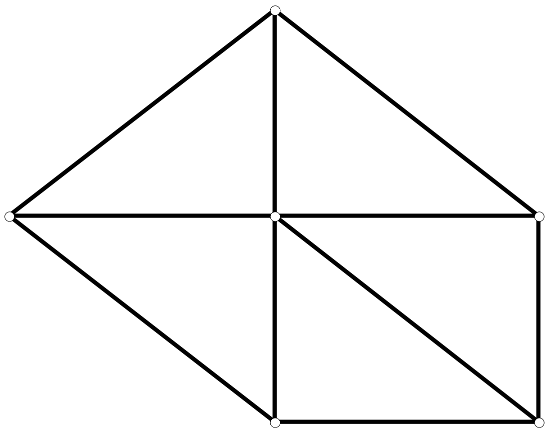


Рис.2

4. (А.Блинков) Существует ли такой параллелограмм, что все точки попарных пересечений биссектрис его углов лежат вне параллелограмма?

   Решение. Нет. Так как точки пересечения биссектрис являются центрами окружностей, касающихся трех сторон параллелограмма, центры меньших из этих окружностей всегда лежат внутри параллелограмма.

5. (Д.Шноль) Невыпуклый n-угольник разрезали прямолинейным разрезом на три части, после чего из двух частей сложили многоугольник, равный третьей части. Может ли n равняться

   а) пяти?

   б) четырем?

   Ответ. а) да (рис.3).

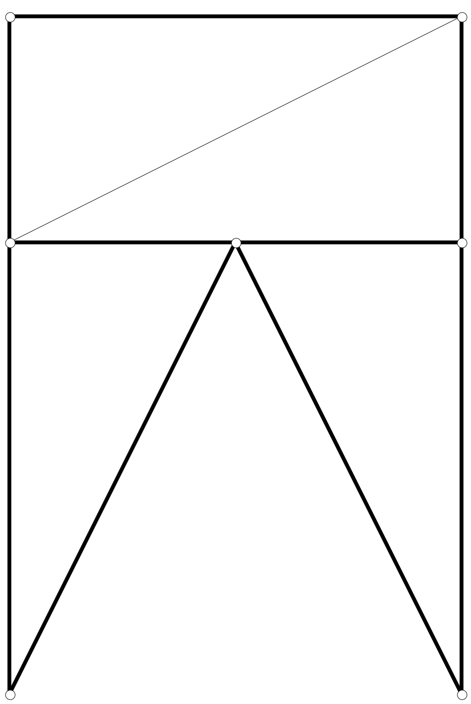


Рис.3

б) да (рис.4).

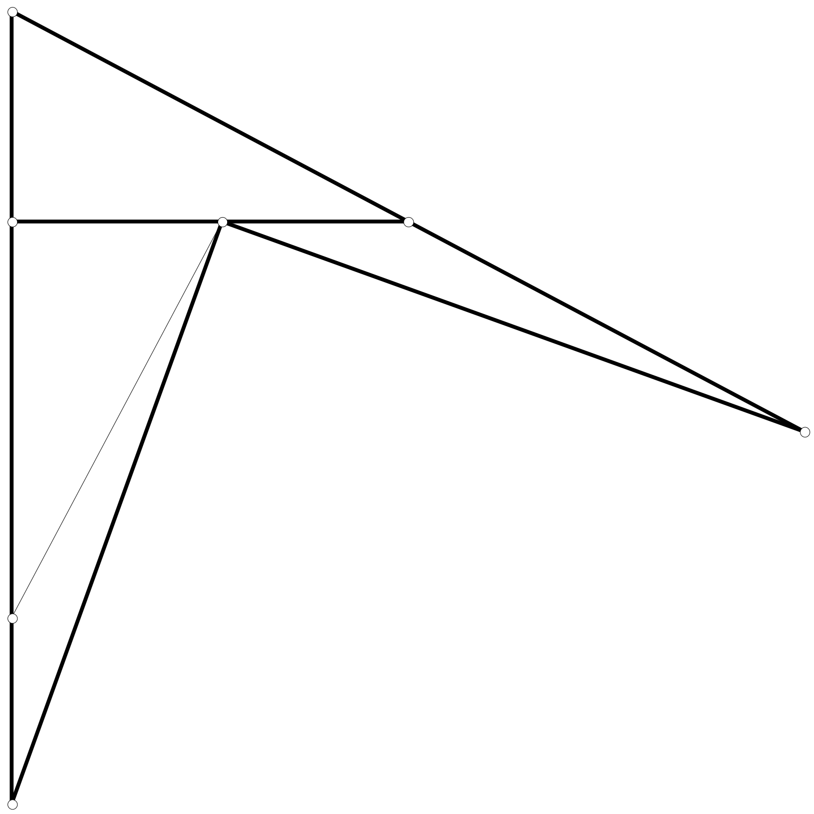


Рис.4

6. (Б.Френкин) а) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многоугольник, т.е. многоугольник, стороны которого лежат на линиях листа бумаги в клетку? (укажите все возможные значения)

   б) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многогранник, т.е. многогранник, составленный из одинаковых кубиков, примыкающих друг к другу гранями?

   Ответ. а) 0, 1, 2 или 4. б) 0, 1, 3, 5 или 9.

   Решение. а) Все оси симметрии ограниченной фигуры имеют общую точку, так как композиция симметрий относительно двух параллельных прямых и двукратная композиция симметрий относительно трех не проходящих через одну точку прямых являются переносами. Кроме того, ось симметрии клетчатого многоугольника параллельна стороне или диагонали клетки, так что осей симметрии не больше 4. При этом, если три из таких прямых являются осями симметрии многоугольника, то их композиция является симметрией относительно четвертой прямой. Примеры многоугольников, имеющих 0, 1, 2 и 4 оси симметрии, приведены на рис.5.

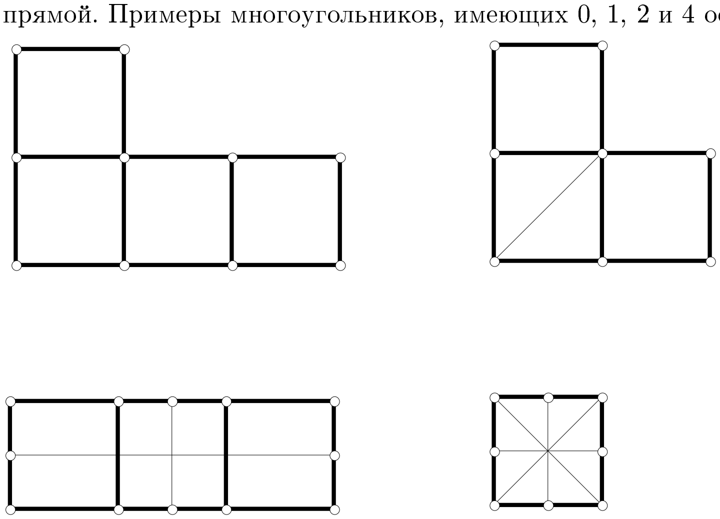


Рис.5

б) Аналогично п.а) получаем, что все оси симметрии проходят через одну точку и параллельны либо ребрам составляющих многогранник кубиков, либо диагоналям его граней. Следовательно, осей симметрии не более 9. Пусть прямые l, l_1 являются осями симметрии. Если угол между ними не прямой, то прямая l_2, симметричная l_1 относительно l, тоже будет осью симметрии. Если же $l \perp l_1$, то осью симметрии будет также прямая, перпендикулярная им обеим. Поэтому все оси симметрии, кроме l, можно разбить на пары, т.е их общее количество нечетно. Нетрудно убедиться, что возможными являются все нечетные значения, кроме 7.

7. (Б.Френкин) Выпуклый многоугольник описан около окружности. Точки касания его сторон с окружностью образуют многоугольник с таким же набором углов (порядок углов может быть другим). Верно ли, что многоугольник правильный?

   Ответ. Да.

   Решение. Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ — данный многоугольник, B_1, B_2,…,B_n — точки касания вписанной окружности со сторонами A_1A_2, A_2A_3,…,A_nA_1. Обзначим значения углов первого могоугольника через $a_1, \dots, a_n$, а второго — через $b_1, \dots, b_n$. Тогда $b_i = (a_i + a_{i+1})/2$. Перемножая n таких равенств, получаем $2^n a_1 a_2 \cdots a_n = (a_1 + a_2) \cdots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1)$. Но по неравенству о средних $a_i + a_{i+1} \geq 2\sqrt{a_i a_{i+1}}$. Поэтому из полученного равенства следует, что все углы многоугольников равны, а так как многоугольник $B_1 \dots B_n$ — вписанный, то многоугольники правильные.

8. (А.Заславский) Три окружности проходят через точку P, а вторые точки их пересечения A, B, C лежат на одной прямой. A_1, B_1, C_1 — вторые точки пересечения прямых AP, BP, CP с соответствующими окружностями. C_2 — точка пересечения прямых AB_1 и BA_1. A_2, B_2 определяются аналогично. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

   Решение. Так как четырехугольники PAB_1C и $PBAC_1$ вписанные, $\angle CAC_2 = \angle CAB_1 = \angle CPB_1 = \angle BAC_1$ (рис.6). Аналогично $\angle ABC_2 = \angle ABC_1$, т.е точки C_1, C_2 симметричны относительно прямой AB. Повторив это рассуждение для двух других пар точек, получим, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ симметричны относительно этой прямой и, следовательно, равны.

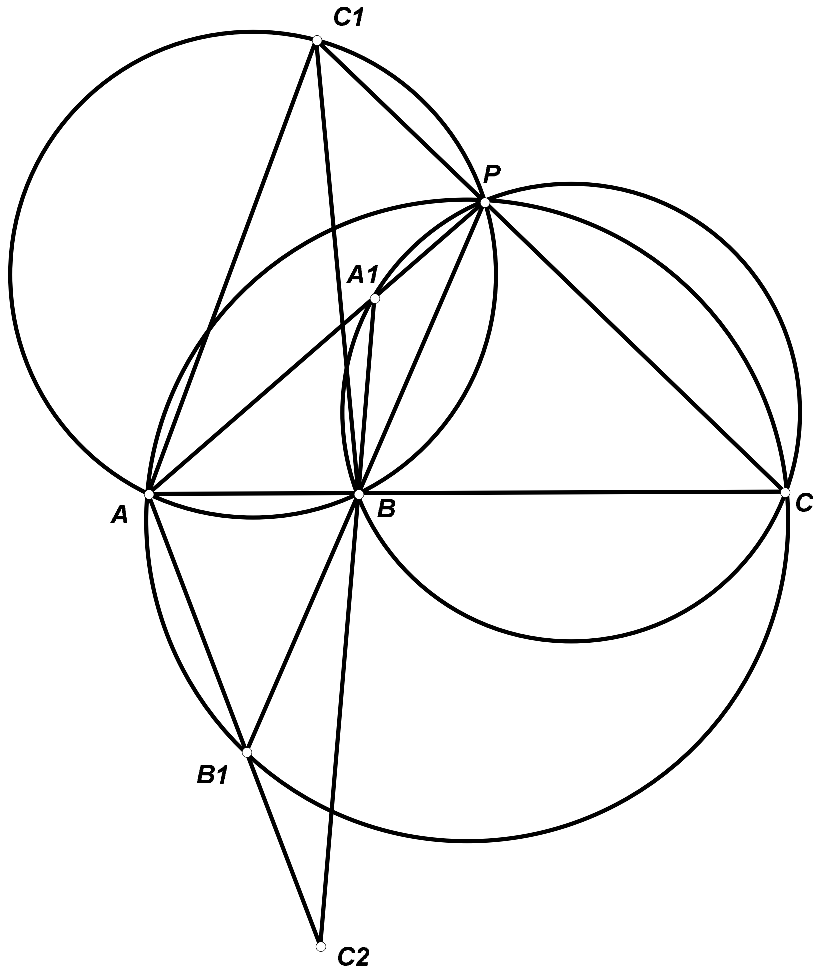


Рис.6

9. (А.Заславский) Два выпуклых четырехугольника таковы, что стороны каждого лежат на серединных перпендикулярах к сторонам другого. Найдите их углы.

   Решение. Пусть сторона $C'D'$ четырехугольника $A'B'C'D'$ лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB четырехугольника $ABCD$, а сторона $D'A'$ на серединном перпендикуляре к BC. Тогда D' — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Аналогично A', B', C' — центры описанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB. Следовательно, $B'D'$ — серединный перпендикуляр к AC. В свою очередь AC является серединным перпендикуляром к одной из диагоналей $A'B'C'D'$, а так как $AC \perp B'D'$ и $B'D' \not\parallel A'C'$, AC — серединный перпендикуляр к $B'D'$, т.е. $AB'CD'$ — ромб. Композиция симметрий относительно прямых $C'D'$, $D'A'$, $A'B'$ и $B'C'$ оставляет точку A на месте и, значит, является поворотом с центром A. С другой стороны, она является композицией поворотов с центром D' на удвоенный угол $C'D'A'$ и с центром B' на удвоенный угол $A'B'C'$, следовательно $\angle C'B'A' = \angle AB'D' = \angle B'D'A = \angle A'B'C'$. Аналогично $\angle B'C'D' = \angle D'A'B'$, т.е. $A'B'C'D'$ — параллелограмм. Так как стороны $ABCD$ перпендикулярны сторонам $A'B'C'D'$, $ABCD$ — параллелограмм с такими же углами.

   Так как C — центр описанной окружности треугольника $B'C'D'$, $\angle D'CB' = 2\angle C'D'A' = \angle B'D'C + \angle CB'D' = 90^\circ$. Соответственно, острые углы параллелограммов $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны 45°. Нетрудно видеть, что два таких параллелограмма, получающихся друг из друга поворотом на 90° вокруг общего центра удовлетворяют условию задачи (рис.7).

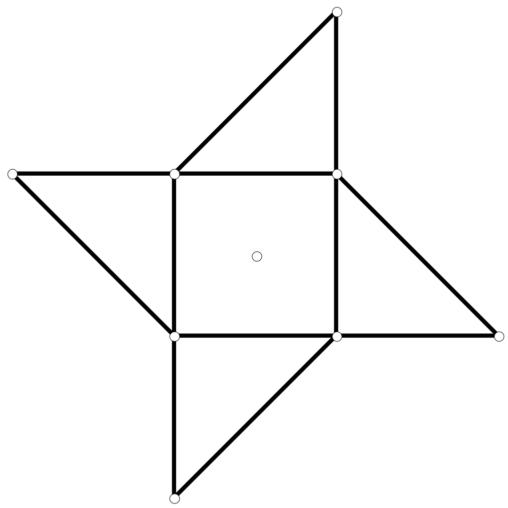


Рис.7

10. (А.Заславский) Найдите геометрическое место центров правильных треугольников, стороны которых проходят через 3 заданные точки A, B, C (т.е. на каждой стороне или ее продолжении лежит ровно одна из заданных точек).

    Решение.Пусть A, B, C — данные точки. Построим на сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону дуги, вмещающие угол 60° и найдем середины A', B', C' дополнительных дуг. Прямые, соединяющие центр треугольника с его вершинами, проходят через A', B', C', а поскольку вершины двигаются по построенным окружностям с равными угловыми скоростями, углы, под которыми из центра видны отрезки $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ остаются постоянными. Следовательно, искомое ГМТ — окружность $A'B'C'$ (рис.8).

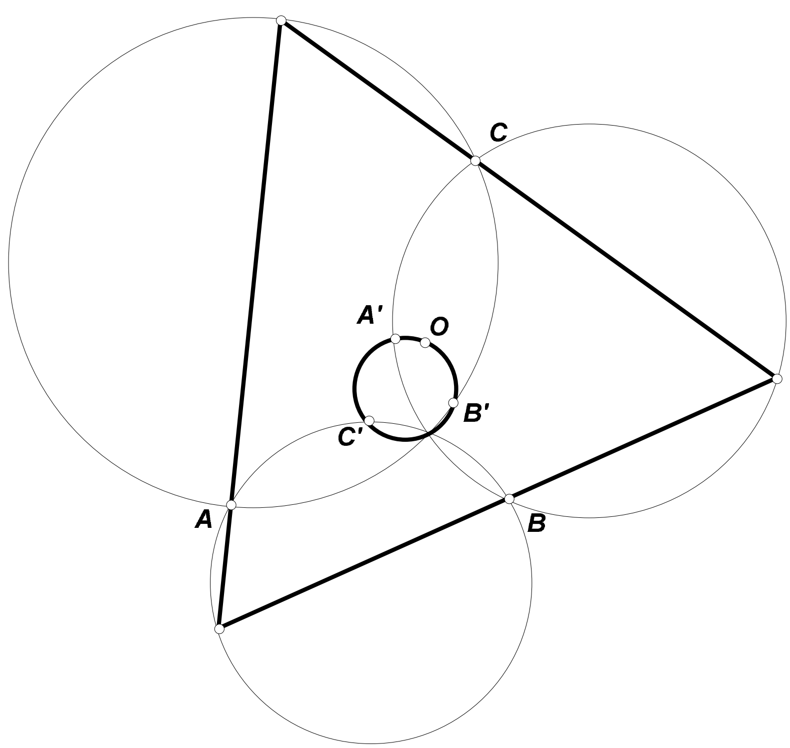


Рис.8

11. (Д.Шноль) Мальчик с папой стоят на берегу моря. Если мальчик встанет на цыпочки, его глаза будут на высоте 1 м от поверхности моря, а если сядет папе на плечи, то на высоте 2 м.

Во сколько раз дальше он будет видеть во втором случае. (Найдите ответ с точностью до 0.1, радиус Земли считайте равным 6000 км)

Решение. Из точки, находящейся на высоте h над уровнем моря видно на расстояние $d = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$, где R — радиус Земли (рис.9). Если $h << R$, то с достаточно большой точностью $d = \sqrt{2Rh}$. Поэтому искомое отношение можно считать равным $\sqrt{2}$ или $1,4$.

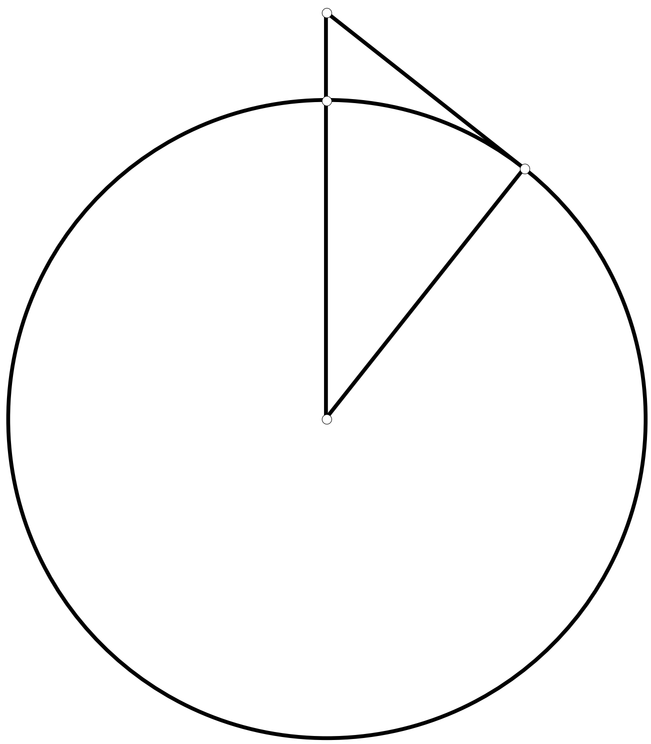


Рис.9

12. (А.Заславский) Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P. Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD, пересекаются в точке Q. Докажите, что $PQ \perp AB$.

Первое решение. Пусть U, V — проекции A и B на PC и PD, соответственно. Тогда U и V лежат на описанной окружности $ABCD$, и, применив к ломаной $AUCBVD$ теорему Паскаля, получим утверждение задачи (рис.10).

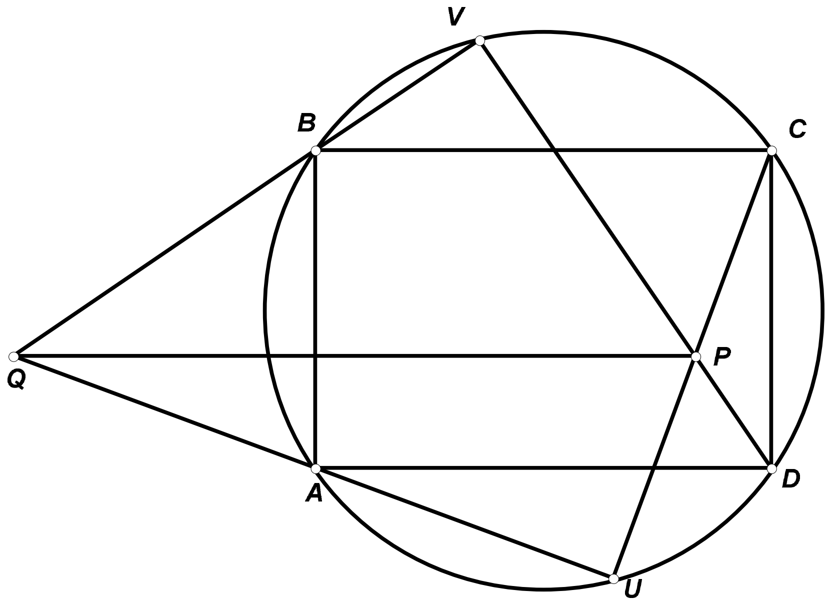


Рис.10

Второе решение. Так как $ABCD$ — прямоугольник, скалярные произведения (PA, PC) и (PB, PD) равны. Но $(PA, PC) = (PC, PA) + (PC, AQ) = (PC, PQ)$. Аналогично, $(PB, PD) = (PD, PQ)$. Следовательно, $(PQ, CD) = 0$.

Третье решение. Пусть Q' образ Q при переносе на вектор BC. Тогда $CQ' \parallel BQ \perp DP$, $DQ' \perp CP$. Следовательно, P — ортоцентр треугольника CDQ', и $PQ' \perp CD$.

13. (А.Заславский) На стороне AB треугольника ABC взяты точки X, Y, такие что $AX = BY$. Прямые CX и CY вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках U и V. Докажите, что все прямые UV проходят через одну точку.

Решение. Пусть Z — точка пересечения AB и UV. Применяя теорему синусов к треугольникам ZAU и ZBV, получаем (рис.11)

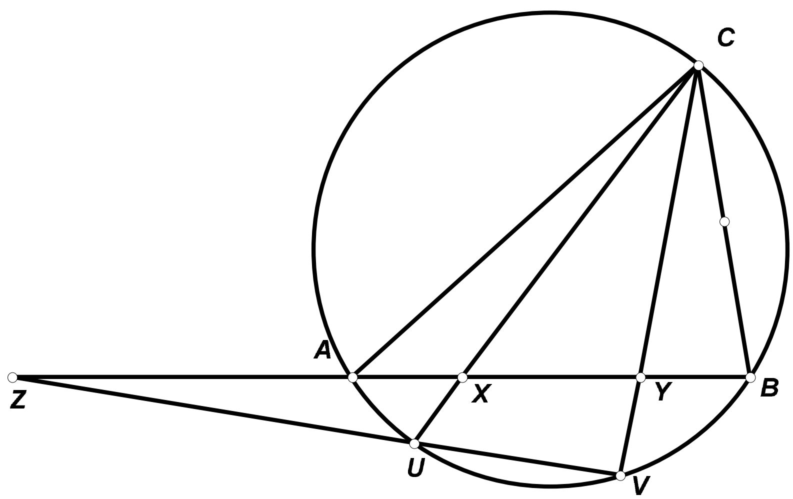


Рис.11

$$\frac{ZA}{ZB} = \frac{AU \sin \angle AUZ}{BV \sin \angle BVZ} = \frac{AU \sin \angle ACY}{BV \sin \angle BCX} = \frac{\sin \angle ACX \sin \angle ACY}{\sin \angle BCX \sin \angle BCY}.$$

Из треугольника ACX $\sin \angle ACX = \frac{AX}{AC} \sin \angle AXC$. Из этого и трех аналогичных соотношений получаем, что $\frac{ZA}{ZB} = \frac{BC^2}{AC^2}$, т.е. не зависит от выбора точек X, Y.

14. (А.Заславский) В трапеции с основаниями AD и BC P и Q — середины диагоналей AC и BD, соответственно. Докажите, что, если $\angle DAQ = \angle CAB$, то $\angle PBA = \angle DBC$.

Первое решение. Пусть L — точка пересечения диагоналей трапеции. Применяя теорему синусов к треугольникам AQD, AQB, ALD, ALB, получим, что $BL/DL = (AB/AD)^2$. Следовательно, $BC/AB = AB/AD$ и $CL/AL = (BC/AB)^2$, что равносильно утверждению задачи.

Второе решение. Пусть L и M — середины соответственно AB и AD. Тогда, так как $PL \parallel AD$, $QM \parallel AB$, $\angle AQM = \angle QAB = \angle CAD = \angle APL$, и значит треугольники APL и AMQ подобны (рис.12). Следовательно, $AP/AQ = AL/AM = AB/AD$. Поэтому треугольники ABP и ADQ подобны, т.е. $\angle ABP = \angle ADQ = \angle CBQ$.

15. (М.Волчкевич) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA', BB' и CC'. Пусть $A'B' \cap CC' = P$ и $A'C' \cap BB' = Q$. Докажите, что $\angle PAC = \angle QAB$.

Решение. Применяя теорему синусов к треугольникам $AC'Q$ и $AA'Q$, получаем (рис.13)

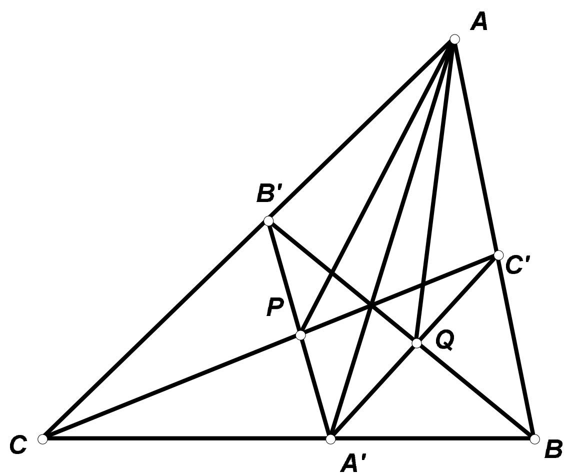


Рис.13

$$\frac{\sin \angle C'AQ}{\sin \angle A'AQ} = \frac{C'Q}{A'Q}\frac{AA'}{AC'} = \frac{BA'}{BC'}\frac{AA'}{AC'}.$$

Аналогично
$$\frac{\sin \angle B'AP}{\sin \angle A'AP} = \frac{CA'}{CB'}\frac{AA'}{AB'}.$$

По теореме Чевы эти отношения равны, что равносильно утверждению задачи.

16. (В.Протасов) На сторонах угла взяты точки A, B. Через середину M отрезка AB проведены две прямые, одна из которых пересекает стороны угла в точках A_1, B_1, другая — в точках A_2, B_2. Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекают AB в точках P и Q. Докажите, что M — середина PQ.

Решение. Пусть C — вершина данного угла. Рассматривая центральные проекции прямой AB на прямую AC из точек B_1, B_2, получаем равенство двойных отношений (рис.14)

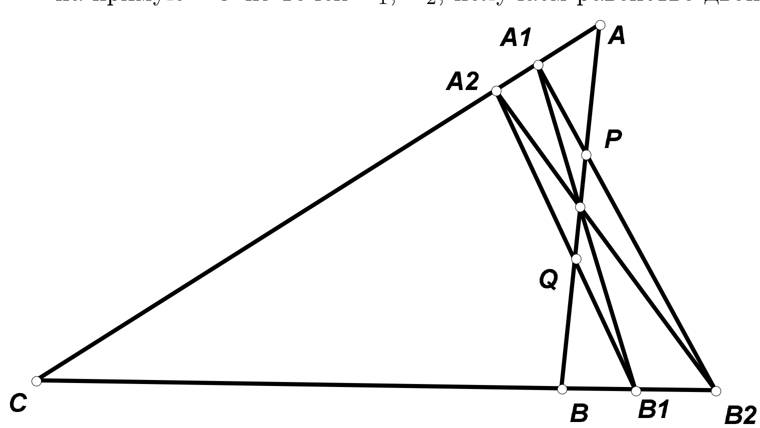


Рис.14

$$(AP;MB) = (AA_1;A_2C) = (CA_2;A_1A) = (BQ;MA),$$

что равносильно утверждению задачи.

17. (Л.Емельянов) Какие треугольники можно разрезать на три треугольника с равными радиусами описанных окружностей?

Ответ. Все, кроме равнобедренных неостроугольных.

Решение. Если треугольник ABC остроугольный, то радиусы описанных окружностей треугольников ABH, BCH и CAH, где H — ортоцентр, равны.

Пусть $\angle C \geq 90^\circ$ и $AC > BC$. Возьмем на стороне AC такую точку D, что $AD = BD$, а на стороне AB такую точку E, что $\angle AED = \angle C$ (это возможно, т.к. $\angle A + \angle C < 180^\circ$). По теореме синусов радиусы описанных окружностей треугольников ADE, BDE и BDC равны (рис.15).

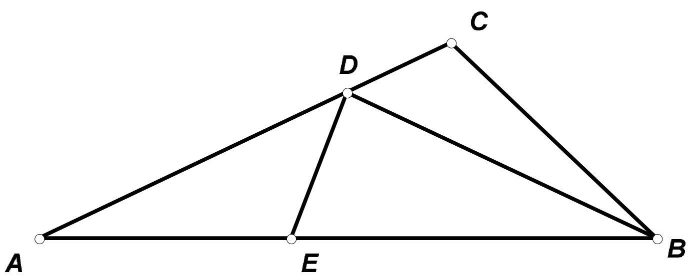


Рис.15

Пусть $\angle C \geq 90^\circ$ и $AC = BC$. Покажем, что треугольник ABC нельзя разрезать требуемым образом. Если разрезание осуществляется из внутренней точки, то радиусы получившихся треугольников могут быть равны только, если точка является ортоцентром, что невозможно. Если же треугольник разрезается чевианой на два, а затем один из этих двух еще раз на два, то треугольник, который разрезается второй чевианой, должен быть равнобедренным, следовательно первый разрез нужно производить отрезком CD, где $AD = AC$. Но тогда при любом разрезании треугольника ACD из вершины A радиусы окружностей, описанных около полученных треугольников будут меньше радиуса описанной окружности треугольника BCD (рис.16).

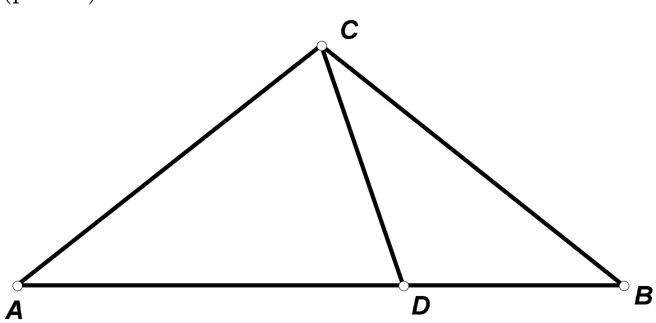


Рис.16

18. (Б.Френкин) Найдите геометрическое место вершин треугольников с заданными ортоцентром и центром описанной окружности.

Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, H — ортоцентр, C_0 — середина стороны AB. Тогда $\vec{C}H = 2\vec{O}C_0$, и так как C_0 лежит внутри описанной окружности $CH < 2OC$. Точки, удовлетворяющие этому условию, лежат вне окружности, диаметрально противоположными точками которой являются точка M, делящая отрезок OH в отношении $1:2$ (центр тяжести треугольника), и точка M', симметричная H относительно O. Для таких точек C искомый треугольник строится следующим образом: построим точку C_0, как образ C при гомотетии с центром M и коэффициентом $-1/2$, проведем через нее прямую, перпендикулярную CH и найдем точки A, B пересечения этой прямой и окружности с центром O и радиусом OC. Однако, это построение может привести к вырожденному треугольнику, у которого точки A, B, C лежат на одной прямой. Это происходит когда $\angle OC_0C = \angle MCH = 90°$, т.е. точка C лежит на окружности с диаметром MH. Исключением является сама точка H, для которой искомый треугольник существует — это может быть любой прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является диаметр окружности с центром O и радиусом OH. Таким образом, искомое ГМТ — это внешность окружности с диаметром MM', исключая окружность с диаметром MH, но включая точку H (рис.17).

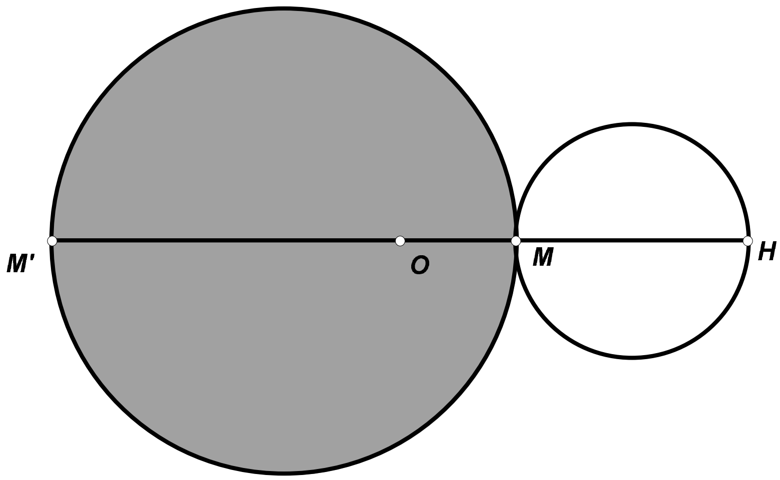


Рис.17

19. (В.Протасов) В угол A, равный α, вписана окружность, касающаяся его сторон в точках B и C. Прямая, касающаяся окружности в некоторой точке M, пересекает отрезки AB и AC в точках и Q, соответственно. При каком наименьшем α возможно неравенство $S_{PAQ} < S_{BMC}$?

    Решение. Отношение S_{PAQ}/S_{BMC} принимает наименьшее значение, когда эти треугольники равнобедренные. Условие равенства площадей имеет вид $\sin\frac{\alpha}{2}(1+\sin\frac{\alpha}{2}) = 1$. Следовательно, искомое неравенство возможно при $\alpha > 2\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

20. (Д.Шноль) Основанием пирамиды является правильный треугольник со стороной 1. Из трех углов при вершине пирамиды два — прямые. Найдите наибольший объем пирамиды.

    Решение. Пусть ABC — основание пирамиды, стороны AC, BC видны из ее вершины S под прямыми углами. Тогда S лежит на линии пересечения сфер с диаметрами AC и BC, т.е на окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной основанию с диаметром CD, где D — середина AB. Максимум объема достигается, когда S — наиболее удаленная от плоскости ABC точка этой окружности. При этом высота пирамиды равна $CD/2$, а ее объем $1/16$.

21. (Н.Долбилин) На плоскости лежат три трубы (круговые цилиндры одного размера в обхвате 4 м). Две из них лежат параллельно и, касаясь друг друга по общей образующей, образуют над плоскостью тоннель. Третья, перпендикулярная к первым двум, вырезает в тоннеле камеру. Найдите площадь границы этой камеры.

    Ответ. $\pi/8$.

    Первое решение. Горизонтальные сечения камеры являются прямоугольниками с периметрами, равными удвоенному диаметру трубы. Для каждого такого прямоугольника угол между его плоскостью и касательной к поверхности камеры один и тот же во всех точках. Середины сторон этих прямоугольников при перемещении сечения описывают четверти окружности трубы. Поэтому площадь поверхности камеры равна площади поверхности тетраэдра, грани которого — равные равнобедренные треугольники с основанием, равным диаметру трубы, и высотой, равной четверти ее окружности.

Второе решение. Будем называть касающиеся друг друга цилиндры продольными, а перпендикулярный им — поперечным. Очевидно, что плоскость, касающаяся продольных цилиндров по общей образующей, и вертикальная плоскость, проходящая через ось поперечного цилиндра, являются плоскостями симметрии камеры и разрезают ее на четыре равные части. Рассмотрим одну из таких четвертей. Ее граница состоит из двух кусков: части поверхности продольного цилиндра, лежащей внутри половины поперечного, и части поверхности поперечного цилиндра, лежащей между продольным и касательной к нему вертикальной плоскостью. Линия пересечения цилиндров является эллипсом и лежит в вертикальной плоскости, при симметрии относительно которой цилиндры переходят друг в друга. Образ при этой симметрии части поверхности камеры, лежащей на продольном цилиндре, дополняет часть, лежащую на поперечном до криволинейного прямоугольника со сторонами, равными половине диаметра и четверти окружности цилиндра. Соответственно, площадь поверхности камеры равна учетверенной площади такого прямоугольника.

IV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (Б.Френкин, 8) Существует ли правильный многоугольник, в котором ровно половина диагоналей параллельна сторонам?

   Ответ. Нет.

   Решение. Если число сторон многоугольника нечетно, то каждая его диагональ параллельна какой-то стороне. Если же число сторон равно $2k$, то из каждой вершины выходит $2k-3$ диагонали, из которых для $k-2$ существуют параллельные им стороны. Поэтому диагоналей, параллельных сторонам, меньше половины.

2. (В.Протасов, 8) Для данной пары окружностей постройте две концентрические окружности, каждая из которых касается двух данных. Сколько решений имеет задача, в зависимости от расположения окружностей ?

   Решение. Пусть радиусы двух окружностей с центром O равны R и r $(R > r)$. Тогда есть два семейства касающихся их окружностей: с радиусами, равными $\frac{R+r}{2}$, и центрами, удаленными от O на $\frac{R-r}{2}$, и с радиусами, равными $\frac{R-r}{2}$, и центрами, удаленными от O на $\frac{R+r}{2}$. При этом любые две окружности из одного семейства симметричны относительно некоторой прямой, проходящей через O, а любые две окружности из разных семейств пересекаются или касаются. Отсюда вытекает следующее построение.

   Если радиусы данных окружностей равны, то центр искомых концентрических окружностей лежит на прямой, относительно которой данные окружности симметричны. При этом любая точка O этой прямой, кроме точек пересечения данных окружностей, может быть таким центром. Действительно, проведем через O и центр одной из данных окружностей прямую и найдем точки A, B ее пересечения с этой окружностью (рис.2.1). Окружности с радиусами OA, OB — искомые.

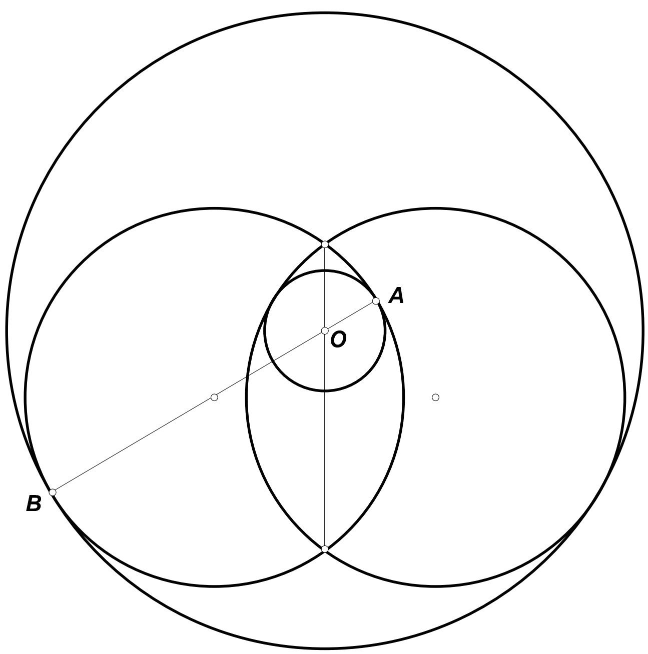


Рис.2.1

Если радиусы данных окружностей различны, то центр искомых окружностей удален от центра каждой из данных на расстояние, равное радиусу другой. Таких точек существует две, если данные окружности пересекаются, и одна, если они касаются. При этом искомые окружности строятся так же, как в предыдущем случае (рис.2.2).

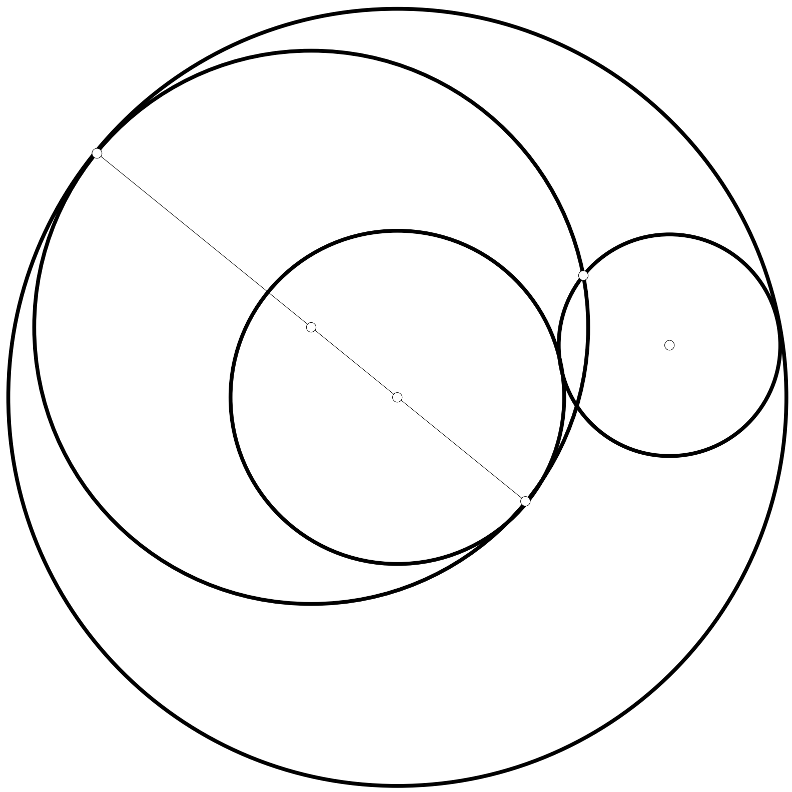


Рис.2.2

Таким образом задача имеет бесконечно много решений, если данные окружности равны, два решения, если радиусы различны и окружности пересекаются, одно, — если радиусы различны и окружности касаются, и ни одного для различных не пересекающихся окружностей.

3. (А.Заславский, 8) Треугольник можно разрезать на три равных треугольника. Докажите, что один из его углов равен $60°$.

Решение. Треугольник можно разрезать на три треугольника либо соединив внутреннюю точку с вершинами, либо сначала разрезав его на два прямой, проходящей через вершину, а затем так же разрезав один из полученных треугольников. Рассмотрим оба случая.

1) Пусть треугольник ABC разрезан на три треугольника отрезками из точки M. Так как угол AMB больше любого из углов MAC, MBC, MCA, MCB, равенство треугольников возможно только при $\angle AMB = \angle BMC = \angle MCA = 120°$. Но тогда $MA = MB = MC$, и исходный треугольник правильный.

2) Разрезать на два равных треугольника можно только равнобедренный треугольник. Поэтому один из треугольников, полученных при первом разрезании должен

быть равнобедренным, а второй — прямоугольным, равным "половине"первого. Отрезать же от исходного треугольника прямоугольный можно только одним из следующих трех способов:

- проведя в исходном треугольнике высоту. Но тогда второй треугольник тоже будет прямоугольным и первый не может быть равен его половине;

- проведя в тупоугольном треугольнике ABC через вершину тупого угла C прямую CD, перпендикулярную BC. Тогда, так как площадь треугольника BCD равна половине площади треугольника ACD, должны выполняться равенства $AD = CD = 2BD$, что невозможно, поскольку BD — гипотенуза треугольника BCD;

- проведя в треугольнике с прямым углом C прямую BD. Тогда аналогично предыдущему случаю получаем, что $AD = BD = 2CD$ и, значит, $\angle B = 60°$ (рис.3).

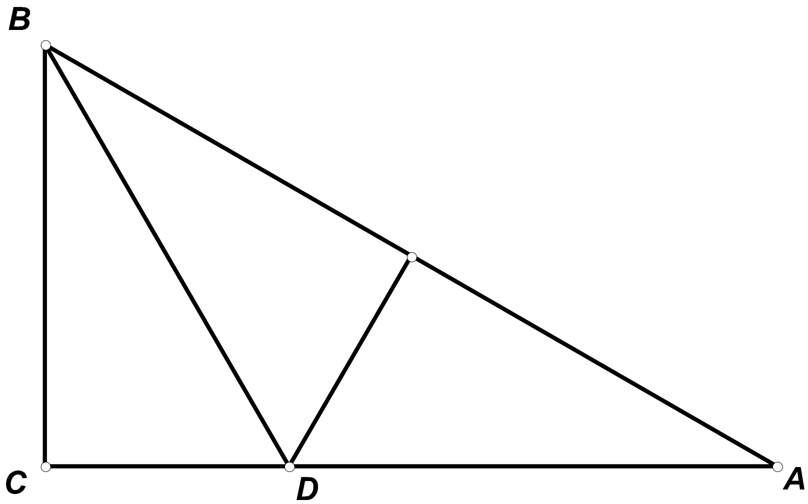


Рис.3

4. (Д.Шноль, 8–9) Биссектрисы двух углов вписанного четырехугольника параллельны. Докажите, что сумма квадратов двух сторон четырехугольника равна сумме квадратов двух других сторон.

   Решение. Прежде всего заметим, что биссектрисы смежных углов четырехугольника не могут быть параллельны, так как сумма этих углов меньше 360°. Если же параллельны, например, биссектрисы углов A и C четырехугольника $ABCD$, то $\frac{\angle A}{2} + \angle B + \frac{\angle C}{2} = 180°$ и $\angle B = \angle D$. Поскольку четырехугольник вписанный, эти углы — прямые, и $AB^2 + BC^2 = CD^2 + DA^2$.

5. (Из Киевских олимпиад, 8–9) Постройте квадрат $ABCD$, если даны его вершина A и расстояния от вершин B и D до фиксированной точки плоскости O.

   Решение. Пусть O' — такая точка, что $AO = AO'$ и $\angle OAO' = 90°$. Тогда $\angle O'AB = \angle OAD$ и, так как $AB = AD$, треугольники OAD и $O'AB$ равны. Следовательно, $O'B = OD$ и, зная длины отрезков OB, $O'B$, можно построить точку B, а затем и весь квадрат (рис.5). Задача имеет два решения, симметричных относительно прямой OA.

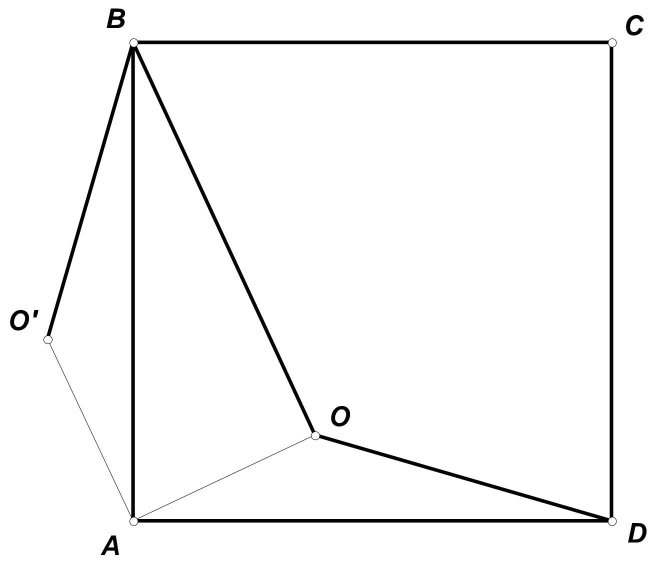


Рис.5

6. (А. Мякишев, 8–9) На плоскости даны две концентрические окружности с центром в точке A. Пусть B — произвольная точка одной из этих окружностей, C — другой. Для каждого треугольника ABC рассмотрим две окружности одинакового радиуса, касающиеся друг друга в точке K, причем одна окружность касается прямой AB в точке B, а другая — прямой AC в точке C. Найдите ГМТ K.

Решение. Пусть M, N — центры касающихся окружностей. Тогда K — середина отрезка MN, $\angle ABM = \angle ACN = 90°$, и $BM = MK = KN = NC$ (рис.6). Так как AK — медиана треугольника AMN, $AK^2 = \frac{2AM^2+2AN^2-MN^2}{4} = \frac{AB^2+AC^2}{2}$ — не зависит от выбора точек B, C. Следовательно, K лежит на окружности с центром A. Вращая треугольник ABC вокруг A, можно получить любую точку этой окружности.

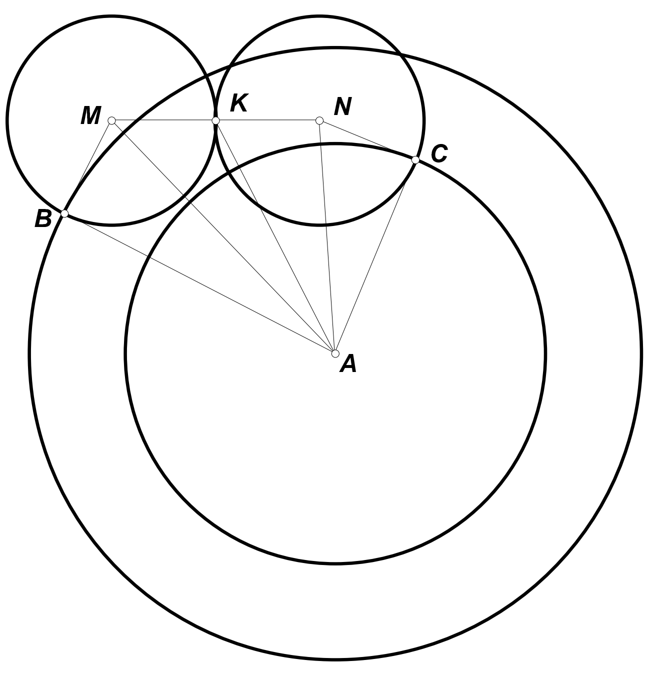


Рис.6

7. (А.Заславский, 8–9) Дана окружность и точка O на ней. Вторая окружность с центром O пересекает первую в точках P и Q. Точка C лежит на первой окружности, а прямые CP, CQ вторично пересекают вторую окружность в точках A и B. Докажите, что $AB = PQ$.

Решение. Если C совпадает с O, утверждение задачи очевидно, а если C — точка, диаметрально противоположная O, то $\angle CPO = \angle CQO = 90°$, т.е. прямые CP, CQ касаются второй окружности и точки A, B совпадают с P, Q. В остальных случаях, так как $OP = OQ$, то CO — биссектриса угла ACB. При симметрии относительно CO прямые CP и CQ переходят друг в друга, а вторая окружность в себя, следовательно, точка P переходит либо в Q, либо в B. Но $CP \neq CQ$, так что первый случай невозможен. Значит, $CP = CB$. Аналогично $CQ = CA$. Отсюда вытекает равенство треугольников CAB и CQP, а значит, и утверждение задачи (рис.7).

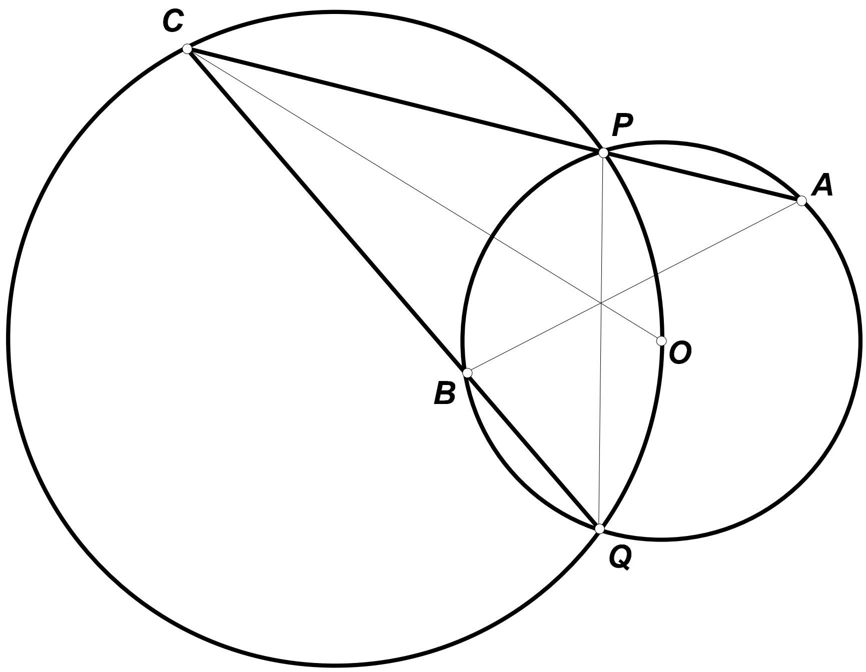


Рис.7

8. (Т.Голенищева-Кутузова, Б.Френкин, 8–11) а) Докажите, что при $n > 4$ любой выпуклый n-угольник можно разрезать на n тупоугольных треугольников.

б) Докажите, что при любом n существует выпуклый n-угольник, который нельзя разрезать меньше, чем на n тупоугольных треугольников.

в) На какое наименьшее число тупоугольных треугольников можно разрезать прямоугольник?

Решение. а) При $n > 4$ у выпуклого n-угольника обязательно есть тупой угол. Диагональ, соединяющая две вершины, соседние с вершиной этого угла, разрезает n-угольник на тупоугольный треугольник и $(n-1)$-угольник. Поэтому, если доказать утвердение задачи для $n = 5$, то для остальных значений n оно выводится по индукции.

Заметим, что любой треугольник можно разрезать на три тупоугольных треугольника. Действительно, высота, проведенная из наибольшего угла, лежит внутри треугольника. Взяв на этой высоте точку, достаточно близкую к основанию, и соединив ее с вершинами, получим требуемое разрезание. Отсюда следует, что четырехугольник, отличный от прямоугольника, можно разрезать на четыре тупоугольных треугольника.

Рассмотрим теперь пятиугольник $ABCDE$. Пусть его угол A — тупой. Если $BCDE$ — не прямоугольник, то проведя диагональ BE и разрезав $BCDE$ на четыре тупоугольных треугольника, получим требуемое разрезание. Если же $BCDE$ — прямоугольник, то углы B и E пятиугольника тупые, т.е $ACDE$ не может быть прямоугольником. Поэтому, проведя диагональ AC и разрезав на четыре треугольника $ACDE$, опять получим требуемое разрезание.

б) Пусть выпуклый n-угольник разрезан на $n-1$ тупоугольных треугольников. Сумма их углов равна $(n-1)\pi$, а сумма углов n-угольника составляет $(n-2)\pi$. Поэтому сумма углов треугольников, которые не примыкают к вершинам n-угольника, равна π. Значит, среди них не более одного тупого. Поэтому к вершинам n-угольника примыкает не менее $n-2$ тупых углов треугольников. К одной вершине выпуклого n-угольника не может примыкать изнутри более одного тупого угла. Значит, n-угольник имеет не менее $n-2$ тупых углов. Но это верно не для всякого выпуклого n-угольника при любом $n \geq 3$.

в) Очевидно, что, проведя диагональ и разрезав каждый из образовавшихся треугольников на три тупоугольных, получим разрезание прямоугольника на шесть тупоугольных треугольников. Докажем, что разрезать прямоугольник на меньшее число треугольников нельзя. Предположим, что прямоугольник разрезан на пять тупоугольных треугольников. Тогда, рассуждая, как в п.б), получаем, что сумма углов этих треугольников, не примыкающих к вершинам прямоугольника, равна 3π. Если все такие углы расположены в точках на сторонах прямоугольника, то таких точек три и в каждой из них находится не более одной вершины тупого угла. Поскольку в вершинах прямоугольника тупых углов нет, получаем противоречие. Если же некоторые вершины треугольников лежат внутри прямоугольника, то получаем одну внутреннюю точку, в которой сходится не более трех тупых углов, и одну точку на стороне, т.е. общее количество тупых углов не превышает четырех, и опять получаем противоречие. Аналогично доказывается, что прямоугольник нельзя разрезать на четыре тупоугольных треугольника.

9. (А.Заславский, 9–10) Прямые, симметричные диагонали BD четырехугольника $ABCD$ относительно биссектрис углов B и D, проходят через середину диагонали AC. Докажите, что прямые, симметричные диагонали AC относительно биссектрис углов A и C, проходят через середину диагонали BD.

   Решение. Пусть P — середина AC, L — точка пересечения диагоналей. Применив теорему синусов к треугольникам ABP, ABL, CBP, CBL, получаем, что $AL/CL = (AB/CB)^2$. Аналогично, $AL/CL = (AD/CD)^2$, т.е. $BC/CD = AB/AD = \frac{\sin\angle BDA}{\sin\angle DBA} = \frac{\sin\angle CDP}{\sin\angle CBP}$. Следовательно, прямые BP и DP симметричны относительно AC. Пусть X — вторая точка пересечения прямой BP с описанной окружностью треугольника ABC. Точка, симметричная X относительно серединного перпендикуляра к AC лежит как на PD, так и на BD, и, значит, совпадает с D. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ — вписанный, и $AB \cdot CD = AD \cdot BC = (AC \cdot BD)/2$. Пусть прямая, симметричная AC относительно биссектрисы угла A, пересекает BD в точке Q. Тогда треугольники ABQ и ACD подобны, следовательно, $AB/AC = BQ/BD$ и $BQ = BD/2$ (рис.9).

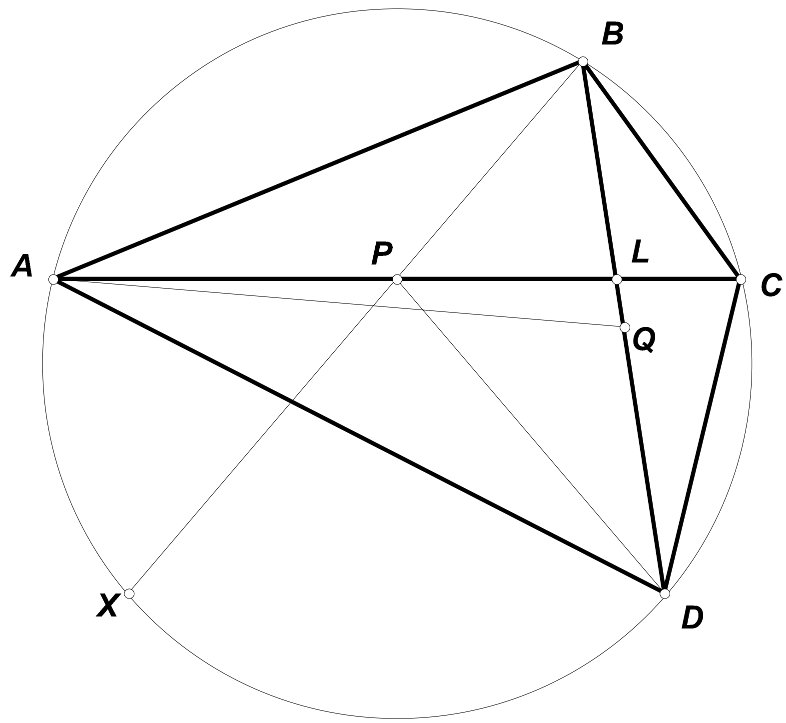


Рис.9

10. (А.Заславский, 9–10) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Докажите, что проекции точек B и D на прямые IA и IC лежат на одной окружности.

Решение. Очевидно, что середина отрезка BD равноудалена от проекций точек B и D на любую прямую. Докажем, что она равноудалена и от проекций X, Y точки B на IA и IC.

Так как $\angle BXI = \angle BYI = 90^\circ$, точки X, Y лежат на окружности с диаметром BI, т.е. серединный перпендикуляр к отрезку XY проходит через середину BI. Таким образом достаточно доказать, что $XY \perp ID$. Действительно, в этом случае серединный перпендикуляр к XY будет совпадать со средней линией треугольника BDI и, значит, пройдет через середину BD.

Так как точки B, I, X, Y лежат на одной окружности, угол между XY и XA равен углу иежду BY и BI, т.е. $\angle BIC - 90^\circ$. Следовательно, угол между XY и ID равен $\angle AID + \angle BIC - 90^\circ = 90^\circ$ (рис.10).

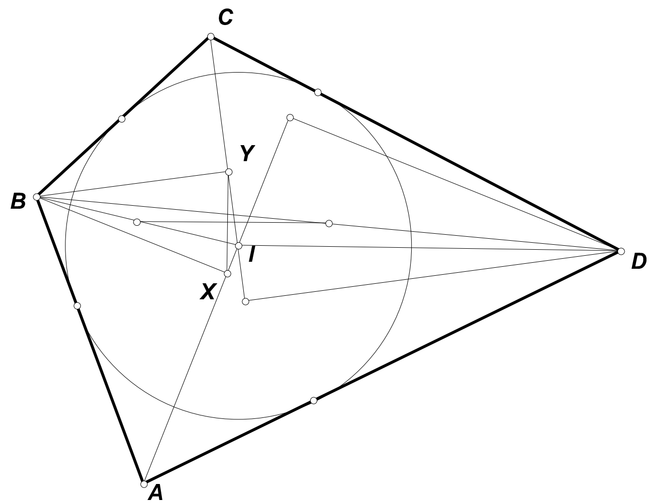


Рис.10

11. (А.Заславский, 9–10) Даны четыре точки A, B, C, D. Известно, что любые две окружности, одна из которых проходит через A и B, а другая — через C и D, пересекаются. Докажите, что общие хорды всех таких пар окружностей проходят через одну точку.

    Решение. Рассмотрим сначала случай, когда точки не лежат на одной прямой. Если, например, C и D лежат по одну сторону от прямой AB, то существует окружность ω, проходящая через C и D и касающаяся AB. Тогда через A и B можно провести окружность достаточно большого радиуса, не пересекающую ω. Следовательно, отрезки AB и CD должны пересекаться. Пусть O — точка пересечения серединных перпендикуляров к этим отрезкам. Две окружности с центром O и радиусами OA и OC либо не пересекаются, либо совпадают. Таким образом, точки A, B, C, D лежат на одной окружности. По теореме о радикальных осях трех окружностей общая хорда любых двух окружностей, проходящих через A, B и C, D соответственно, проходит через точку пересечения AB и CD.

    Если же все точки лежат на одной прямой, то, очевидно, что отрезки AB и CD пересекаются, а общая хорда окружностей пересекает прямую, на которой лежат точки, в точке P, принадлежащей обоим отрезкам и удовлетворяющей равенству $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Эти условия определяют точку P однозначно.

12. (А.Мякишев, 9–10) Имеется треугольник ABC. На луче BA отложим точку A_1, так что отрезок BA_1 равен BC. На луче CA отложим точку A_2, так что отрезок CA_2 равен BC. Аналогично построим точки B_1, B_2 и C_1, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 параллельны.

    Решение. Пусть O, I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника. Так как BI — биссектриса угла B равнобедренного треугольника A_1BC, $A_1I = IC$. Аналогично $A_2I = IB$. Следовательно

    $$A_1I^2 - A_2I^2 = IC^2 - IB^2 = (p-c)^2 - (p-b)^2 = a(b-c).$$

    С другой стороны, если B_0, C_0 — середины AC и AB, то

    $$OA_1^2 - OA_2^2 = OC_0^2 - OB_0^2 + A_1C_0^2 - A_2B_0^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{c}{2}\right)^2 - \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = a(b-c).$$

Следовательно, прямые A_1A_2 и OI перпендикулярны (рис.12). Аналогично получаем, что OI перпендикулярна двум другим прямым.

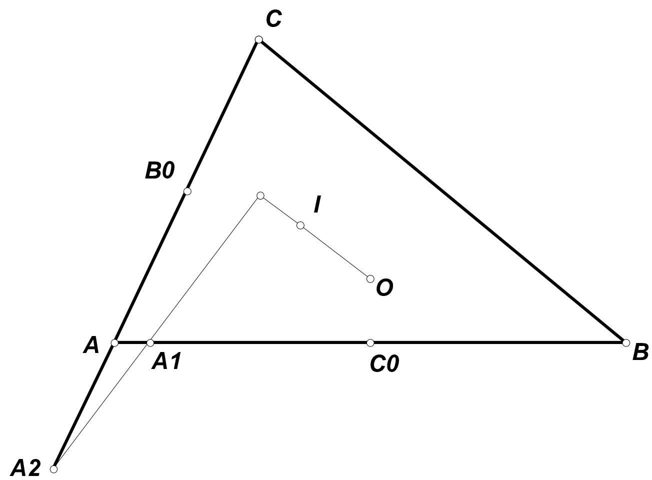


Рис.12

13. (А.Мякишев, 9–10) Дан треугольник ABC. Вневписанная окружность касается его стороны BC в точке A_1 и продолжений двух других сторон. Другая вневписанная окружность касается стороны AC в точке B_1. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке N. На луче AA_1 отметили точку P, такую что $AP = NA_1$. Докажите, что точка P лежит на вписанной в треугольник окружности.

Решение. Так как точки касания сторон треугольника с вневписанными окружностями симметричны их точкам касания с вписанной окружностью относительно середин сторон, $CA_1 = p - b$, $CB_1 = p - a$, $AB_1 = BA_1 = p - c$. Применив теорему Менелая к треугольнику ACA_1 и прямой BB_1, получаем, что $A_1N/AA_1 = (p - a)/p$. Гомотетия с этим коэффициентом и центром A переведет точку A_1 в точку P. Но отношение радиусов вписанной и вневписанной окружностей треугольника тоже равно $(p - a)/p$, значит образ A_1 при этой гомотетии лежит на вписанной окружности (рис.13).

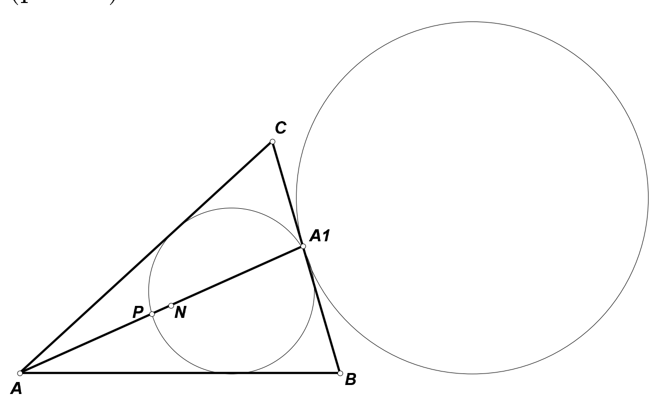


Рис.13

14. (В.Протасов, 9–10) Прямая, соединяющая центр описанной окружности и точку пересечения высот неравнобедренного треугольника, параллельна биссектрисе одного из его углов. Чему равен этот угол?

Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, H — его ортоцентр, и прямая OH параллельна биссектрисе угла C. Так как эта биссектриса пересекает описанную окружность в середине C' дуги AB, $OC' \perp AB$, т.е. четырехугольник $OC'CH$ — параллелограмм и $CH = OC' = R$. С другой стороны, $CH = 2R|\cos C|$, значит угол C равен $60°$ или $120°$. Но в первом случае лучи CO и CH симметричны относительно биссектрисы угла C, так что прямая OH не может быть параллельна этой биссектрисе. Следовательно, $C = 120°$ (рис.14).

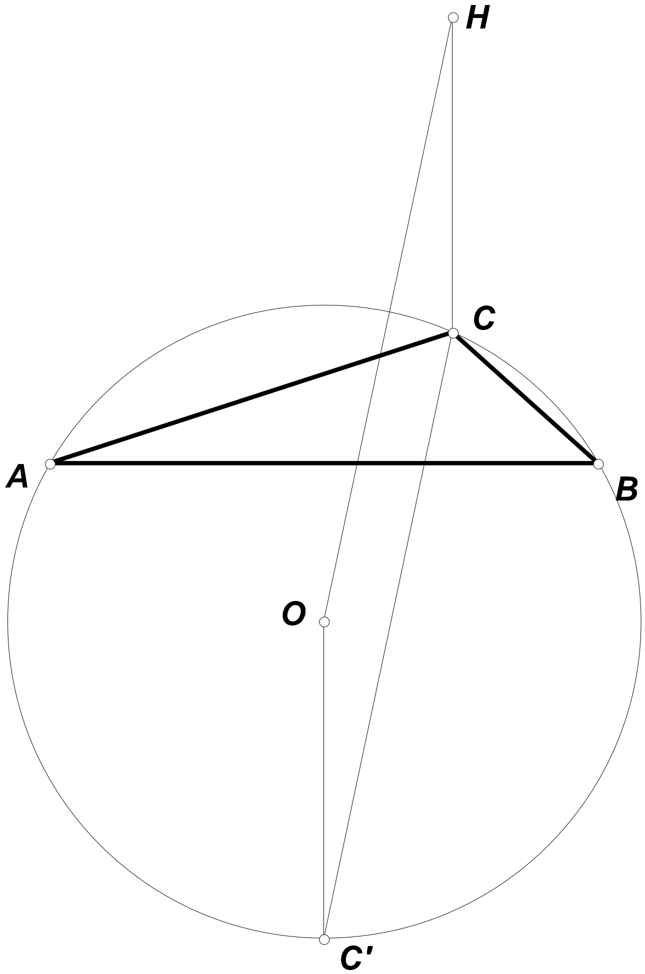


Рис.14

15. (М.Волчкевич, 9–11) Даны две окружности и не лежащая на них точка P. Проведите через P прямую, высекающую на данных окружностях хорды равной длины.

    Решение. Пусть A, B — точки пересечения искомой прямой с одной окружностью, C, D — с другой, M — середина отрезков AD и BC. Тогда степени точки M относительно окружностей равны, т.е M лежит на их радикальной оси. Пусть L — середина отрезка между центрами окружностей. Так как проекциями центров на искомую прямую являются середины отрезков AB и CD, проекцией L на эту прямую будет точка M. Следовательно, $\angle LMP = 90°$ и M лежит на окружности с диаметром LP. Таким образом, чтобы построить искомую прямую, надо найти точки пересечения этой окружности с радикальной осью. Задача может иметь два, одно или ни одного решения.

16. (А.Заславский, 9–11) Даны две окружности. Общая внешняя касательная касается их в точках A и B. Точки X, Y на окружностях таковы, что существует окружность, касающаяся данных в этих точках, причем одинаковым образом (внешним или внутренним). Найдите геометрическое место точек пересечения прямых AX и BY.

Решение. Точки X, Y являются центрами гомотетии каждой из данных окружностей с касающейся. Следовательно, прямая XY проходит через центр гомотетии данных окружностей, т.е. точку пересечения AB с линией центров. Пусть Y' — отличная от Y точка пересечения этой прямой с второй окружностью. Тогда $BY' \parallel AX$ и $\angle XYB = \angle Y'BA = \pi - \angle BAX$. Поэтому четырехугольник $AXYB$ — вписанный и точка P пересечения прямых AX и BY является радикальным центром данных окружностей и окружности, описанной около этого четырехугольника, т.е. лежит на радикальной оси данных окружностей (рис.16).

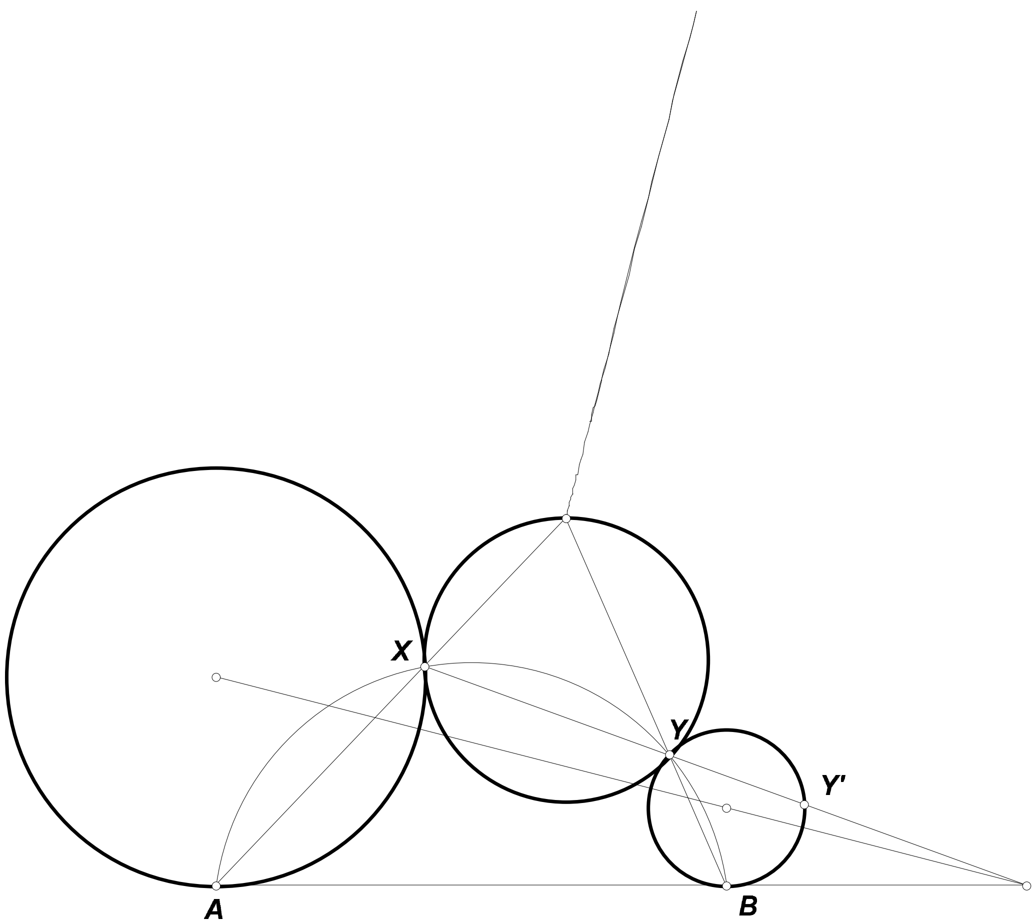


Рис.16

17. (А.Мякишев, 9–11) Дан треугольник ABC и линейка, на которой отмечены два отрезка, равные AC и BC. Пользуясь только этой линейкой, найдите центр вписанной окружности треугольника, образованного средними линиями ABC.

Решение. Отложим на продолжении стороны AB за точку B и на продолжении стороны AC за точку C отрезки $BC_1 = CB_1 = BC$. Пусть A' — точка пересечения BB_1 и CC_1. Тогда прямая AA' проходит через искомую точку (рис.17).

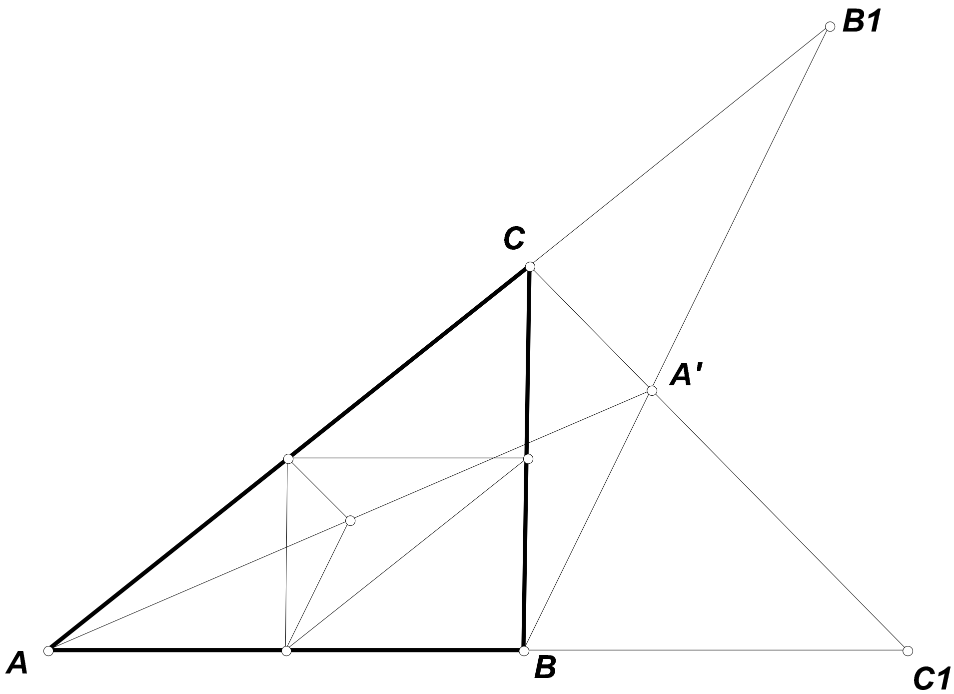


Рис.17

Действительно, так как треугольники BCB_1 и CBC_1 равнобедренные, прямые BB_1 и CC_1 параллельны биссектрисам углов C и B. Поэтому при гомотетии с центром A и коэффициентом $1/2$ эти прямые перейдут в биссектрисы углов серединного треугольника, а точка A' — в искомый центр.

Аналогично, используя второй отмеченный на линейке отрезок, построим прямую, проходящую через B и исходную точку.

18. (А.Абдуллаев, Азербайджан, 9–11) Докажите, что для треугольника со сторонами a, b, c и площадью S выполнено неравенство

$$a^2+b^2+c^2-\frac{1}{2}(|a-b|+|b-c|+|c-a|)^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Первое решение. Пусть C — средний угол треугольника. Тогда $|b-c|+|c-a| = |a-b|$ и левая часть неравенства равна

$$a^2+b^2+c^2-2(a-b)^2 = 4ab-(a^2+b^2-c^2) = 2ab(2-\cos C).$$

Поскольку правая часть равна $2\sqrt{3}ab\sin C$, данное неравенство равносильно следующему

$$2-\cos C \geq \sqrt{3}\sin C.$$

Но $\cos C+\sqrt{3}\sin C = 2\cos(C-\frac{\pi}{3})$, следовательно, данное неравенство всегда справедливо и обращается в равенство только при $C = 60^\circ$.

Второе решение. Вновь полагая, что c — средняя сторона треугольника, обозначим $x = p-a$, $y = p-b$, $z = p-c$, где p — полупериметр, и запишем левую часть в виде

$$a^2+b^2-(a-b)^2+c^2-(a-b)^2 = 2ab+4xy = 2(x+z)(y+z)+4xy = 2pz+6xy.$$

И поскольку правая часть равна $4\sqrt{3pxyz}$, неравенство принимает вид

$$pz + 3xy - 2\sqrt{3pxyz} = (\sqrt{px} - \sqrt{3xy})^2 \geq 0.$$

19. (В.Протасов, 10-11) Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = a$, $AD = b$. Первая окружность имеет центр в вершине A и проходит через D, вторая имеет центр в C и проходит через D. Произвольная окружность с центром B пересекает первую окружность в точках M_1, N_1, а вторую — в точках M_2, N_2. Чему равно отношение M_1N_1/M_2N_2?

    Решение. Точки M_1, N_1 симметричны относительно прямой AB, так что M_1N_1 равно удвоенному расстоянию от M_1 до AB. Аналогично M_2N_2 равно удвоенному расстоянию от M_2 до BC. Кроме того, $CM_2 = CD = AB$, $AM_1 = AD = BC$, $BM_1 = BM_2$, и значит, треугольники ABM_1 и CM_2B равны. Поэтому искомое отношение, равное отношению высот этих треугольников обратно отношению соответствующих сторон, т.е. равно b/a (рис.19).

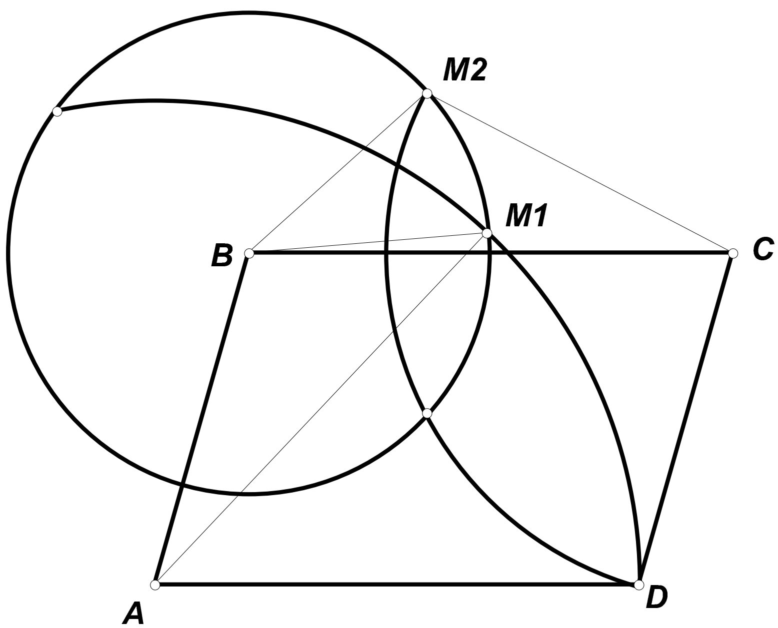


Рис.19

20. (А.Заславский, 10–11) а) Многоугольник обладает следующим свойством: если провести прямую через две точки, делящие его периметр пополам, то эта прямая разделит многоугольник на два равновеликих многоугольника. Верно ли, что многоугольник центрально симметричен?

    б) Верно ли, что любая фигура, обладающая свойством, указанным в п.а), центрально симметрична?

    Решение. а) Да. Пусть X, Y — две точки, делящие периметр многоугольника пополам и не являющиеся его вершинами, X', Y' — точки на тех же сторонах, удовлетворяющие условию $XX' = YY'$, P — точка пересечения прямых XY и $X'Y'$. Так как каждая из этих прямых делит многоугольник на два равновеликих, площади треугольников PXX' и PYY' равны. А так как $XX' = YY'$, равны и высоты треугольников, опущенные на эти стороны. Кроме того $\angle XPX' = \angle YPY'$, как вертикальные.

Следовательно, эти треугольники равны. Если прямые XX' и YY' не параллельны, то отсюда следует равенство углов $PX'X$ и PYY'. Но при фиксированной паре X, Y это равенство не может выполняться для произвольных X', Y'. Таким образом, когда одна из двух противоположных точек движется по стороне многоугольника, другая движется по параллельной стороне, причем длины этих сторон равны. Значит многоугольник имеет центр симметрии.

Примечание. Приведенное выше рассуждение подразумевает, что никакие две стороны многоугольника не лежат на одной прямой. Если это условие не выполняется, то многоугольник может обладать требуемым свойством и не иметь центра симметрии (рис.20а)

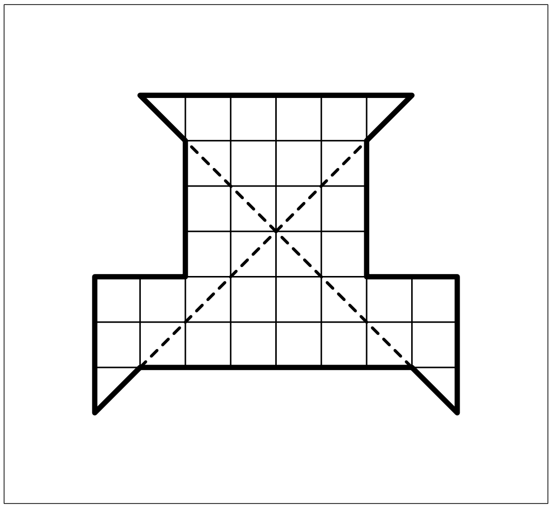


Рис.20а

б) Нет. Пусть, например, ABC — правильный треугольник, A', B', C' — середины его сторон. Проведем шесть дуг окружностей по $60°$ с центрами A', B', C' с концами в точках A, B, C, A', B', C'. Пусть X, Y — пара точек, делящих периметр фигуры ограниченной этими дугами, пополам и точка X лежит, например, на дуге AB'. Тогда Y лежит на дуге $A'B$ и дуги AX и $A'Y$ равны. Так как дуги AB' и $A'B$ являются частями одной окружности с центром C', это означает, что $\angle AC'X = \angle A'CY$. Следовательно, площадь фигуры $AXYB$ равна сумме площадей секторов $C'AX$ и $C'BY$, не зависящей от положения точек X, Y, площади треугольника $C'XY$, также не зависящей от положения этих точек, и площади двух неизменных сегментов. Таким образом, эта площадь постоянна и, как нетрудно видеть, равна половине площади всей фигуры (рис.20б).

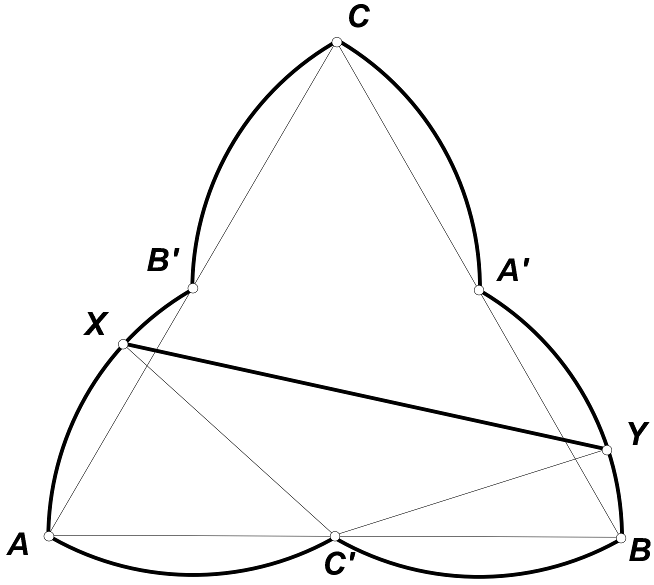


Рис.20б

Примечание. Существуют даже выпуклые фигуры, обладающие указанным свойством. Например, фигура, ограниченная кривой

$$x = 12\cos\phi + \cos 2\phi + \frac{1}{2}\cos 4\phi,\ y = 12\sin\phi - \sin 2\phi + \frac{1}{2}\sin 4\phi, \quad 0 \le \phi \le 2\pi,$$

однако доказательство в этом случае существенно сложнее.

21. (А.Заславский, Б.Френкин, 10–11) В треугольнике провели серединные перпендикуляры к его сторонам и измерили их отрезки, лежащие внутри треугольника.

а) Все три отрезка оказались равны. Верно ли, что треугольник равносторонний?

б) Два отрезка оказались равны. Верно ли, что треугольник равнобедренный?

в) Могут ли длины отрезков равняться 4, 4 и 3?

Решение. а) Верно. Пусть в треугольнике ABC $\angle A < \angle B \le \angle C$. Тогда серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC пересекают сторону AB. Отрезки этих перпендикуляров, лежащие внутри треугольника, имеют равные проекции на прямые, перпендикулярные AB, но образуют с этими прямыми разные углы. Следовательно, они не равны.

Пусть теперь $\angle A \le \angle B < \angle C$. Тогда серединные перпендикуляры к AB и AC пересекают соответственно AC и AB и, значит, отрезают от треугольника ABC подобные, но не равные треугольники. Отрезки перпендикуляров, лежащие внутри треугольника, являются соответствующими сторонами этих треугольников и, следовательно, не равны.

Отметим, что из приведенных рассуждений следует, что наименьшую длину имеет отрезок серединного перпендикуляра, проведенного к средней стороне треугольника.

б) Неверно. Например, рассмотрим треугольник с углами $A = \pi/8$, $B = \pi/4$, $C = 5\pi/8$ и единичным радиусом описанной окружности. В нем серединный перпендикуляр к AB пересекает сторону AC и его отрезок, лежащий внутри треугольника, равен $AB\operatorname{tg}\angle A/2 = \sin(5\pi/8)\operatorname{tg}(\pi/8) = \cos(\pi/8)\operatorname{tg}(\pi/8) = \sin(\pi/8)$. Серединный перпендикуляр к BC пересекает AB и длина соответствующего отрезка равна

$BC \operatorname{tg} \angle B/2 = \sin(\pi/8)$. Таким образом эти отрезки равны. Условию удовлетворяет также любой треугольник, в котором $\angle A < \angle B < \angle C$ и $\cos A \operatorname{tg} B = \sin C$.

в) Нет. Если треугольник равнобедренный, то, как показано в п.а), отрезки серединных перпендикуляров к боковым сторонам короче высоты. Если же $\angle A < \angle B < \angle C$ и $\cos A \operatorname{tg} B = \sin C$, то отношение отрезков перпендикуляров к наибольшей и средней сторонам треугольника равно отношению самих этих сторон, т.е.

$$\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\cos B}{\sqrt{1 - 2\cos B + 2\cos^3 B}}.$$

Исследовав правую часть этого равенства, можно убедиться, что ее максимум меньше, чем 4/3.

22. (А.Хачатурян, 10–11) а) Все вершины пирамиды лежат на гранях куба, но не на его ребрах, причем на каждой грани лежит хотя бы одна вершина. Какое наибольшее количество вершин может иметь пирамида?

б) Все вершины пирамиды лежат в плоскостях граней куба, но не на прямых, содержащих его ребра, причем в плоскости каждой грани лежит хотя бы одна вершина. Какое наибольшее количество вершин может иметь пирамида?

Ответ. а)13. б) Произвольно большое.

Решение. а) Сечение куба плоскостью основания пирамиды пересекает все его грани и, значит, является выпуклым шестиугольником. Вершины основания лежат на сторонах этого шестиугольника, но не в его вершинах. Нетрудно видеть, что, если на какой-то стороне лежит больше двух вершин основания, то соединить их несамопересекающейся ломаной, лежащей внутри шестиугольника, невозможно. Поэтому основание имеет не более 12 вершин, а пирамида — не более 13. Существование пирамиды с 13 вершинами очевидно.

б) В этом случае вершины основания могут лежат на прямых, содержащих стороны шестиугольника, и их количество может быть произвольно большим (рис.22).

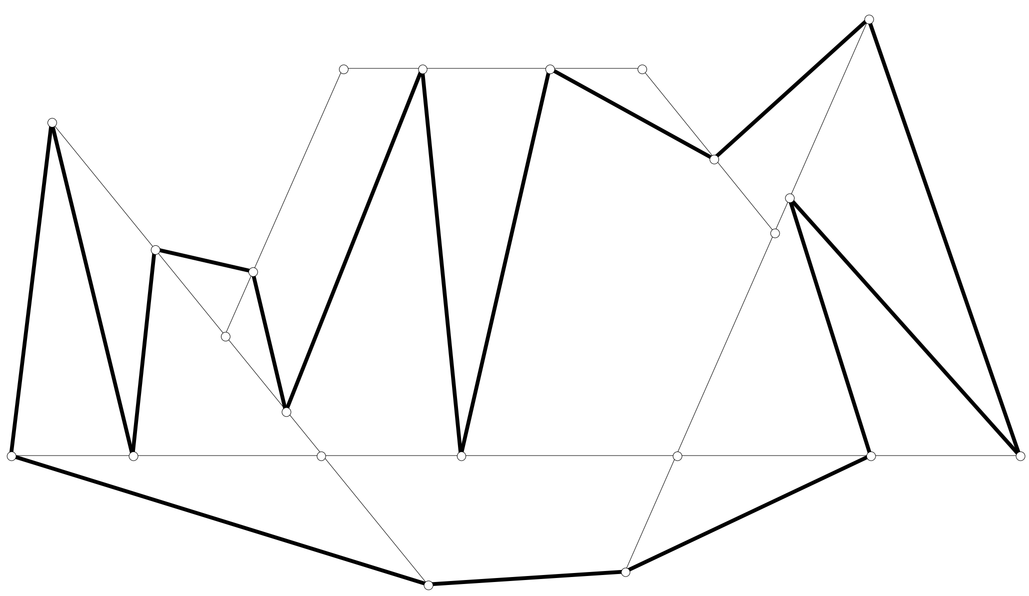


Рис.22

23. (В.Протасов, 10–11) В пространстве даны две пересекающиеся сферы разных радиусов и точка A, принадлежащая обеим сферам. Докажите, что в пространстве существует точка B, обладающая следующим свойством: если через точки A и B провести произвольную окружность, то точки ее повторного пересечения с данными сферами будут равноудалены от B.

Решение. Проведем через A прямую, параллельную линии центров данных сфер, и найдем вторые точки C, D ее пересечения со сферами. Покажем, что середина B отрезка CD — искомая точка. Возьмем произвольную окружность, проходящую через A и B, и рассмотрим сечения сфер плоскостью этой окружности. Эти сечения представляют собой две окружности, одна из которых проходит через точки A и C, другая — через A и D. Центрами этих окружностей будут проекции O_1, O_2 центров сфер на плоскость сечения, следовательно, прямые O_1O_2 и CD параллельны. Поэтому достаточно доказать плоский аналог утверждения задачи.

Пусть X_1, X_2 — вторые точки пересечения окружности, проходящей через A и B, с данными окружностями; A' — вторая точка пересечения данных окружностей. Тогда O_1O_2 — средняя линия треугольника $A'CD$, т.е. $CB = BD = O_1O_2$. Следовательно, $O_1B = O_2D = O_2X_2$, $O_2B = O_1C = O_1C_1$. Кроме того, центр O окружности ABX_1X_2 равноудален от O_1 и O_2, поэтому $\angle BO_1X_1 = \angle BO_1O + \angle OO_1X_1 = \angle BO_1O + \angle AO_1O = \angle AO_2O + \angle BO_2O = \angle BO_2O + \angle OO_2X_2 = \angle BO_2X_2$. Таким образом, треугольники O_1X_1B и O_2BX_2 равны, а значит, $BX_1 = BX_2$ (рис.23).

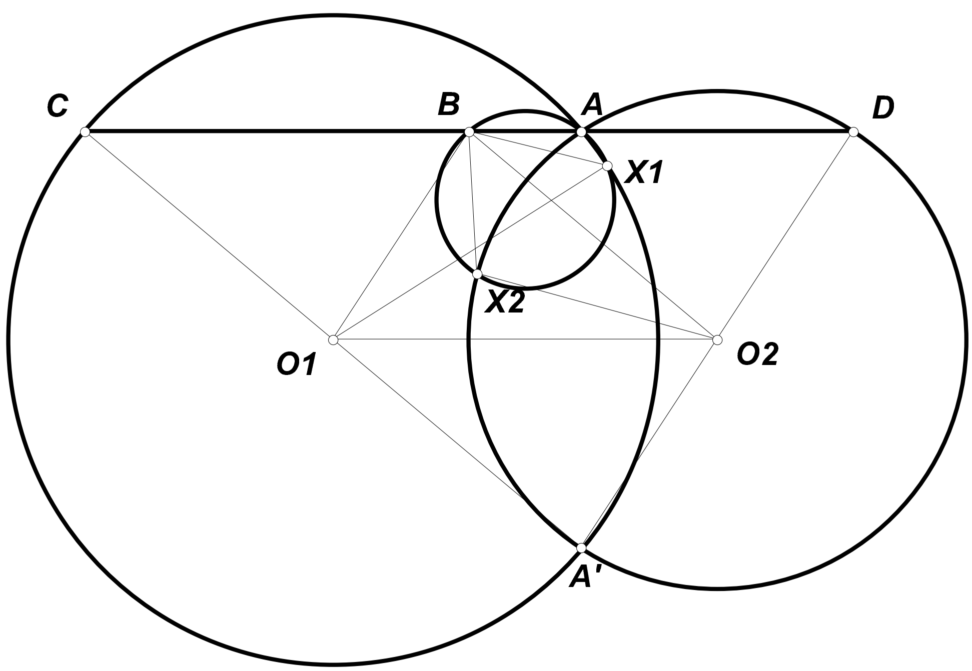


Рис.23

24. (И.Богданов, 11) Пусть h — наименьшая высота тетраэдра, d — наименьшее расстояние между его противоположными ребрами. При каких t возможно неравенство $d > th$?

Решение. При $t < 3/2$. Пусть ABC — грань наибольшей площади тетраэдра $ABCD$. Тогда его объем равен $V = S_{ABC}h/3$. С другой стороны он равен половине произведения длин противоположных ребер на расстояние и синус угла между ними. Пусть

$A'B'C'$ — треугольник, средними линиями которого являются стороны ABC. Тогда, например, $S_{A'B'D} = AB \cdot CD \sin\phi$, где ϕ — угол между AB и CD. Поскольку сумма площадей боковых граней тетраэдра больше площади его основания, площадь треугольника $A'B'C'$ не превосходит утроенной максимальной площади треугольников $A'B'D$, $B'C'D$, $C'A'D$, т.е. $d < 3h/2$. Усилить это неравенство нельзя, так как если взять правильную пирамиду и устремить ее высоту к нулю, отношение d/h будет стремиться к $3/2$.

V Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (Д.Прокопенко) (8) Точки B_1 и B_2 лежат на луче AM, а точки C_1 и C_2 на луче AK. Окружность с центром O вписана в треугольники AB_1C_1 и AB_2C_2. Докажите, что углы B_1OB_2 и C_1OC_2 равны.

   Решение. Пусть отрезки B_1C_1 и B_2C_2 пересекаются в точке D (рис.1). Тогда по теореме о внешнем угле треугольника $\angle B_1OB_2 = \angle AB_1O - \angle AB_2O = (\angle AB_1C_1 - \angle AB_2C_2)/2 = \angle B_1DB_2/2$. Аналогично $\angle C_1OC_2 = \angle C_1DC_2/2$, т.е. эти углы равны.

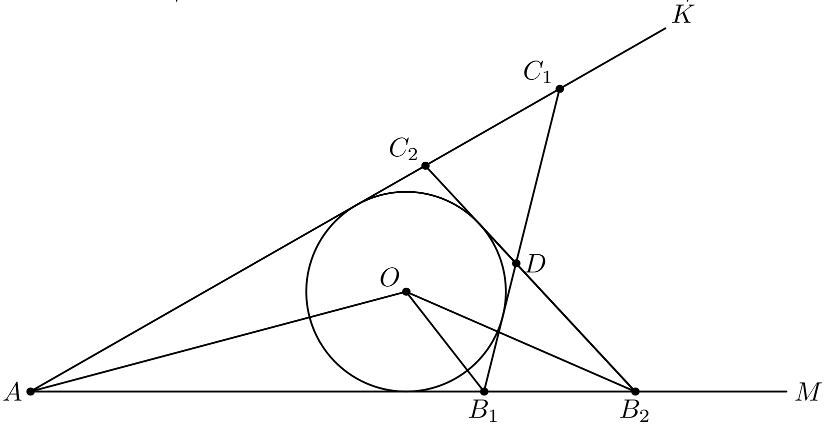


Рис.1

2. (Б.Френкин) (8) Через каждую вершину неравнобедренного треугольника ABC проведен отрезок, разбивающий его на два треугольника с равными периметрами. Верно ли, что все эти отрезки имеют разные длины?

   Ответ. Да.

   Решение. Предположим, например, что отрезки AA' и BB' равны. Тогда из равенства периметров треугольников $AA'B$ и $AA'C$ следует, что $BA' = (AB + BC + CA)/2 - AB$. Аналогично, $AB' = (AB + BC + CA)/2 - AB$, и значит, треугольники ABA' и BAB' равны по трем сторонам. Но тогда $\angle A = \angle B$, что противоречит неравнобедренности треугольника ABC.

3. (Д.Шноль) (8) Биссектрисы углов трапеции образуют при пересечении четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что трапеция равнобокая.

   Решение. Пусть $KLMN$ — четырехугольник, образованный биссектрисами (рис. 3). Так как AK и BK — биссектрисы смежных углов трапеции, то $\angle LKN = 90°$. Аналогично, $\angle LMN = 90°$. Следовательно, $LK^2 + KN^2 = LM^2 + MN^2$. С другой стороны, из перпендикулярности диагоналей получаем, что $KL^2 + MN^2 = KN^2 + LM^2$. Из этих двух равенств следует, что $KL = LM$ и $MN = NK$, а значит $\angle NKM = \angle NMK$. Но точки K, M, как точки пересечения биссектрис смежных углов, равноудалены от оснований трапеции, т.е. $KM \parallel AD$. Поэтому $\angle CAD = \angle BDA$, и трапеция равнобокая.

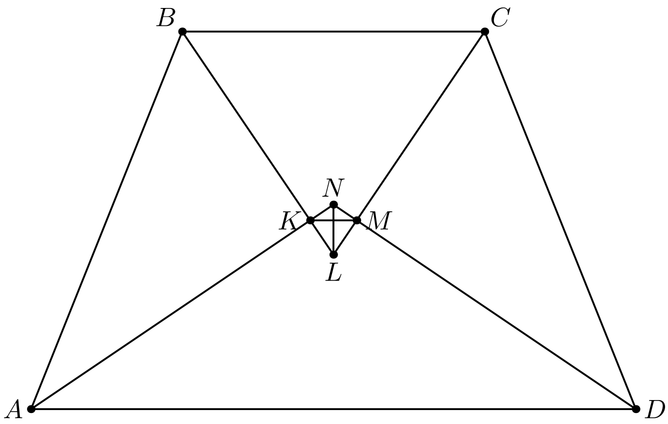


Рис.3

4. (Д.Прокопенко) (8–9) Две окружности пересекаются в точках P и Q. Из точки Q пустили в каждую из окружностей по одному лучу, которые отражаются от окружностей по закону "угол падения равен углу отражения". Точки касания траектории первого луча — $A_1, A_2, \ldots$ второго — $B_1, B_2, \ldots$.

   Оказалось, что точки A_1, B_1 и P лежат на одной прямой. Докажите, что тогда все прямые A_iB_i проходят через точку P.

   Решение. При отражении лучей от окружностей выполняются условия $QA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots$ и $QB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \cdots$. Значит, $\angle(PQ, PA_1) = \angle(PA_1, PA_2) = \angle(PA_2, PA_3) = \cdots$ и $\angle(PQ, PB_1) = \angle(PB_1, PB_2) = \angle(PB_2, PB_3) = \cdots$ (углы ориентированные). Кроме того, так как точки A_1, B_1, P лежат на одной прямой, то $\angle(PQ, PA_1) = \angle(PQ, PB_1)$. Следовательно, при любом i имеем $\angle(PA_{i-1}, PA_i) = \angle(PB_{i-1}, PB_i)$, откуда по индукции получаем, что точки A_i, B_i, P лежат на одной прямой.

5. (Д.Шноль) (8–9) Дан треугольник ABC и построена вневписанная окружность с центром O, касающаяся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Точка O_1 симметрична точке O относительно прямой BC. Найдите величину угла A, если известно, что точка O_1 лежит на описанной около треугольника ABC окружности.

   Решение. Из условия задачи следует, что $\angle BOC = \angle BO_1C = \angle A$. С другой стороны, $\angle BOC = 180° - (180° - \angle B)/2 - (180° - \angle C)/2 = (180° - \angle A)/2$. Отсюда получаем, что $\angle A = 60°$.

6. (Б.Френкин) (8–9) Найдите геометрическое место центров всех вневписанных окружностей прямоугольных треугольников, имеющих данную гипотенузу.

   Решение. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой AB, I_a, I_b, I_c — центры его вневписанных окружностей (см. рис. 6). Тогда

$$\angle AI_cB = 180° - (180° - \angle BAC)/2 - (180° - \angle ABC)/2 = (\angle BAC + \angle ABC)/2 = 45°,$$

$$\angle AI_aB = 180° - \angle BAC/2 - \angle ABC - (180° - \angle ABC)/2 = 90° - (\angle BAC + \angle ABC)/2 = 45°$$

   и аналогично $\angle AI_bB = 45°$, причем точки I_a, I_b лежат по одну сторону от прямой AB, а I_c по другую. Следовательно, все эти три точки лежат на двух окружностях c_1, c_2, проходящих через точки A, B, в которых хорда AB стягивает дугу в $90°$.

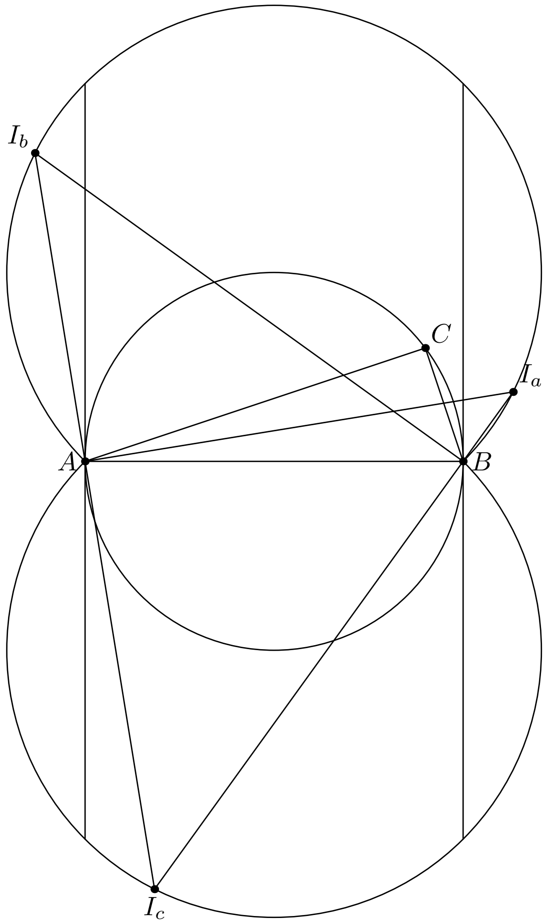


Рис.6

Пусть прямые k, l проходят соответственно через A, B перпендикулярно AB. Когда точка C описывает полуокружность с диаметром AB, каждый из центров пробегает четверть соответствующей окружности. А именно, I_a пробегает дугу между B и точкой пересечения окружности с l; I_b — дугу между A и точкой пересечения окружности с k; I_c — дугу между точками пересечения окружности с k и l. Когда C описывает всю окружность с диаметром AB, исключая точки A, B, центры пробегают искомое ГМТ, а именно дуги окружностей c_1, c_2, которые лежат вне окружности с диаметром AB и из которых исключены их концы A, B и точки их пересечения с прямыми k, l.

7. (В.Протасов) (8–9) Дан треугольник ABC. Из вершин B и C опущены перпендикуляры BM и CN на биссектрисы углов C и B соответственно. Докажите, что прямая MN пересекает стороны AC и AB в точках их касания со вписанной окружностью.

   Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, P — точка пересечения MN и AC (рис. 7). Так как точки M и N лежат на окружности с диаметром BC, то $\angle MNB = \angle MCB = \angle ACI$. Следовательно, точки C, I, P, N лежат на одной окружности и $\angle CPI = \angle CNI = 90°$. Значит, P — точка касания AC с вписанной окружностью. Для стороны AB доказательство аналогично.

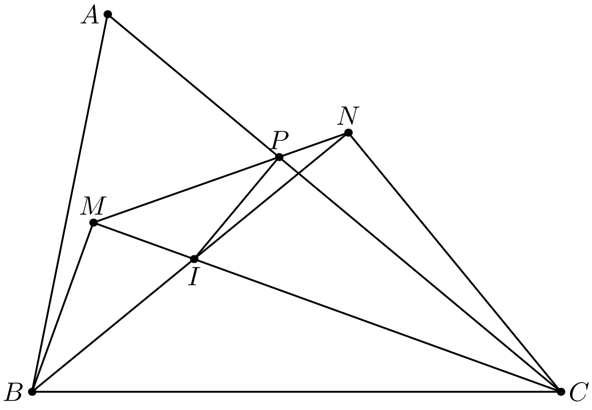


Рис.7

8. (С.Маркелов) (8–10) Многоугольник можно разрезать на две равные части тремя различными способами. Верно ли, что у него обязательно есть центр или ось симметрии?

Ответ. Нет, см., например, рис.8.

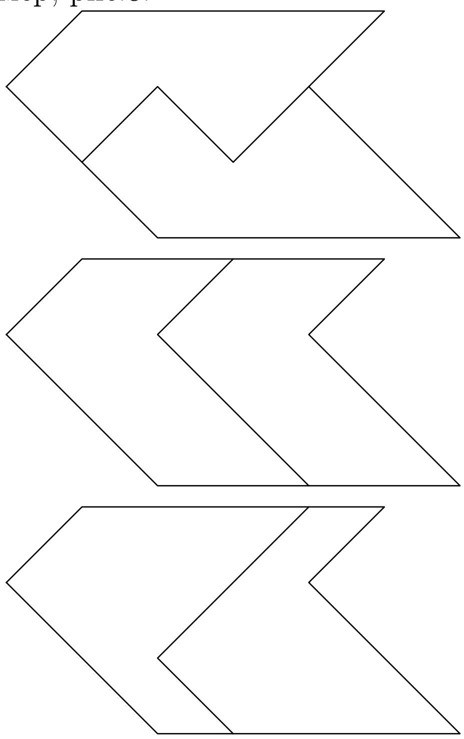


Рис.8

9. (В.А.Ясинский, Украина) (8–11) На плоскости задано n точек, являющихся вершинами выпуклого n-угольника, $n > 3$. Известно, что существует ровно k равносторонних треугольников со стороной 1, вершины которых — заданные точки.

а) Докажите, что $k < \frac{2}{3}n$.

б) Приведите пример конфигурации, для которой $k > 0,666n$.

Решение. а) Для каждой из данных точек существует проходящая через неё прямая, такая что все другие заданные точки лежат по одну сторону от этой прямой. Это позволяет среди всех единичных треугольников с вершиной в рассматриваемой точке выделить два треугольника — "крайний левый"треугольник и "крайний правый"треугольник (не исключено, что они могут совпадать). Будем называть эти два единичных треугольника присоединёнными к этой вершине

Лемма. Каждый единичный треугольник будет присоединённым, по крайней мере, трижды.

Доказательство. Предположим, что единичный треугольник не является "крайним левым"для вершины C и не является "крайним правым"для вершины B (см. рис.9).

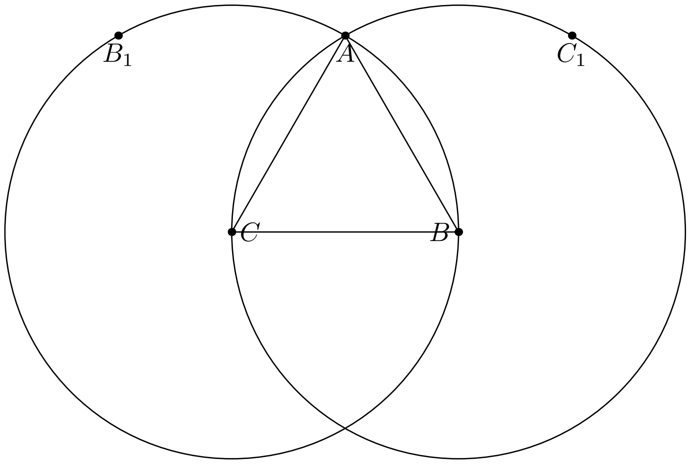


Рис.9

Тогда на дугах AB_1 и AC_1 обязательно будут заданные точки. Но эти точки вместе с точками A, B и C не образуют выпуклую оболочку. Поэтому этот треугольник будет присоединённым одним из двух выше указанных способов. Значит, он будет "крайним левым"для вершины C или "крайним правым"для вершины B. Аналогично, он будет "крайним левым"для вершины A или "крайним правым"для вершины C, а также, он будет "крайним левым"для вершины B или "крайним правым"для вершины A. А это значит, что он будет присоединённым по крайней мере трижды, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что для заданных точек существует k единичных треугольников. Поскольку для каждой из n точек существует максимум два присоединённых треугольника, то $2n$ — это наибольшее количество всех возможных присоединений. Так как каждый единичный треугольник будет присоединённым, по крайней мере, трижды, то $3k$ — это наименьшее количество из всех возможных присоединений. Таким образом, $3k \leq 2n$, т.е. $k \leq \frac{2}{3}n$.

б) Рассмотрим ромб, который состоит из двух правильных треугольников, и будем поворачивать его на очень "маленькие"углы вокруг одной из его тупых вершин так, что в результате получим m ромбов.

Если все углы поворота меньше $\pi/3$, то все вершины наших ромбов будут вершинами выпуклого многоугольника. При этом $n = 3m + 1$, $k = 2m$, и, если m достаточно велико, $k > 0,666n$.

10. (Ф.Ивлев) (9) Пусть ABC — остроугольный треугольник, CC_1 — его биссектриса, O — центр описанной окружности. Точка пересечения прямой OC_1 с перпендикуляром из C на AB лежит на описанной окружности треугольника AOB. Найдите угол C.

Решение. Пусть D — точка пересечения OC_1 с перпендикуляром из C на AB (рис.10). Так как D лежит на описанной окружности треугольника AOB и $AO = OB$, то $\angle ADC_1 = \angle BDC_1$. Значит, $AD/BD = AC_1/BC_1 = AC/BC$. С другой стороны, так как $CD \perp AB$, то $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$. Из этих равенств следует, что $AC = AD$, т.е. D симметрична C относительно AB. Но тогда CC_1 пересекает серединный перпендикуляр к AB в точке, симметричной O. Поскольку точка пересечения биссектрисы и серединного перпендикуляра лежит на описанной окружности, получаем, что хорда AB делит перпендикулярный ей радиус пополам. Следовательно, опирающийся на эту дугу $\angle C = 60°$.

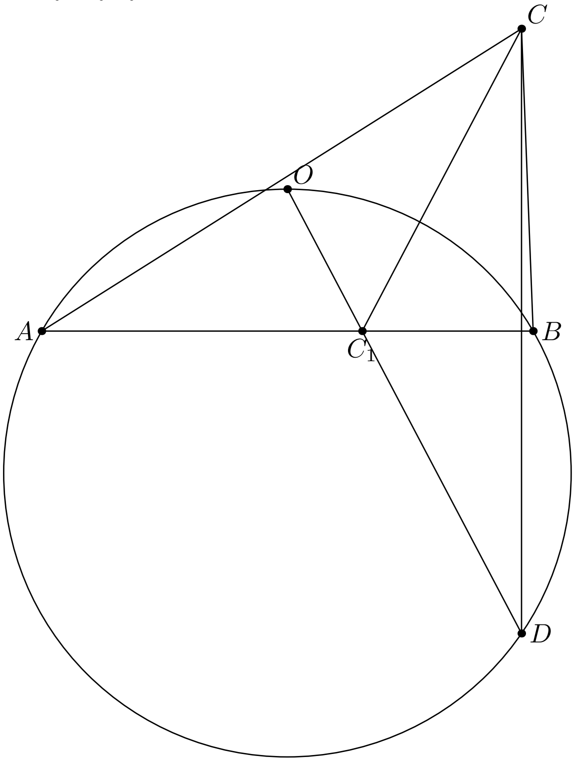


Рис.10

11. (А.Блинков) (9) Дан четырехугольник $ABCD$. Оказалось, что окружность, описанная около треугольника ABC, касается стороны CD, а окружность, описанная около треугольника ACD, касается стороны AB. Докажите, что диагональ AC меньше, чем расстояние между серединами сторон AB и CD.

Решение. Из условия следует, что $\angle BAC + \angle BCD = \angle ACD + \angle BAD = 180°$. Значит, $\angle BCA = \angle CAD$, т.е. $AD \parallel BC$ и отрезок, соединяющий середины AB и CD, является средней линией трапеции и равен $(AD + BC)/2$. Кроме того, так как $\angle ACD = \angle ABC$ и $\angle BAC = \angle CDA$, то треугольники ABC и DCA подобны. Следовательно, $AC^2 = AD \cdot BC$ и утверждение задачи вытекает из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

12. (Д.Прокопенко) (9–10) В треугольнике ABC провели биссектрису CL. Точки A_1 и B_1 симметричны точкам A и B относительно CL, A_2 и B_2 симметричны точкам A и B относительно L. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников AB_1B_2 и BA_1A_2. Докажите, что углы O_1CA и O_2CB равны.

Решение. Из условия следует, что $CB_1/CA = CB/CA = BL/LA = B_2L/AL$, т.е.

$B_1B_2 \parallel CL$ (рис.12). Аналогично $A_1A_2 \parallel CL$. Значит, $\angle AB_1B_2 = \angle BA_1A_2 = \angle C/2$. При симметрии относительно CL точки B и A_1 перейдут в B_1 и A, а точка A_2 — в некоторую точку A'. При этом $\angle A'AB_2 + \angle A'B_1B_2 = \angle A + \angle B + 2\angle C/2 = 180°$. Следовательно, четырехугольник $AA'B_1B_2$ вписанный и точки O_1, O_2 симметричны относительно CL.

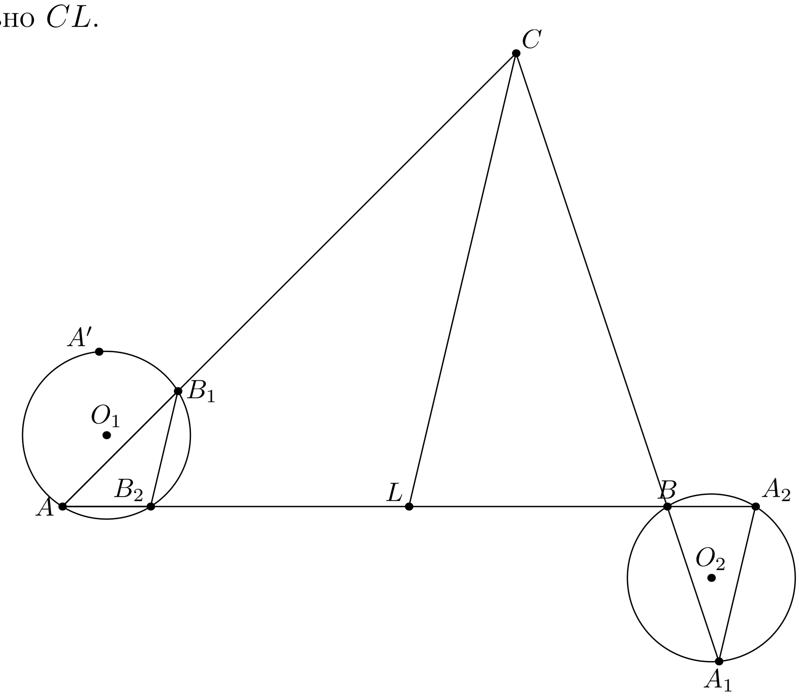


Рис.12

13. (А.Заславский) (9–10) В треугольнике ABC отметили центр вписанной окружности, основание высоты, опущенной на сторону AB, и центр вневписанной окружности, касающейся этой стороны и продолжений двух других. После этого сам треугольник стерли. Восстановите его.

Решение. Центры вписанной и вневписанной окружностей I и I_c лежат на биссектрисе угла C. Пусть C' — точка пересечения этой биссектрисы со стороной AB (рис.13). Тогда $CI/CI_c = r/r_c = C'I/C'I_c$, где r, r_c — радиусы вписанной и вневписанной окружностей. Поэтому для любой точки X окружности с диаметром CC' отношение XI/XI_c будет одним и тем же. Так как основание H высоты, опущенной на AB, лежит на этой окружности, $HI/HI_c = CI/C/I_c = C'I/C'I_c$, т.е. HC' и HC — внутренняя и внешняя биссектрисы угла IHI_c. Следовательно, проведя эти биссектрисы, мы восстановим точку C и прямую AB. Поскольку $\angle IAI_c = \angle IBI_c = 90°$, точки A, B лежат на окружности с диаметром II_c. Соответственно, построив эту окружность и найдя точки ее пересечения с прямой AB, мы восстановим треугольник.

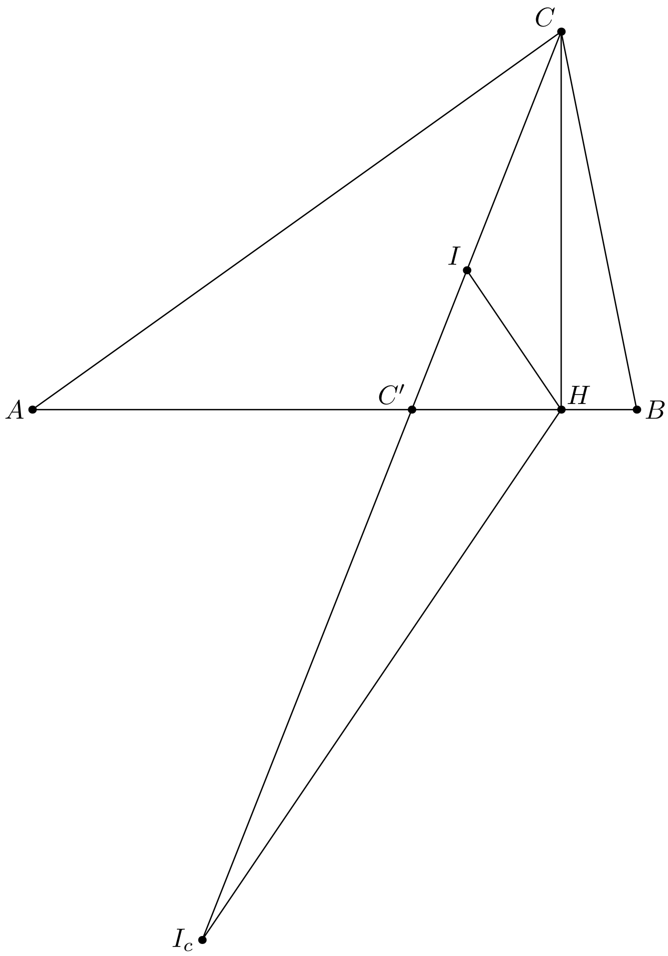


Рис.13

14. (В.Протасов) (9–10) Дан треугольник ABC площади 1. Из вершины B опущен перпендикуляр BM на биссектрису угла C. Найдите площадь треугольника AMC.

Первое решение. Проведем через точку B прямую, параллельную AC до пересечения с биссектрисой угла C в точке N (рис.14). Так как $\angle BNC = \angle ACN = \angle BCN$, то треугольник BCN — равнобедренный и BM его медиана. Следовательно, $S_{AMC} = \frac{1}{2}S_{ANC} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2}$.

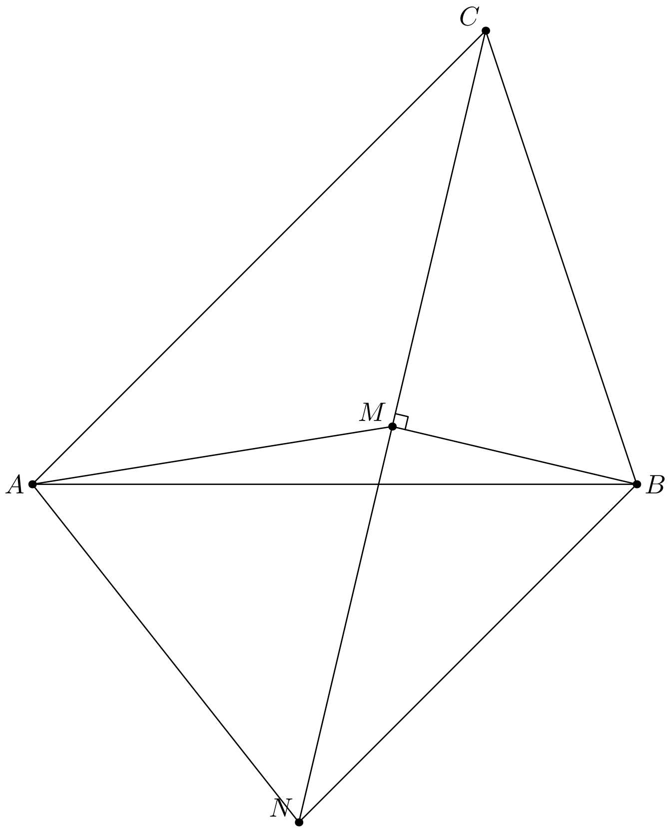


Рис.14

Второе решение. Так как $S_{AMC} = \frac{1}{2}AC \cdot CM \sin\frac{C}{2}$ и $CM = BC\cos\frac{C}{2}$, то $S_{AMC} = \frac{1}{4}AC \cdot BC \sin C = \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{1}{2}$.

15. (Б.Френкин) (9–10) Даны окружность и не лежащая на ней точка. Из всех треугольников, одна вершина которых совпадает с данной точкой, а две другие лежат на окружности, выбран треугольник наибольшей площади. Докажите, что он равнобедренный.

Решение. Пусть C — данная точка, A, B — точки на окружности (рис.15). Если касательная к окружности в точке A не параллельна CB, то, переместив точку A, можно увеличить расстояние от нее до BC, а значит, и площадь треугольника. Аналогично, касательная в точке B параллельна CA. Следовательно, прямые AC и BC симметричны относительно серединного перпендикуляра к AB, т.е. $AC = BC$.

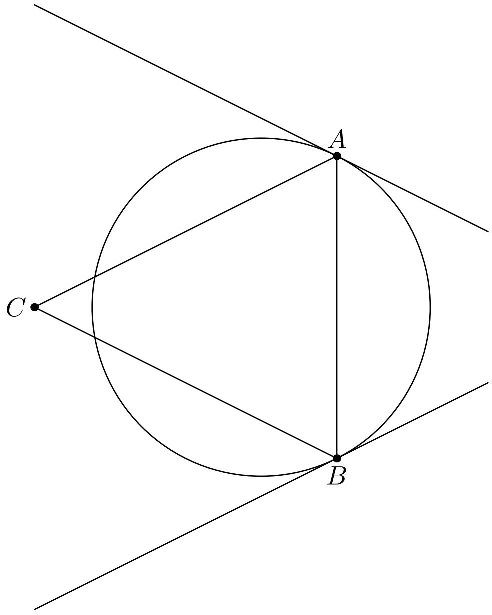


Рис.15

Отметим, что проведенное рассуждение не зависит от того, лежит ли данная точка внутри или вне окружности.

16. (А.Заславский) (9–11) Три прямые проходят через точку O и образуют попарно равные углы. На одной из них взяты точки A_1, A_2, на другой — B_1, B_2, так что точка C_1 пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 лежит на третьей прямой. Пусть C_2 — точка пересечения A_1B_2 и A_2B_1. Докажите, что угол C_1OC_2 прямой.

    Решение. Пусть C_3 — точка пересечения прямых OC_1 и A_2B_1 (рис.16). Применив сначала к треугольнику OA_2B_1 и точке C_1 теорему Чевы, а затем к этому же треугольнику и прямой A_1B_2 теорему Менелая, получаем, что $C_2A_2/C_2B_1 = C_3A_2/C_3B_1 = OA_2OB_1$. Следовательно, OC_2 — внешняя биссектриса угла A_2OB_1 и $OC_2 \perp OC_1$.

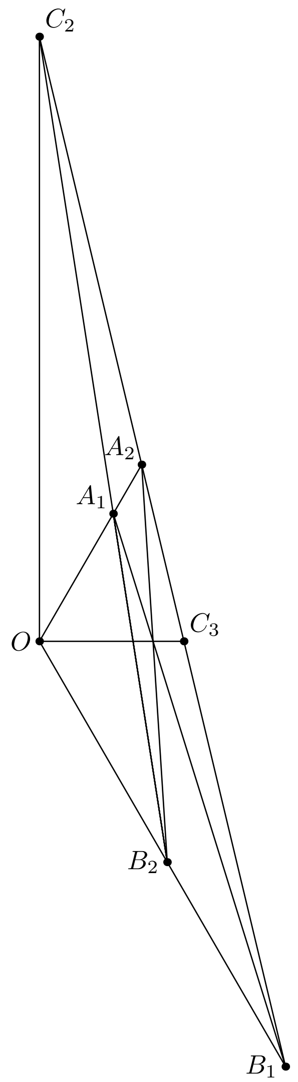


Рис.16

17. (А. Заславский.) (9–11) Дан треугольник ABC и точки X, Y, не лежащие на его описанной окружности. Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции X на BC, CA, AB, а A_2, B_2, C_2 — проекции Y. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из A_1, B_1, C_1 на, соответственно, B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда прямая XY проходит через центр окружности, описанной около ABC.

Решение. Пусть прямая XY проходит через центр O описанной окружности. Зафиксируем точку Y и будем двигать точку X по прямой. При этом перпендикуляры из A_1, B_1, C_1 на стороны $A_2B_2C_2$ перемещаются равномерно и параллельно себе и, значит, точки их пересечения движутся по прямым. Когда точка X совпадает с O или Y, три перпендикуляра пересекаются в одной точке, следовательно, это выполняется для любого положения точки X.

Из предыдущего рассуждения следует, что для фиксированной точки Y множество точек X, для которых перпендикуляры пересекаются в одной точке, это либо прямая OY, либо вся плоскость. Предположим, что имеет место второй случай, и возьмем в качестве X точку C. Тогда точки A_1, B_1 совпадают с C, а C_1 с основанием высоты треугольника ABC, проведенной из C. Так как три перпендикуляра пересекаются в одной точке, $A_2B_2 \parallel AB$, т.е. Y лежит на прямой OC. Взяв теперь в качестве X

другую вершину треугольника, получим, что Y совпадает с O.

18. (Б.Френкин) (9–11) На плоскости даны три параллельные прямые. Найдите геометрическое место центров вписанных окружностей треугольников, вершины которых расположены (по одной) на этих прямых.

Ответ. Полоса, края которой не входят в ГМ, параллельны данным прямым и находятся посредине между средней прямой и крайними.

Решение. Если произвольный треугольник с вершинами на данных прямых перенести параллельно этим прямым, его центр вписанной окружности подвергнется такому же переносу. Следовательно, искомое ГМТ является полосой с краями, параллельным исходным прямым.

Пусть a, c — крайние из исходных прямых, b — средняя, и на них соответственно находятся вершины треугольника A, C, B. Проведём диаметр вписанной окружности, перпендикулярный этим прямым, и рассмотрим его конец, ближайший к прямой a (рис.18). Он лежит ближе к a, чем точка касания вписанной окружности со стороной AB, и, значит, ближе к a, чем прямая b. Так как другой конец диаметра находится ближе к a, чем прямая c, то середина диаметра лежит ближе к a, чем прямая, средняя между b и c. Поменяв в рассуждении местами a и c, получаем, что центр вписанной окружности I располагается в полосе, указанной в ответе.

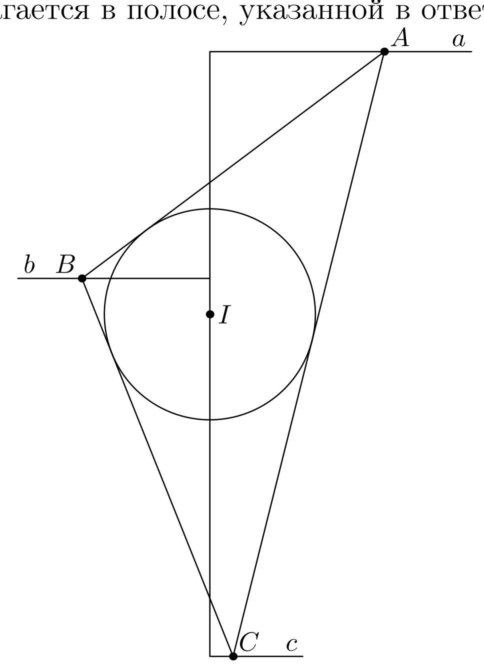


Рис.18

Возьмём теперь произвольный треугольник ABC с вершинами на соответствующих прямых. Переместим вершину B так, чтобы сторона AB стала перпендикулярна исходным прямым. Теперь устремим точку C в бесконечность. Углы при вершинах A и B стремятся к прямым, а точка пересечения их биссектрис, т.е. I, стремится к вершине равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой AB. Значит, I неограниченно приближается к прямой посредине между a и b. Аналогично, начав с того же треугольника, можно устремить I к прямой посредине между b и c. Следовательно, возможные положения I заполняют всю полосу, указанную в ответе.

19. (Б.Френкин) (10–11) Дан выпуклый n-угольник $A_1 \dots A_n$. Пусть P_i $(i = 1, \dots, n)$ —

такая точка на его границе, что прямая A_iP_i делит его площадь пополам. Дано, что все точки P_i не совпадают с вершинами и лежат на k сторонах n-угольника. Каково наименьшее и наибольшее возможное значение k при каждом данном n?

Ответ. Наименьшее значение равно 3, наибольшее равно $n-1$ при четном n и n при нечетном.

Решение. Так как отрезки A_iP_i делят площадь многоугольника пополам, любые два из них пересекаются. Пусть точка P_i лежит на стороне A_jA_{j+1}. Тогда точки P_j и P_{j+1} лежат по разные стороны от A_i, т.е. всегда найдутся три точки, лежащие на разных сторонах. С другой стороны, если две вершины многоугольника являются вершинами правильного треугольника, а все остальные расположены вблизи его третьей вершины, то все точки P_i лежат на трех сторонах многоугольника.

Очевидно, для правильного n-угольника при нечетном n все P_i лежат на разных сторонах. Пусть $n = 2m$. Так как отрезки A_mP_m и $A_{2m}P_{2m}$ пересекаются, точки P_m и P_{2m} лежат по одну сторону от диагонали A_mA_{2m}. По другую сторону от этой диагонали лежат m сторон многоугольника, и точка P_i может попасть на эти стороны, только если соответствующая вершина A_i лежит между P_m и P_{2m}. Но таких вершин не больше, чем $m-1$, значит существует сторона, на которой нет точек P_i.

Рассмотрим теперь n-угольник, вершины $A_1, \dots, A_{n-2}$ которого являются вершинами правильного $n-1$-угольника, а вершины A_{n-1}, A_n расположены вблизи оставшейся вершины этого $n-1$-угольника. Точки P_i расположены на всех сторонах построенного многоугольника, кроме $A_{n-1}A_n$.

20. (Д.Прокопенко) (10–11) В остроугольном треугольнике ABC точка H — ортоцентр, O — центр описанной окружности, AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты. Точка C_2 симметрична C относительно A_1B_1. Докажите, что H, O, C_1 и C_2 лежат на одной окружности.

Решение. Так как $CA_1/CA = CB_1/CB = \cos C$, треугольники ABC и A_1B_1C подобны. Значит, поскольку $\angle ACO = \angle BCC_1 = 90° - \angle B$, прямая CO содержит высоту треугольника A_1B_1C, т.е. точки C, O, C_2 лежат на одной прямой (рис.20). Кроме того, из подобия треугольников ABC и A_1B_1C вытекает, что $CC_2/CC_1 = 2\cos C$. С другой стороны, известно, что $CH = 2CO\cos C$. Следовательно, $CO{\cdot}CC_2 = CH{\cdot}CC_1$, что равносильно утверждению задачи.

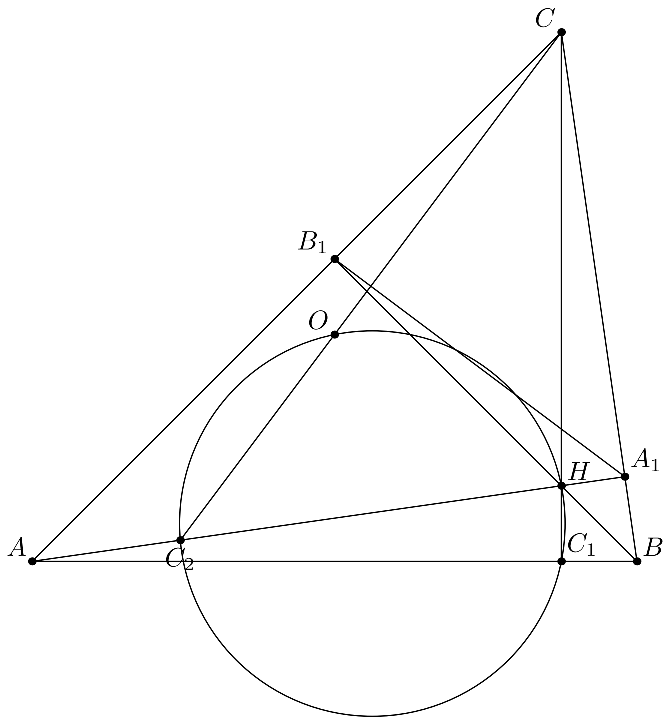


Рис.20

21. (Ф.Нилов) (10–11) Дан четырехугольник $ABCD$, противоположные стороны которого пересекаются в точках P и Q. Две прямые, проходящие через эти точки, пересекают стороны четырехугольника в четырех точках, являющихся вершинами параллелограмма. Докажите, что центр этого параллелограмма лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей $ABCD$.

    Решение. Аффинным преобразованием переведем параллелограмм в квадрат и рассмотрим систему координат, оси которой совпадают с диагоналями квадрата. Будем считать, что стороны четырехугольника пересекают оси координат в точках $(\pm1, 0)$, $(0, \pm1)$, а точки P, Q имеют координаты $(p, 0)$ и $(0, q)$ соответственно. Тогда стороны четырехугольника лежат на прямых с уравнениями $\frac{x}{p} \pm y = 1$, $\pm x + \frac{y}{q} = 1$; вершины имеют координаты $(\frac{p(q-1)}{pq-1}, \frac{q(p-1)}{pq-1})$, $(-\frac{p(q-1)}{pq+1}, \frac{q(p+1)}{pq+1})$, $(-\frac{p(q+1)}{pq-1}, -\frac{q(p+1)}{pq-1})$, $(\frac{p(q+1)}{pq+1}, -\frac{q(p-1)}{pq+1})$, и нетрудно видеть, что прямая, соединяющая середины диагоналей, проходит через начало координат.

22. (А.Заславский) (10–11) Постройте четырехугольник, в который можно вписать и около которого можно описать окружность, по радиусам этих окружностей и углу между диагоналями.

    Решение. Если радиусы описанной и вписанной окружностей четырехугольника равны R и r, а растояние между их центрами O и I равно d, то

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}.$$

Значит, по данным R, r мы можем определить d и построить эти окружности. Диагонали всех четырехугольников с данными описанной и вписанной окружностями пересекаются в одной и той же точке L, лежащей на прямой OI, а их середины лежат на окружности с диаметром OL. Кроме того, отрезок, соединяющий середины диагоналей, проходит через точку I, а его длина равна $OL\sin\phi$, где ϕ — данный угол. Построив проходящую через I хорду такой длины, найдем середины диагоналей, а затем и вершины четырехугольника.

23. (В.Протасов) (10–11) Верно ли, что при любом n правильный $2n$-угольник является проекцией некоторого многогранника, имеющего не более, чем $n+2$ грани?

    Решение. Да. Применим к правильному $2n$-угольнику $A_1\dots A_{2n}$ растяжение относительно диагонали A_nA_{2n} с коэффициентом $k>1$ (рис.23). Теперь перегнем полученный многоугольник по прямой A_nA_{2n}, так чтобы его вершины $B_1,\dots,B_{n-1},B_{n+1},\dots,B_{2n-1}$ проецировались в вершины исходного правильного многоугольника. Тогда все прямые B_iB_{2n-i} будут параллельны и многогранник, ограниченный треугольниками $B_{n-1}B_nB_{n+1}$, $B_{2n-1}B_{2n}B_1$, трапециями $B_iB_{i+1}B_{2n-i-1}B_{2n-i}$ и двумя половинами $2n$-угольника, будет искомым.

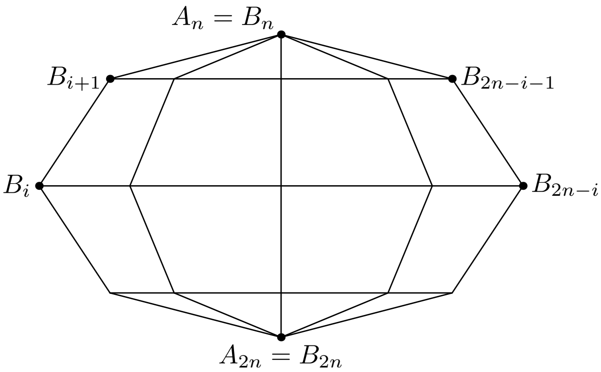


Рис.23

24. (Ф.Нилов) (11) Дана четырёхугольная пирамида, в которую можно вписать сферу. Точку касания этой сферы с основанием пирамиды спроектировали на рёбра основания. Докажите, что все проекции лежат на одной окружности.

    Решение. Пусть $ABCD$ — основание пирамиды, P — точка касания основания с вписанной сферой, P' — точка касания основания с вневписанной сферой, касающейся основания и продолжения боковых граней. Тогда расстояния от P до сторон основания относятся как котангенсы половин двугранных углов при соответствующих ребрах, а расстояния от P' — как их тангенсы. Отсюда следует, что прямые, соединяющие каждую вершину основания с P и P', симметричны относительно биссектрисы соответствующего угла основания.

    Пусть теперь K, L, M, N — точки, симметричные P относительно AB, BC, CD, DA. Так как, например, $BK = BP = BL$, серединный перпендикуляр к KL совпадает с биссектрисой угла KBL, т.е. прямой BP' (рис.24). Значит, P' — центр окружности, проходящей через точки K, L, M, N. Применив гомотетию с центром P и коэффициентом $1/2$, получаем, что середина отрезка PP' — центр окружности, проходящей через проекции P на ребра основания.

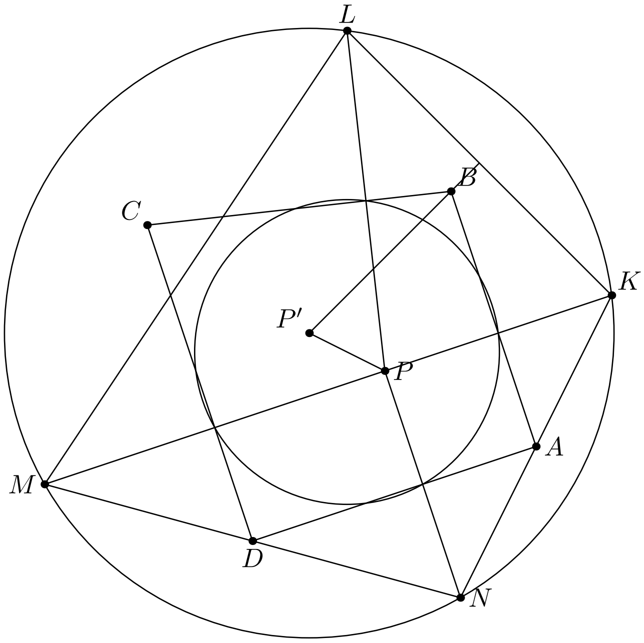


Рис.24

Нетривиальные критерии

4. В индукционном переходе перепутаны точки A_n и Q — 5 баллов.

5. Верный ответ — 1 балл.

6. Упоминается угол $45°$, но ГМТ не приводится — 2 балла.

Рассмотрен только один из трех центров — 3 балла.

Верное решение, но не выколоты точки — 5 баллов.

10. Верный ответ — 1 балл.

12. Замечено, но не доказано равенство окружностей или симметричность центров относительно биссектрисы — 2 балла.

13. Упоминаются факты, имеющие отношение к решению, но построения нет — 1 балл.

Верное построение с недостаточным обоснованием —5 баллов.

17. Доказана только достаточность — 3 балла.

18. Не доказано, что центр не может лежать вне полосы — 3 балла.

Не обосновано, что любая точка внутри полосы годится — 4 балла.

19. Верное решение с заменой площади на периметр — 6 баллов.

23. Верный пример без обоснования — 6 баллов.

VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (Б.Френкин; 8) Существует ли треугольник, в котором одна сторона равна какой-то из его высот, другая — какой-то из биссектрис, а третья — какой-то из медиан?

   Решение. Нет, так как наибольшая сторона треугольника длиннее любой из его высот, медиан или биссектрис. Действительно, любой отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне, короче, по крайней мере, одной из двух других сторон. Поэтому любая медиана или биссектриса короче хотя бы одной из сторон и, тем самым, короче наибольшей стороны. Тем более, это верно для высот.

2. (Д.Швецов; 8) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке I. Пусть O — центр описанной окружности треугольника CA_1B_1. Докажите, что $OI \perp AB$.

   Первое решение. Пусть A_2, B_2, C_2 — проекции точек A_1, B_1, I на AB (рис.2). Так как AA_1 — биссектриса, то $AA_2 = AC$. С другой стороны, AC_2 — касательная из A к вписанной окружности треугольника, и, значит, отрезок $A_2C_2 = AA_2 - AC_2$ равен касательной к этой окружности из точки C. Аналогично получаем, что отрезок B_2C_2 равен той же касательной, т.е. C_2 — середина A_2B_2. По теореме Фалеса C_2I пересекает отрезок A_1B_1 в его середине, а так как треугольник CA_1B_1 прямоугольный, эта середина совпадает с центром его описанной окружности.

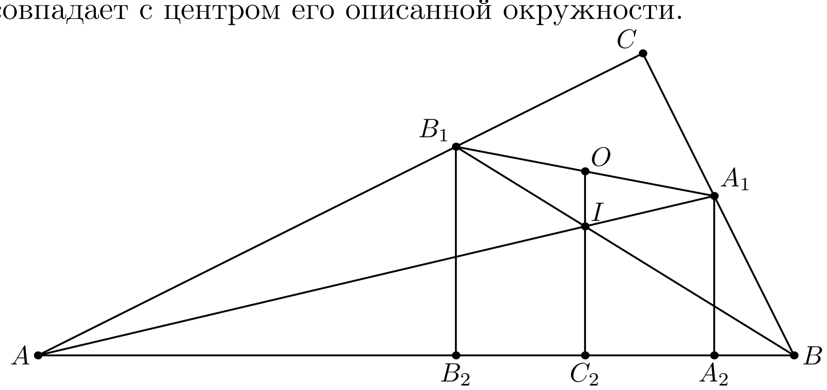


Рис. 2

   Второе решение. (Райко Арсений, школа №179, Москва)

   Обозначим через A_2, B_2 основания перпендикуляров, опущенных из точек A_1, B_1 на гипотенузу AB соответственно. Из равенства прямоугольных треугольников BCB_1 и BB_2B_1 следует, что $\angle BB_1C = \angle BB_1B_2$. Получаем, что для треугольника AB_1B_2 точка I является центром вневписанной окружности. Следовательно, B_2I – биссектриса прямого угла $B_1B_2A_2$. Такими же рассуждениями показываем, что A_2I является биссектрисой прямого угла $A_1A_2B_2$. Таким образом треугольник B_2IA_2 — равнобедренный прямоугольный, т.е. точка I лежит на серединном перпендикуляре к A_2B_2. Точка O будучи серединой боковой стороны B_1A_1 прямоугольной трапеции $B_2B_1A_1A_2$ также обладает этим свойством. Поэтому $OI \perp B_2A_2$.

3. (Ф.Нилов; 8) Точки A', B', C' лежат на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC. Точка X такова, что $\angle AXB = \angle A'C'B' + \angle ACB$ и $\angle BXC = \angle B'A'C' + \angle BAC$. Докажите, что четырёхугольник $XA'BC'$ — вписанный.

Решение. Пусть Y — отличная от C' точка пересечения окружностей $AB'C'$ и $BC'A'$. Тогда, так как $\angle B'YC' = \pi - \angle BAC$ и $\angle C'YA' = \pi - \angle CBA$, то $\angle A'YB' = \pi - \angle ACB$, т.е Y лежит также на окружности $CA'B'$. Заметим теперь, что $\angle AYB = \angle AYC' + \angle C'YB = \angle AB'C' + \angle C'A'B = 2\pi - \angle C'B'C - \angle CA'C' = \angle ACB + \angle A'C'B' = \angle AXB$ (рис.3). Аналогично $\angle BYC = \angle BXC$, т.е точки X и Y совпадают.

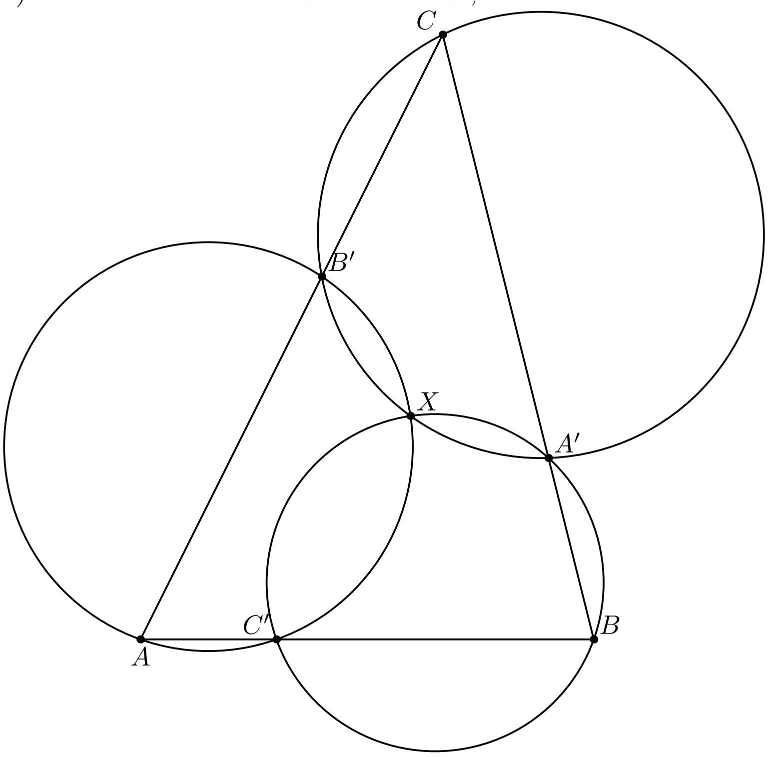


Рис. 3

4. (Д.Швецов; 8) Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке N. Окружности, описанные вокруг треугольников ANB и CND, повторно пересекают стороны BC и AD в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ вписан в окружность с центром N.

   Решение. Рассматривая вписанный пятиугольник A_1NB_1CD, получаем, что $A_1N = B_1N$, так как равны опирающиеся на эти дуги углы BDA и BCA. Аналогично $NC_1 = ND_1$. Кроме того, $\angle NA_1A = \angle ACD = \angle ABD = \angle DD_1N$ (рис.4). Следовательно, $ND_1 = NA_1$, ч.т.д.

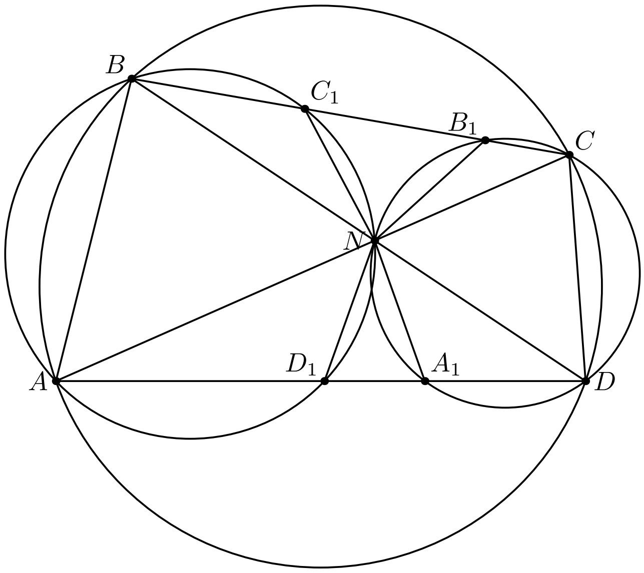


Рис. 4

5. (Д.Швецов; 8–9) На высоте BD треугольника ABC взята точка E такая, что $\angle AEC = 90°$. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников AEB и CEB; F, L — середины отрезков AC и O_1O_2. Докажите, что точки L, E, F лежат на одной прямой.

   Решение. Прежде всего заметим, что серединные перпендикуляры к отрезкам AE и EC являются средними линиями треугольника AEC и, значит, проходят через F. Таким образом, надо доказать, что FE — медиана треугольника FO_1O_2. При этом $O_1O_2 \parallel AC$, так как оба эти отрезка перпендикулярны BD. Пусть прямая, проходящая через E и параллельная AC, пересекает FO_1 и FO_2 в точках X и Y (рис.5). Так как $FCEX$ и $FAEY$ — параллелограммы, то $XE = FC = FA = EY$. Следовательно, FE — медиана треугольника FXY, а значит и треугольника FO_1O_2.

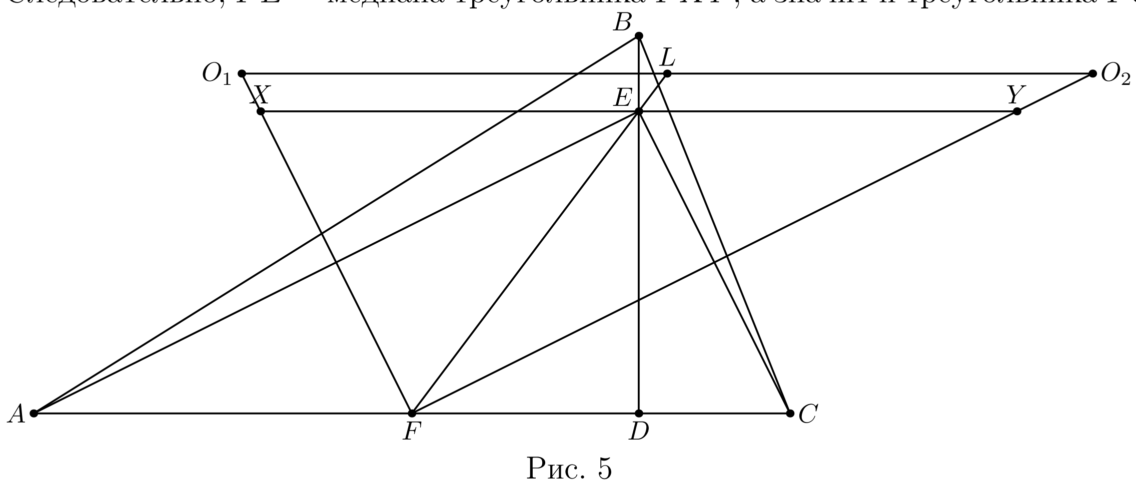


Рис. 5

6. (Д.Швецов; 8–9) На стороне BC равностороннего треугольника ABC взяты точки M и N(M лежит между B и N) такие, что $\angle MAN = 30°$. Описанные окружности треугольников AMC и ANB пересекаются в точке K. Докажите, что прямая AK содержит центр описанной окружности треугольника AMN.

   Решение. Так как $\angle BAM + \angle NAC = \angle MAN$ и $AB = AC$, точка, симметричная B относительно AM, совпадает с точкой, симметричной C относительно AN.

Обозначим эту точку через L. Тогда $\angle ALM = \angle ABM = \angle ACM$, т.е. L лежит на окружности ACM. Аналогично L лежит на окружности ABN и, значит, совпадает с K (рис.6). Поэтому $\angle KAN = \angle NAC = 30^\circ - \angle BAM = 90^\circ - \angle NMA$. Но по теореме о вписанном угле прямая, соединяющая A с центром описанной около треугольника AMN окружности, образует с прямой AN такой же угол.

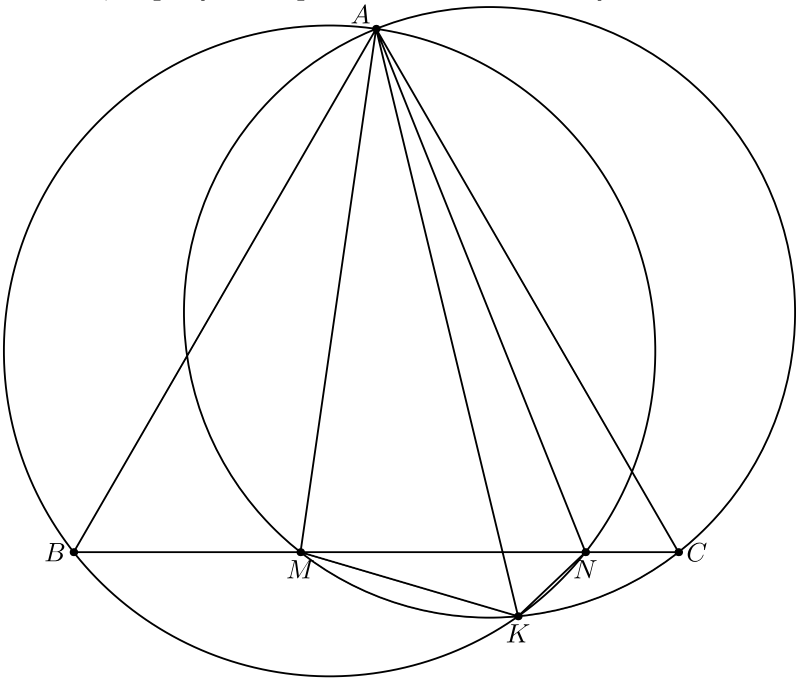


Рис. 6

7. (Д.Швецов; 8–9) Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная медиане BM. Эта прямая пересекает высоты, выходящие из A и C (или их продолжения), в точках K и N. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABK и CBN соответственно. Докажите, что $O_1M = O_2M$.

Решение. Достроим данный треугольник до параллелограмма $ABCD$ (рис.7). Так как $\angle BKA = \angle DKC = \angle BDA$, точки A, B, K, D лежат на одной окружности и $O_1M \perp BD$. Аналогично $O_2M \perp BD$. Кроме того, так как треугольники ABD и BCD равны, то равны и расстояния от центров описанных около них окружностей до точки M.

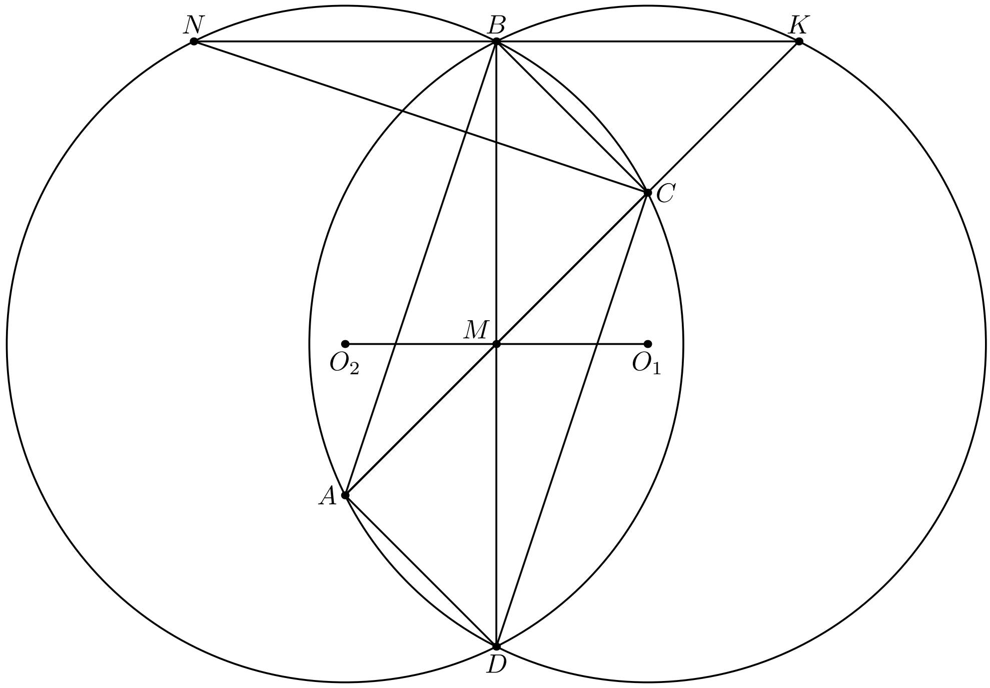


Рис. 7

8. (Д.Швецов; 8–10) В треугольнике ABC проведена высота AH. Точки I_b и I_c — центры вписанных окружностей треугольников ABH и CAH; L — точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Найдите угол LI_bI_c.

   Решение. Докажем, что треугольник LI_bI_c — равнобедренный и прямоугольный. Пусть L_b, L_c — проекции точек I_b, I_c на BC, а r_b, r_c — радиусы окружностей, вписанных в треугольники AHB, AHC (рис.8). Так как эти треугольники прямоугольные, то $r_b = (AH + BH - AB)/2$, $r_c = (AH + CH - AC)/2$ и $r_b - r_c = (BH - CH)/2 - (AB - AC)/2 = (BH - CH)/2 - (BL - CL)/2 = LH$. Следовательно $I_bL_b = LI_c = r_b$, $I_cL_c = LI_b = r_c$, т.е треугольники LI_bL_b и I_cL_cL равны, $LI_b = LI_c$ и $\angle I_bLI_c = 90°$. Соответственно $\angle LI_bI_c = 45°$.

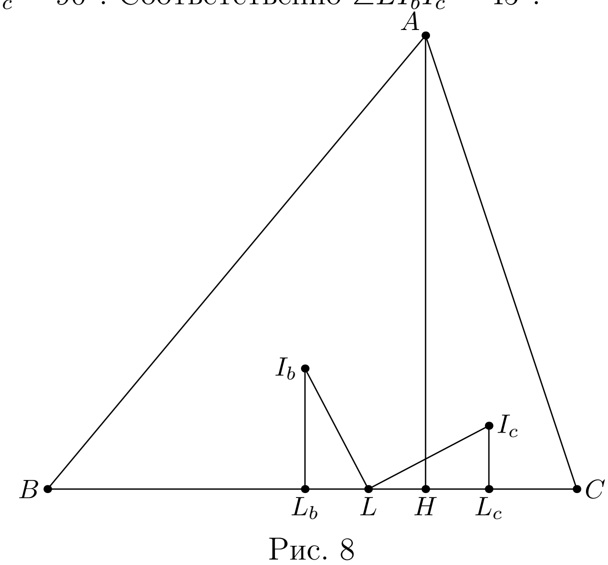


Рис. 8

Замечание. Пусть I_1, I_2 – центры вписанных окружностей треугольников ABD и CBD соответственно(D – произвольная точка на AC); L – точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AC. Тогда точки I_1, L, D и I_2 лежат на одной окружности.

9. (Б.Френкин; 8–10) Назовём точку внутри треугольника хорошей, если три чевианы через неё равны. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, а количество хороших точек нечётно. Чему оно может быть равно?

   Решение. Так как хорошие точки симметричны относительно высоты треугольника из вершины B, а число их нечетно, то найдется хорошая точка, лежащая на этой высоте. Так как чевиана через эту точку из вершины A не короче высоты из той же вершины, высота треугольника из A не длиннее, чем из B, т.е.$AC \leq AB$. Более того, AC не может быть длиннее высоты из B, так как иначе на этой высоте было бы две хороших точки. Предположим теперь, что некоторая хорошая точка не лежит на высоте. Пусть AA', BB', CC' — проходящие через нее чевианы, а AA_1, CC_1 — высоты треугольника. Тогда $A_1A' = C_1C'$, причем одна из точек A', C' лежит между основанием соответствующей высоты и точкой B, а другая — нет. Но отсюда следует, что соответствующие чевианы короче AC и тем более короче BB_1 — противоречие. Значит, хорошая точка только одна.

10. (И.Богданов; 8–11) Дан треугольник ABC. С помощью двусторонней линейки, проведя не более восьми линий, постройте на стороне AB такую точку D, что $AD/BD = BC/AC$.

    Решение. Проведем прямые a, b, c, параллельные BC, CA, AB и лежащие от них на расстоянии ширины линейки с внешней стороны треугольника. Прямые a, b, BC, AC образуют ромб, диагональ которого является биссектрисой угла C. Пусть E — точка пересечения этой биссектрисы с прямой c, а F — точка пересечения диагоналей трапеции, образованной прямыми c, AB, AC и BC (рис.10). Тогда прямая EF пересекает AB в искомой точке D.

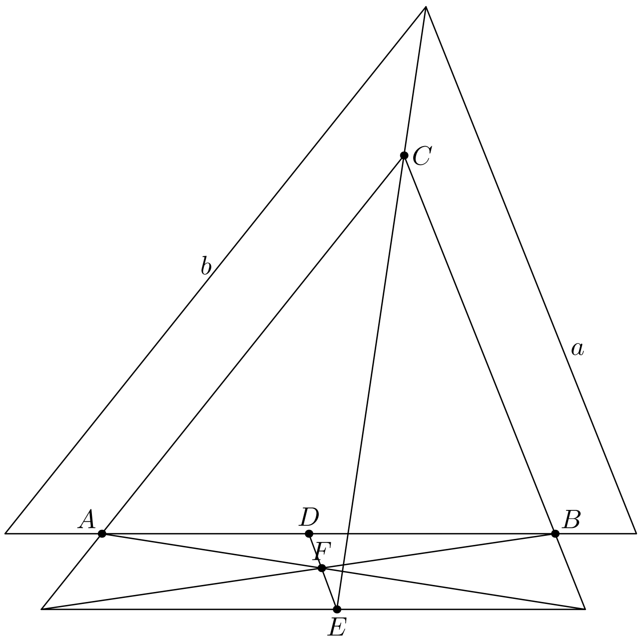


Рис. 10

11. (Б.Френкин; 8–11) Выпуклый n-угольник разрезан на 3 выпуклых многоугольника. У одного из них n сторон, у другого — больше, чем n, у третьего — меньше, чем n.

Каковы возможные значения n?

Ответ. $n = 4$ или $n = 5$.

Решение. Очевидно $n > 3$. Предположим, что $n > 5$. Тогда одна из частей n-угольника имеет не менее $n + 1$ стороны, вторая — n, третья — не менее 3. При соединении этих частей либо три пары сторон соединяются внутри многоугольника и не более трех пар образуют его стороны, либо две пары соединяются внутри и не более четырех образуют стороны. В любом случае суммарное количество сторон частей превосходит n не более, чем на 9, что при $n > 5$ невозможно. Примеры для $n = 4, 5$ показаны на рис. 11.

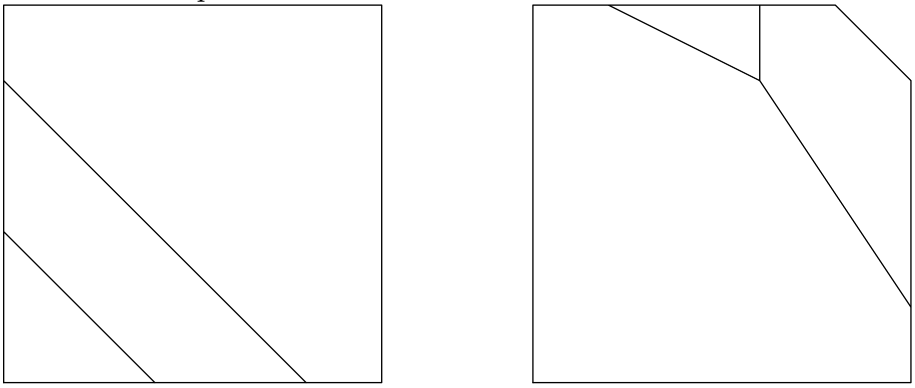


Рис. 11

12. (А. Блинков, Ю. Блинков, М. Сандрикова; 9) В прямоугольном треугольнике ABC AC — больший катет, CH — высота, проведенная к гипотенузе. Окружность с центром H и радиусом CH пересекает катет AC в точке M. Точка B' симметрична точке B относительно H. В точке B' восставлен перпендикуляр к гипотенузе, который пересекает окружность в точке K. Докажите, что:

а) $B'M \parallel BC$;

б) AK — касательная к окружности.

Решение. а) Проведем высоту N к основанию равнобедренного треугольника CHM, тогда $CN = NM$. Так как $BH = B'H$ и $NH \parallel BC$, то прямая, проходящая через точку B' параллельно HN, пересечет AC в точке M (по теореме Фалеса).

Другое решение. Имеем $\angle CMH = \angle MCH = \angle CBB' = \angle CB'B = a$, поэтому точки C, H, B' и M лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle CB'M = \angle CHM = 180^\circ - 2a$, тогда $\angle AB'M = a$, что и требовалось.

б) Из прямоугольного треугольника ABC: $CH^2 = AH \cdot BH$. Так как $B'H = BH$ и $KH = CH$, то $KH^2 = AH \cdot B'H$, то есть треугольники AKH и $AB'K$ подобны, откуда и вытекает утверждение задачи.

13. (С.Берлов; 9) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$. На диагонали BD выбрана точка K такая, что $\angle AKB + \angle BKC = \angle A + \angle C$. Докажите, что $AK \cdot CD = KC \cdot AD$.

Решение. Возьмем на BD такую точку L, что $\angle ALB = \angle A$. Так как треугольники ABL и DBA подобны, $BL \cdot BD = AB^2 = BC^2$. Значит, треугольники CBL и DBC тоже подобны, т.е. $\angle BLC = \angle C$ и L совпадает с K. Требуемое равенство, очевидно, следует из указанных подобий.

14. (С.Берлов; 9–10) На стороне AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ нашлась такая точка M, что CM и BM параллельны AB и CD соответственно. Докажите, что $S_{ABCD} \geq 3S_{BCM}$.

Решение. Так как $\angle ABM = \angle BMC = \angle MCD$, то $S_{ABM}/S_{BMC} = AB/MC$ и $S_{BMC}/S_{CMD} = BM/CD$. Но треугольники ABM и MCD подобны, так что эти отношения равны и $S_{BMC}^2 = S_{ABM} \cdot S_{MCD}$. По неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом $S_{BMC} \leq (S_{ABM} + S_{MCD})/2$, что равносильно утверждению задачи.

15. (Д.Прокопенко, А.Блинков; 9–11) В остроугольном треугольнике ABC AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты. Прямые AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке K. Окружности, описанные вокруг треугольников A_1KC_1 и A_1KB_1, вторично пересекают прямые AB и AC в точках N и L соответственно. Докажите, что

а) сумма диаметров этих окружностей равна стороне BC.

б) $A_1N/BB_1 + A_1L/CC_1 = 1$.

Решение. а) Треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C подобны треугольнику ABC с коэффициентами $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ соответственно. Поэтому $\angle KA_1C_1 = \angle KA_1B_1 = 90^\circ - \angle A$, и по теореме синусов диаметры описанных окружностей треугольников AKB_1 и A_1KC_1 равны соответственно $B_1K/\cos A$ и $C_1K/\cos A$. Следовательно, их сумма равна $B_1C_1/\cos A = BC$.

б) Доказанное в предыдущем пункте равенство можно переписать в виде

$$\frac{A_1N}{\sin B} + \frac{A_1L}{\sin C} = BC.$$

Разделив его на BC, получим искомое соотношение.

16. (Ф.Нилов; 9–11) В угол с вершиной A вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках B и C. Прямая, проходящая через A, пересекает окружность в точках D и E. Хорда BX параллельна прямой DE. Докажите, что отрезок XC проходит через середину отрезка DE.

Первое решение. Прежде всего заметим, что $\angle BCD = \angle ECX$, так как соответствующие дуги заключены между параллельными хордами. Кроме того, из равенства углов ABD и AEB следует подобие треугольников ABD и AEB и, значит, равенство $BD/BE = AD/AB$. Аналогично получаем, что $CD/CE = AD/AB$, т.е. $BD \cdot CE = CD \cdot BE = BC \cdot DE/2$ (последнее равенство следует из теоремы Птолемея).

Пусть теперь CX пересекает DE в точке M (рис. 16). Тогда треугольники CBD и CME подобны, следовательно, $BD \cdot CE = CB \cdot EM$. Отсюда и из предыдущего равенства получаем, что $EM = ED/2$.

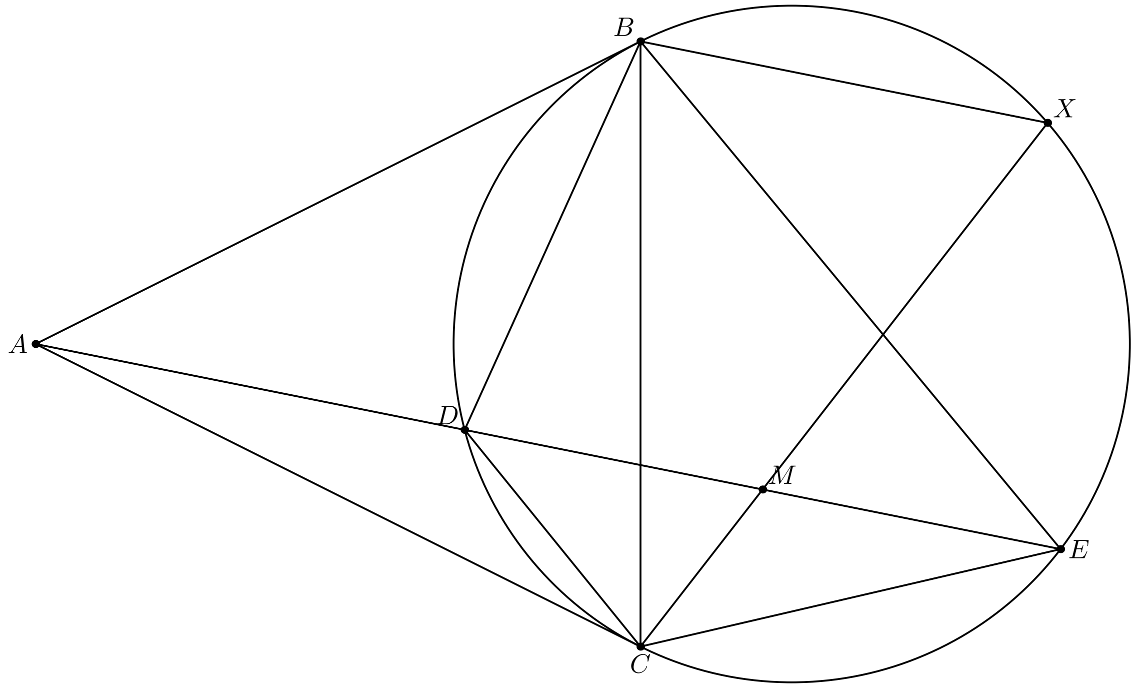


Рис. 16

Второе решение. (Руденко Александр, лицей №171 «Лидер», Киев)

Заметим, что $\angle DMC = \frac{1}{2}(\smile DC + \smile XE)$. По условию $DE||BX \Rightarrow \cup BD = \smile EX$. С другой стороны,

$$\angle COB = \smile CB = \smile CD + \smile DB = \smile CD + \smile EX = 2\angle CMD.$$

Откуда следует, что $\angle COA = \frac{1}{2}\angle COB = \angle CMD$, поэтому точки A, C, M, O лежат на одной окружности. Следовательно,
$\angle AMO = \angle ACO = 90°$, т.е. $MO \perp DE \Rightarrow DM = ME$.

17. (Предложил С.Токарев; 9–11) Постройте треугольник по высоте и биссектрисе, проведенным из одной вершины, и медиане, проведенной из другой вершины.

Первое решение. Пусть $l = CL$, $h = CH$ — биссектриса и высота из вершины C, $m = BM$ — медиана из вершины B, ϕ — угол, который в прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины l противолежит катету длины h. Через p обозначим прямую, содержащую точку C и параллельную прямой AB, а через B' — точку, симметричную точке B относительно прямой p.

Предположим, что треугольник ABC построен. Тогда выполнено хотя бы одно из равенств $\angle CLB = \phi$ или $\angle CLB = 180° - \phi$, и в любом случае имеем $\angle B'CM = 2\phi$. В самом деле, если, например, $\angle CLB = \phi$, то $\angle B'CM = 360° - 2\angle CBA - \angle BCA = 2(180° - \angle CBA - \angle BCL) = 2\phi$ (Рис.17.1). Второй случай разбирается аналогично.

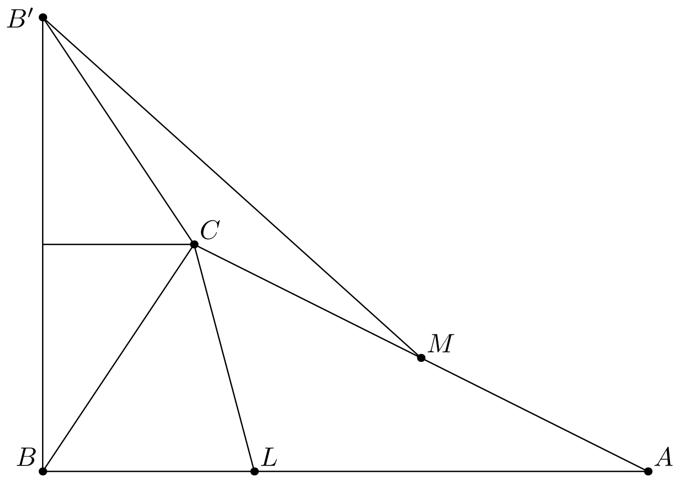


Рис. 17.1

Итак, отрезок $B'M$ виден из точки C под углом 2ϕ. Отсюда получаем следующее построение.

Проведем две параллельные прямые на расстоянии h друг от друга и отметим на одной из них точку B; другая прямая будет прямой p. Далее отмечаем точку B', а затем — точку M, удаленную на расстояние m от B и равноудаленную от параллельных прямых. Построив угол ϕ, строим две дуги окружностей с концами в точках B' и M и угловой величиной $360° - 4\phi$.

Если C_1 и C_2 — точки пересечения дуг с прямой p, а A_i $(i = 1, 2)$ — точка, симметричная C_i относительно M, то каждый из треугольников A_1BC_1 и A_2BC_2 является искомым.

Действительно, высоты этих треугольников, проведенные из вершин C_1, C_2, равны h, а отрезок $BM = m$ является в каждом из них медианой. Кроме того, если L_1, L_2 — основания соответствующих биссектрис, то из построения следует, что один из углов C_1L_1B и C_2L_2B равен ϕ, а другой $180° - \phi$, откуда, в силу определения угла ϕ, получаем $C_1L_1 = C_2L_2 = l$.

Примечание 1. Ясно, что если $l < h$ или $m < h/2$, то решений нет. Если $l = h$ и $m \geq h/2$, решением является единственный равнобедренный треугольник (при $m = h/2$ вырождающийся в отрезок). В случае, когда $l > h$ и $m = h/2$, получаем два равных треугольника, симметричных относительно прямой BB'.

При $l > h$ и $m = l/2$ один из построенных треугольников оказывается вырожденным, так что решение единственно. Во всех остальных случаях задача имеет два решения.

Второе решение. Зная высоту и биссектрису из вершины C, можно построить эту вершину и прямую AB. Рассмотрим теперь следующее отображение этой прямой в себя. Для произвольной точки X найдем точку Y, удаленную от X и AB на расстояния, равные данной медиане из вершины B и половине данной высоты (рис. 17.2). Затем отразим прямую CY относительно биссектрисы и найдем точку X' пересечения полученной прямой с AB. Очевидно, что это отображение сохраняет двойные отношения точек и переводит точку B в себя. Таким образом, задача сводится к известной задаче построения неподвижной точки проективного преобразования прямой.

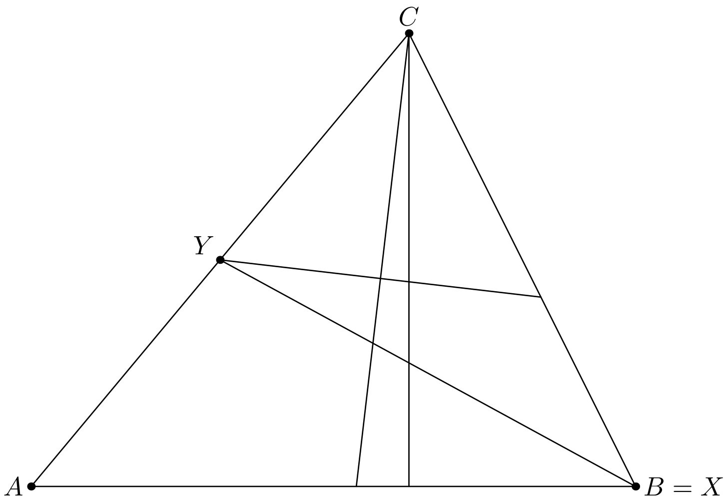


Рис. 17.2

Примечание 2. В 1938 г. в журнале "Математика в школе"была напечатана статья В.Фурсенко, в которой разбирались все задачи на построение треугольника по трем элементам. Эта задача там была ошибочно названа неразрешимой.

18. (Д.Прокопенко; 9–11) На хорде AC окружности ω выбрали точку B. На отрезках AB и BC как на диаметрах построили окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2, которые пересекают ω второй раз в точках D и E соответственно. Лучи O_1D и O_2E пересекаются в точке F. Лучи AD и CE пересекаются в точке G. Докажите, что прямая FG проходит через середину AC.

    Решение. Так как углы ADB и BEC прямые, точки D и E лежат на окружности с диаметром BG. При этом $\angle FDG = \angle ADO_1 = \angle DAC = \angle GED$. Следовательно, FD (и аналогично FE) — касательная к этой окружности (рис. 18). Значит эта прямая симметрична медиане треугольника GED из вершины G относительно биссектрисы из этой же вершины. Поскольку треугольник GDE подобен треугольнику GCA, в этом последнем треугольнике данная прямая будет медианой.

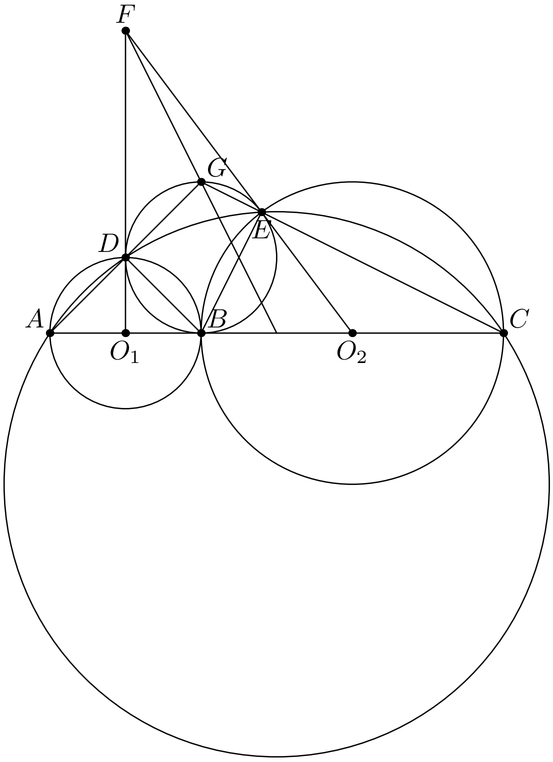


Рис. 18

19. (В.Ясинский, Украина; 9–11) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Точки P и Q диаметрально противоположны C и D соответственно. Касательные к окружности в этих точках пересекают прямую AB в точках E и F (A лежит между E и B, B — между A и F). Прямая EO пересекает AC и BC в точках X и Y, а прямая FO пересекает AD и BD в точках U и V. Докажите, что $XV = YU$.

Решение. Достаточно доказать, что $XO = OY$. Действительно, тогда аналогично получим, что $UO = OV$ и, значит, $XUYV$ — параллелограмм.

Пусть прямая EO пересекает окружность в точках P и Q (рис. 19). Искомое равенство равносильно равенству двойных отношений $(PX; OY) = (QY; OX)$. Спроецировав прямую EO на окружность из точки C, получим эквивалентное равенство $(PA; C'B) = (QB; C'A)$, которое верно, так как прямые PQ, AB и касательная к окружности в точке C' пересекаются в одной точке.

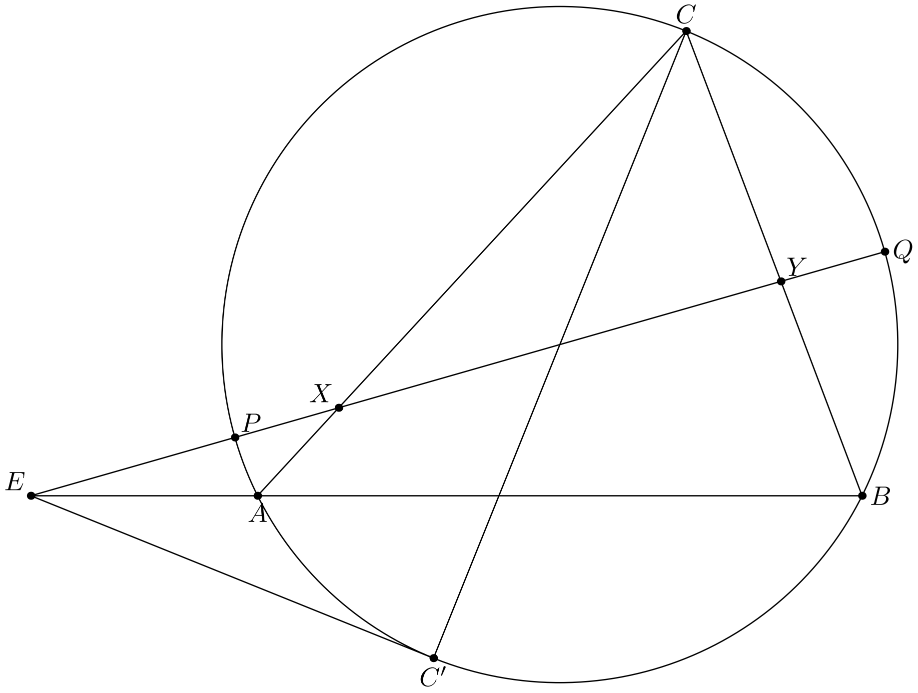


Рис. 19

20. (Ф.Ивлев; 10) Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается его сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Пусть A_2, B_2 — середины отрезков B_1C_1, A_1C_1 соответственно, O — центр описанной окружности треугольника, P — одна из точек пересечения прямой CO с вписанной окружностью. Прямые PA_2 и PB_2 вторично пересекают вписанную окружность в точках A' и B'. Докажите, что прямые AA' и BB' пересекаются на высоте треугольника, опущенной на AB.

    Решение. Достаточно доказать, что $\angle CAP = \angle A'AB$. Действительно, это означает, что прямая AA' симметрична AP относительно биссектрисы угла A. Тогда аналогично BB' симметрична BP относительно биссектрисы угла B, а значит, точка пересечения этих прямых лежит на прямой, симметричной CP относительно биссектрисы угла C, т.е. на высоте треугольника.

    Пусть Q — точка пересечения прямой AP с окружностью, S — середина дуги B_1C_1 (рис. 20). Композиция проекций окружности на себя из точек A и A_2 меняет местами точки B_1 и C_1, переводит Q в A' и оставляет S на месте. Значит $(B_1Q; SC_1) = (C_1A'; SB_1)$, т.е. точки A' и Q симметричны относительно прямой AA_2, что равносильно искомому равенству.

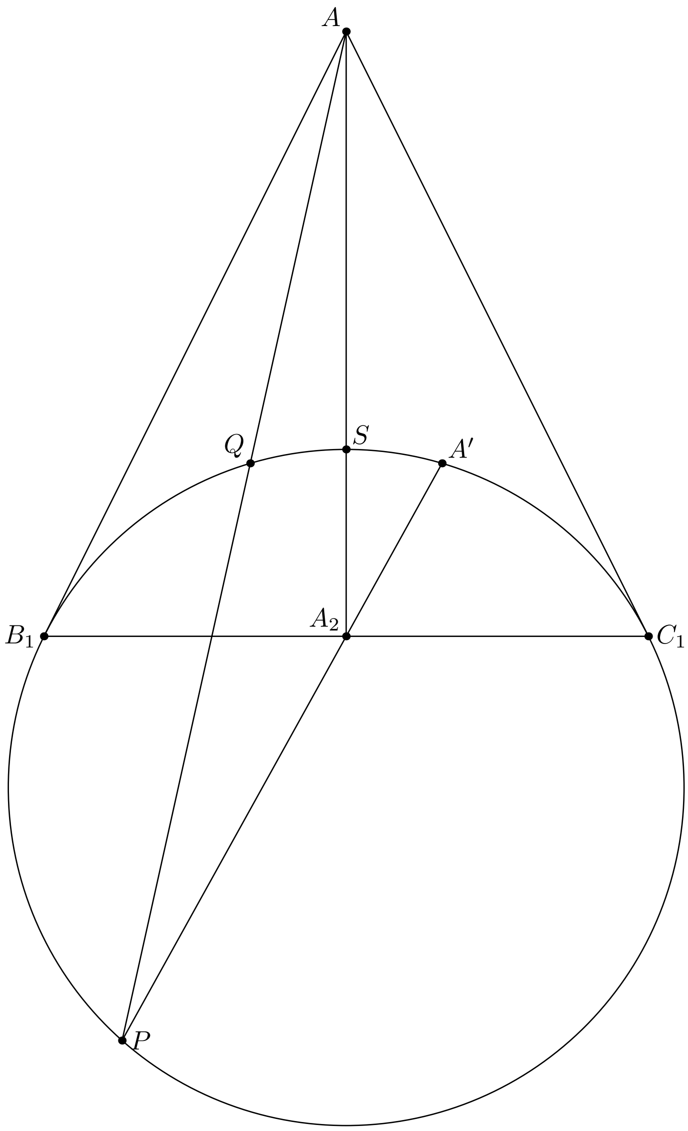


Рис. 20

21. (А.Акопян; 10–11) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что $\angle ABD + \angle ACD > \angle BAC + \angle BDC$. Докажите, что $S_{ABD} + S_{ACD} > S_{BAC} + S_{BDC}$.

    Решение. Если бы стороны AB и CD были параллельны, то выполнялись бы равенства $\angle ABD = \angle BDC$ и $\angle ACD = \angle BAC$. Поэтому условие задачи равносильно тому, что лучи AB и DC пересекаются, т.е. расстояние от C до прямой AB меньше, чем от D, а расстояние от B до прямой CD меньше, чем от A. Поэтому $S_{ABD} > S_{ABC}$ и $S_{ACD} > S_{BCD}$.

22. (А.Заславский; 10–11) Окружность с центром F и парабола с фокусом F пересекаются в двух точках. Докажите, что на окружности найдутся такие четыре точки A, B, C, D, что прямые AB, BC, CD и DA касаются параболы.

    Решение. Возьмем произвольную точку окружности A, лежащую вне параболы. Так как прямая AF и прямая, проходящая через A и параллельная оси параболы, вторично пересекают окружность в точках, симметричных относительно оси, касательные из A к параболе также пересекают окружность в точках B и D, симметричных относительно оси. Аналогично получаем, что вторые касательные из B и D

вторично пересекают окружность в точке C, симметричной A. Следовательно, A, B, C, D — искомые точки.

23. (Н.Белухов, Болгария; 10–11) Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Известно, что $AB \cdot CF = 2BC \cdot FA$, $CD \cdot EB = 2DE \cdot BC$, $EF \cdot AD = 2FA \cdot DE$. Докажите, что прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

    Решение. Пусть P — точка пересечения FC и AD; G — вторая точка пересечения описанной окружности шестиугольника с прямой BP. Тогда $2 = (AC; BF) = (DF; GB) = (DF; EB)$, и, следовательно, точки G и F совпадают.

24. (А.Акопян; 10–11) Дана прямая l в пространстве и точка A, не лежащая на ней. Для каждой прямой l', проходящей через A, построим общий перпендикуляр XY (Y лежит на l') к прямым l и l'. Найдите ГМТ точек Y.

    Решение. Пусть плоскость, проходящая через A и перпендикулярная l, пересекает l в точке B, а C — проекция Y на эту плоскость. Так как $BC \parallel XY$, то $BC \perp AY$ и по теореме о трех перпендикулярах $BC \perp AC$. Следовательно, C лежит на окружности с диаметром AB, а Y — на цилиндре, образующие которого проходят через точки этой окружности. Очевидно, что любая точка цилиндра принадлежит искомому ГМТ.

25. (Н.Белухов, Болгария; 11) Среди вершин двух неравных икосаэдров можно выбрать шесть, являющихся вершинами правильного октаэдра. Найдите отношение ребер икосаэдров.

    Решение. Заметим, что ни один из икосаэдров не может содержать четырех вершин октаэдра. Действительно, среди четырех вершин октаэдра обязательно найдутся две противоположные, а любая из остальных вершин образует с ними равнобедренный прямоугольный треугольник. Но среди вершин икосаэдра нельзя выбрать три вершины такого треугольника.

    Таким образом, одному из данных икосаэдров принадлежат три вершины одной грани октаэдра, а другому — три вершины противоположной грани. Заметим теперь, что между вершинами икосаэдра существуют только три различных расстояния: одно равно ребру икосаэдра, другое — диагонали правильного пятиугольника со стороной, равной ребру, третье — расстоянию между противоположными вершинами. При этом правильный треугольник могут образовывать только вершины с расстояниями первых двух видов. Так как икосаэдры неравны, то для одного из них грань октаэдра совпадает с гранью, а для другого с треугольником, образованным диагоналями. Следовательно, отношение ребер равно отношению диагонали правильного пятиугольника к его стороне, т.е $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (А.Заславский) (8) Существует ли выпуклый семиугольник, который можно разрезать на 2011 равных треугольников?

   Ответ. Да.

   Первое решение. Пусть T — прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 1003, а один из катетов — 1. Из двух таких треугольников составим прямоугольник, а из 1003 таких прямоугольников — прямоугольник со стороной 1003. Теперь приложим к одной из сторон этого прямоугольника равнобедренный треугольник, составленный из двух треугольников, равных T, а к противоположной стороне четырехугольник из трех таких треугольников (рис.1).

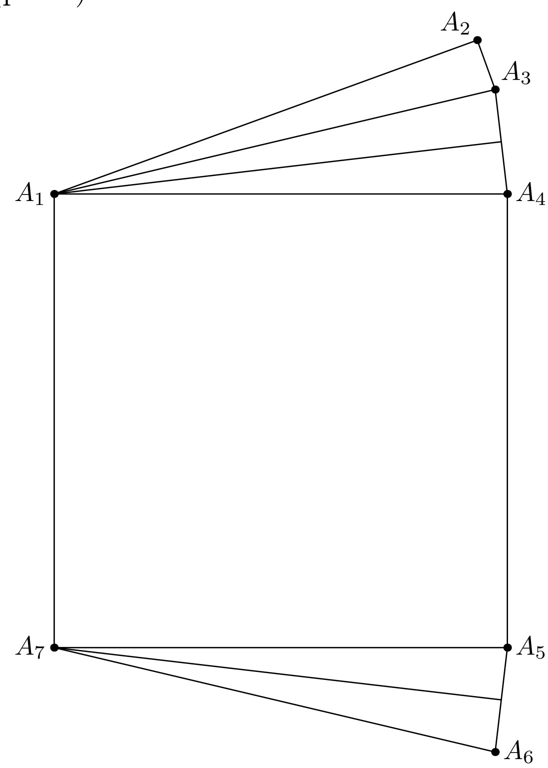


Рис. 1

   Второе решение. Возьмем квадрат со стороной 34 и отрежем от трех его углов равнобедренные прямоугольные треугольники с катетами 3, 6 и 16. Получится семиугольник, который можно разрезать на равнобедренные прямоугольные треугольники с катетом 1, причем число этих треугольников равно $2 \cdot 34^2 - 9 - 36 - 256 = 2011$.

   Вместо квадрата можно взять прямоугольник $m \times n$ и отрезать от него равнобедренные прямоугольные треугольники с катетами x, y, z такими, что $2mn - x^2 - y^2 - z^2 = 2011$. Участники олимпиады нашли несколько решений такого вида.

   Третье решение. (М.Аманжолов, Казахстан) Пусть T — равнобедренный треугольник с основанием 1 и углом при вершине $120°$. Тогда правильный треугольник со стороной 1 можно разрезать на три треугольника, равных T. С другой стороны, из 335 правильных треугольников можно сложить равнобедренную трапецию с основаниями 168 и 167 и боковыми сторонами 1. Две таких трапеции, соединенные большими основаниями, образуют выпуклый шестиугольник, который можно разрезать на 2010 треугольников, равных T.

Приложив к его меньшей стороне еще один такой треугольник, получим искомый семиугольник.

2. (Из сингапурских олимпиад) (8) В треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$, $AC = 6$ проведена биссектриса угла A. Из вершины B опущен на эту биссектрису перпендикуляр BH. Найдите MH, где M — середина BC.

   Решение. Пусть D — точка пересечения прямых BH и AC (рис.2). Тогда в треугольнике ABD AH — биссектриса и высота. Следовательно, этот треугольник равнобедренный, т.е. $AD = BD$ и $BH = HD$. Значит, MH — средняя линия в треугольнике BCD и $MH = CD/2 = (AC - AB)/2 = 1$.

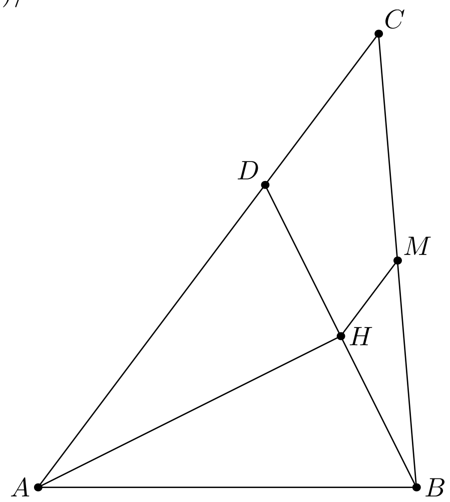


Рис. 2

3. (Д.Швецов) (8) В треугольнике ABC $\angle A = 60°$. Серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает прямую AC в точке C_1. Серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает прямую AB в точке B_1. Докажите, что прямая B_1C_1 касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

   Решение. Пусть B_0, C_0 — середины сторон AC, AB соответственно. Так как треугольники AB_0B_1, AC_0C_1 — прямоугольные с $\angle A = 60°$, то $AB_1 = 2AB_0 = AC$ и $AC_1 = 2AC_0 = AB$. Следовательно, прямая B_1C_1 симметрична BC относительно биссектрисы угла A. Поскольку эта биссектриса проходит через центр вписанной окружности, а BC касается этой окружности, то и B_1C_1 тоже касается вписанной окружности.

4. (Б.Френкин) (8) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA', BB', CC'. Известно, что в треугольнике $A'B'C'$ эти прямые также являются биссектрисами. Верно ли, что треугольник ABC равносторонний?

   Ответ. Да.

   Решение. Из условия следует, что в четырехугольнике $A'C'B'C$ диагональ CC' является биссектрисой углов C и C', а, значит, осью симметрии. Поэтому $A'C = B'C$, $A'C' = B'C'$, $\angle CB'A' = \angle CA'B'$ и $\angle AB'C' = \angle BA'C'$. Аналогично получаем, что $\angle BC'A' = \angle BA'C' = \angle AB'C' = \angle AC'B'$. Следовательно, треугольники $AB'C'$ и $BA'C'$ равны, т.е. $AB' = BA'$ и $AC = BC$. Равенство $AB = BC$ доказывается аналогично.

5. (Б.Френкин) (8) В треугольнике ABC проведен серединный перпендикуляр к стороне AB до пересечения с другой стороной в некоторой точке C'. Аналогично построены точки A' и B'. Для каких исходных треугольников треугольник $A'B'C'$ будет равносторонним?

Ответ. Для равносторонних и треугольников с углами 30, 30 и 120 градусов.

Решение. Пусть треугольник ABC — не равносторонний и AB — его наибольшая сторона. Тогда точки A', B' лежат на отрезке AB. Из условия следует, что $C'C_0$, где C_0 — середина AB, — серединный перпендикуляр к $A'B'$, значит, $CA' = A'B = AB' = CB'$, т.е. C' совпадает с C и треугольник ABC равнобедренный. Кроме того, $2\angle A = \angle A + \angle CAB' = \angle CB'B = 60°$, следовательно $\angle A = \angle B = 30°$.

Критерии.

Показано, что две из трех точек пересечения лежат на одной стороне — 1 балл.

Показано, что треугольник равнобедренный, но упущен случай неравностороннего треугольника — 3 балла.

6. (А.Акопян) (8) Даны две единичные окружности ω_1 и ω_2 пересекающиеся в точках A и B. На окружности ω_1 взяли произвольную точку M, а на окружности ω_2 точку N. Через точки M и N провели еще две единичные окружности ω_3 и ω_4. Обозначим повторное пересечение ω_1 и ω_3 через C, повторное пересечение окружностей ω_2 и ω_4 через D. Докажите, что $ACBD$ параллелограмм.

   Решение. Пусть O_i — центр окружности ω_i. Из условия следует, что O_1AO_2B, O_1CO_3M, O_3MO_4N, O_4NO_2D — ромбы со сторонами 1. Значит, $\overrightarrow{O_1C} = \overrightarrow{MO_3} = \overrightarrow{O_4N} = \overrightarrow{DO_2}$ и $\overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{BO_2}$. Следовательно, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$, что равносильно утверждению задачи.

   Критерии.

   В решении используются равенства вписанных углов, которые для другой картинки могут выглядеть иначе — 4 балла

7. (А.Акопян) (8–9) На сторонах AB и AC треугольника ABC выбрали точки P и Q так, что $PB = QC$. Докажите, что $PQ < BC$.

   Решение. Пусть T — четвертая вершина параллелограмма $CBPT$. Тогда $PT = BC$ и $CT = BP = CQ$ (рис.7). Следовательно, $\angle PQT > \angle TQC = \angle QTC > \angle QTP$, т.е. $PT > PQ$.

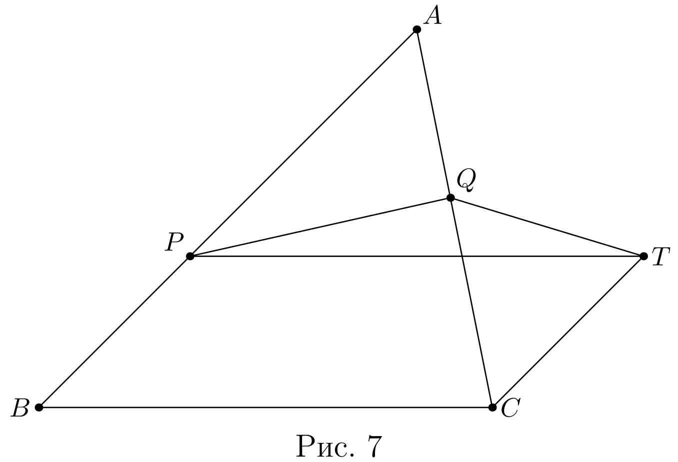


Рис. 7

   Критерии.

   Строится параллелограмм со стороной PQ и без доказательства используется, сто его вершина лежит внутри треугольника — 5 баллов.

8. (Д.Швецов) (8–9) Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90^\circ$), касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. A_2, C_2 — точки, симметричные точке B_1 относительно прямых BC, AB соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2, C_1C_2 пересекаются на медиане треугольника ABC.

   Решение. Пусть I — центр вписанной окружности, P — точка пересечения прямой A_1A_2 с медианой BB_0 (рис.8). Так как $\angle IA_1P = \angle IA_1B_1 = \angle C/2 = \angle PBA_1/2$, то $\angle BA_1P = \angle BPA_1$, т.е. $BP = BA_1$. Так как $BA_1 = BC_1$, прямая C_1C_2 тоже проходит через P.

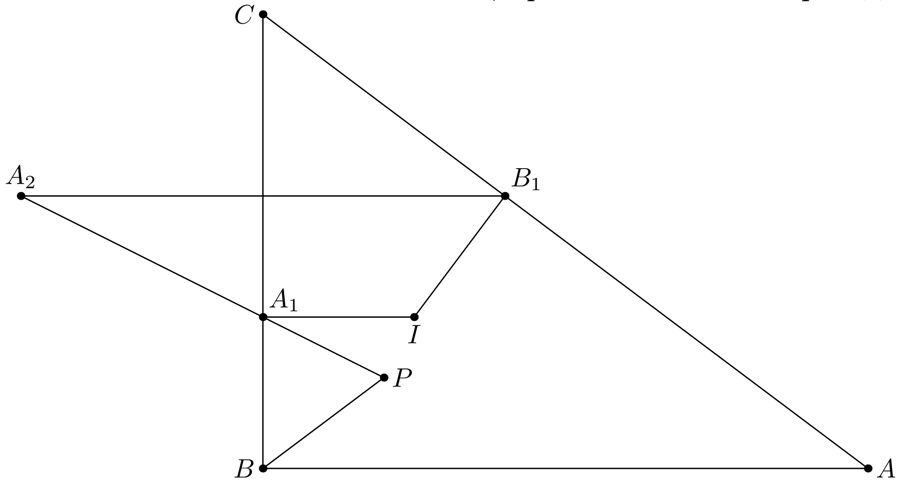


Рис. 8

9. (Д.Швецов) (8–9) Точка H – ортоцентр треугольника ABC. Касательные, проведённые к описанным окружностям треугольников CHB и AHB в точке H, пересекают прямую AC в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $A_1H = C_1H$.

   Решение. Из условия следует, что $\angle AHC_1 = \angle ABH$. Значит, $\angle C_1HB' = \angle AHB' - \angle ABH = \angle HAB = \pi/2 - \angle ABC$ (B' — основание высоты). Аналогично $\angle B'HA_1 = \pi/2 - \angle ABC$, т.е. треугольник A_1HC_1 — равнобедренный.

10. (М.Волчкевич) (8–9) В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. На боковой стороне CD выбрана точка M, а на основаниях BC и AD — точки P и Q так, что отрезки MP и MQ параллельны диагоналям трапеции. Докажите, что прямая PQ проходит через точку O.

    Решение. По теореме Фалеса $AQ/QD = AM/MB = CP/PB$. Значит, $AQ/PC = AD/BC = AO/CO$. Следовательно, треугольники AOQ и COP подобны и $\angle AOQ = \angle COP$.

11. (Д.Швецов) (8–10) Вневписанная окружность прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) касается стороны BC в точке A_1, а прямой AC в точке A_2. Прямая A_1A_2 пересекает (первый раз) окружность, вписанную в треугольник ABC в точке A'; аналогично определяется точка C'. Докажите, что $AC || A'C'$.

    Решение. Проведем через центр вписанной окружности I диаметр PQ, параллельный AC (рис.11). Так как $\angle PIC = \angle ACI = \angle BCI$ и $CA_1 = (AB + BC - AC)/2 = r = IP$, четырехугольник IPA_1C является равнобедренной трапецией. Значит, прямая A_1P параллельна IC, т.е. совпадает с A_1A_2. Соответственно, P совпадает с A', и, аналогично, Q совпадает с C'.

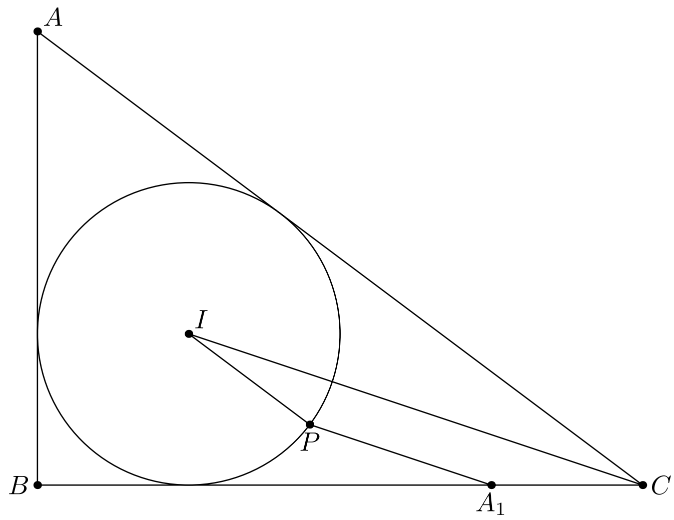


Рис.11

Критерии. Не объяснено, почему $IA'A_1A$ — параллелограмм, а не равнобедренная трапеция — 6 баллов.

12. (В.Ясинский) (8–10) Пусть AP и BQ — высоты данного остроугольного треугольника ABC. Постройте циркулем и линейкой на стороне AB такую точку M, чтобы $\angle AQM = \angle BPM$.

Решение. Так как точки P, Q лежат на окружности с диаметром AB, $\angle BPQ = 180^\circ - \angle A$. Значит, $\angle MPQ = \angle BPQ - \angle BPM = 180^\circ - \angle A - \angle AQM = \angle AMQ$. Следовательно, окружность, проходящая через точки P, Q, M, касается прямой AB (рис.12).

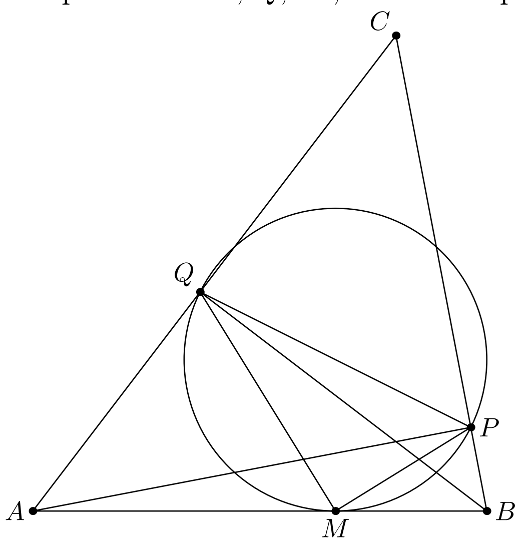


Рис.12

13. (Б.Френкин) а) (8–10) Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников, вершины которых лежат на сторонах данного треугольника (по одной вершине внутри каждой стороны).

б) (11) Найдите геометрическое место центров тяжести тетраэдров, вершины которых лежат на гранях данного тетраэдра (по одной вершине внутри каждой грани).

Решение. а) Пусть точки A', B', C' лежат на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC. Так как середина C_0 отрезка $A'B'$ лежит внутри треугольника ABC, расстояние от нее до стороны AB меньше опущенной на эту сторону высоты треугольника. Поскольку центр тяжести M треугольника $A'B'C'$ делит отрезок $C'C_0$ в отношении $2:1$, то расстояние от M до AB меньше, чем $2/3$ этой высоты. Аналогично получаем, что расстояния от M до двух других сторон меньше, чем $2/3$ соответствующих высот, т.е. M лежит внутри шестиугольника, образованного сторонами данного треугольника и прямыми, симметричными им относительно точки пересечения его медиан. При этом, две вершины треугольника $A'B'C'$ приближаются к одной вершине треугольника ABC, то центр тяжести приближается к границе указанного шестиугольника, так что все его внутренние точки принадлежат искомому ГМТ.

б) Рассуждая аналогично п.а), получаем, что искомое ГМТ является телом, ограниченным гранями данного тетраэдра и параллельными им плоскостями, каждая из которых делит соответствующую высоту в отношении $1:3$, считая от вершины. Четыре из восьми граней этого тела являются треугольниками, а остальные — шестиугольниками.

Критерии. Ответ без объяснений — 1 балл.

Нестрогое рассуждение с стремлением двух точек к вершине — 4 балла.

Путаница с границей — 6 баллов.

14. (Б.Френкин) (9) В треугольнике ABC высота и медиана из вершины A образуют (вместе с прямой BC) треугольник, в котором биссектриса угла A является медианой, а высота и медиана из вершины B образуют (вместе с прямой AC) треугольник, в котором биссектриса угла B является биссектрисой. Найдите отношение сторон треугольника ABC.

    Ответ. $1:2\sqrt{2}:3$.

    Решение. Так как биссектриса угла B делит пополам угол между высотой и медианой, то угол B — прямой. Значит, высота из вершины A совпадает со стороной AB, т.е. биссектриса угла A делит сторону BC в отношении $1:3$. Следовательно, отношение $AB:AC$ тоже равно $1:3$ и по теореме Пифагора $BC:AB=2\sqrt{2}$.

    Критерии. Показано, что треугольник прямоугольный — 2 балла.

    Наряду с правильным ответом указаны равнобедренные треугольники — не снижать.

15. (В.Протасов) (9–10) Дана окружность с центром O и радиусом 1. Из точки A к ней проведены касательные AB и AC. Точка M, лежащая на окружности, такова, что четырехугольники $OBMC$ и $ABMC$ имеют равные площади. Найдите MA.

    Решение. Так как $S_{OBMC}-S_{ABMC}=S_{ABC}-S_{OBC}+2S_{MBC}$, геометрическим местом точек, для которых $S_{OMBC}=S_{AMBC}$, является серединный перпендикуляр к отрезку OA. Поэтому $AM=OM=1$.

16. (П.Долгирев) (9–10) Дан треугольник ABC и прямая l. Прямые, симметричные l относительно AB и AC пересекаются в точке A_1. Точки B_1, C_1 определяются аналогично. Докажите, что

    а) прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке;

    б) эта точка лежит на описанной около треугольника ABC окружности;

    в) точки, построенные указанным способом для двух перпендикулярных прямых, диаметрально противоположны.

Решение. Прежде всего заметим, что, когда прямая l движется параллельно себе с постоянной скоростью, прямые, симметричные l относительно AC и BC, также перемещаются параллельно себе с постоянной скоростью. Поэтому точка C_1 движется по прямой, проходящей через C, т.е. точка пересечения CC_1 с описанной окружностью зависит только от направления прямой l. Пусть теперь A', B' — точки пересечения l с BC и AC (рис.16). Тогда $\angle C_1B'C = \angle CB'A'$, $\angle C'AC = \angle BA'C_1$. Значит, C — центр вписанной или вневписанной окружности треугольника $A'B'C_1$, т.е. C_1C — биссектриса угла $A'C_1B'$ или смежного с ним. Но угол между прямыми $A'C_1$ и $B'C_1$ не зависит от l, значит не зависит от l и угол между CC_1 и C_1A'. Поэтому при вращении l с постоянной скоростью прямые AA_1, BB_1, CC_1 вращаются с той же скоростью, откуда следуют все три утверждения задачи.

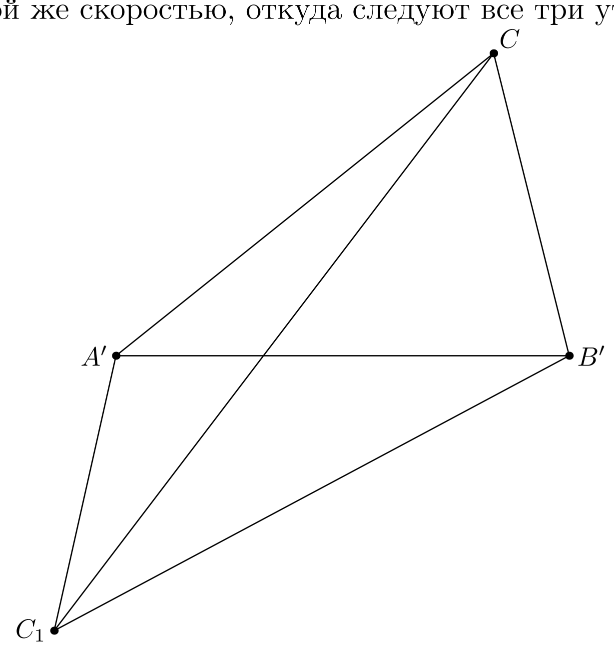


Рис.16

Критерии. Рассуждение в неориентированных углах, использующее конкретный чертеж, — 6 баллов (в каждом пункте).

17. (Б.Френкин) (9–11) а) Существует ли треугольник, в котором наименьшая медиана длиннее, чем наибольшая биссектриса?

б) Существует ли треугольник, в котором наименьшая биссектриса длиннее, чем наибольшая высота?

Решение. а) Нет. Пусть в треугольнике ABC длины сторон BC, AC, AB равны a, b, c соответственно, причём $a \le b \le c$. Далее, пусть CM — медиана, AL — биссектриса. Если угол C тупой или прямой, то $AL > AC$. Так как $BC \le AC$, то $\angle CMA$ — тупой или прямой, поэтому $CM \le AC$ и, значит, $AM < AL$.

Пусть теперь $\angle C$ острый. Так как сторона AB наибольшая, то $\angle C \ge 60^\circ$ и углы A, B острые. Тогда основание H высоты AH лежит на стороне BC, а не на её продолжении. Поэтому длина AH (а тогда и длина AL) не меньше, чем $AC\cos\ 60^\circ = b\sqrt{3}/2$. В то же время квадрат длины медианы CM равен $\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4} \le \frac{2a^2+b^2}{4} \le \frac{3b^2}{4}$. Поэтому длина CM не превосходит $b\sqrt{3}/2$ и, значит, не превосходит длины биссектрисы угла A.

б) Нет. Пусть опять $a \le b \le c$ и l — длина биссектрисы угла C. Тогда $(al + bl)\sin\frac{C}{2} = 2S_{ABC} = ab\sin C$, т.е. $l = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$. С другой стороны, высота из вершины A равна $h =$

$b \sin C$. Так как $a + b \geq 2a$, а $C \geq 60°$, $h/l = (a+b)\sin\frac{C}{2}/a \geq 1$.

Примечание. Нетрудно построить треугольник, в котором наименьшая медиана длиннее наибольшей высоты.

18. (А.Заславский) (9–11) На плоскости проведены n прямых общего положения, т.е. никакие две прямые не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Эти прямые разрезали плоскость на несколько частей. Какое

а) наименьшее;

б) наибольшее

количество углов может быть среди этих частей?

Решение. а) **Ответ.** 3. Рассмотрим выпуклую оболочку всех точек пересечения данных прямых. Две прямые, проходящие через вершину этой оболочки, делят плоскость на четыре угла, в одном из которых лежат все остальные тоски пересечения. Соответственно, угол, вертикальный этому, не пересекается остальными прямыми, так что количество углов не может быть меньше трех. Пример с тремя углами легко строится по индукции: очередную прямую надо проводить так, чтобы она пересекала все предыдущие внутри треугольника, являющегося выпуклой оболочкой точек пересечения.

б) **Ответ.** n при нечетном n, $n-1$ при четном, большем 2. Построим окружность, внутри которой лежат все точки пересечения. Данные прямые разбивают ее на $2n$ дуг. Пусть AB, BC — две соседние дуги, X, Y — точки пересечения прямой, проходящей через B, с прямыми, проходящими через A и C. Тогда, если X лежит на отрезке BY, то часть плоскости, содержащая дугу BC, не является углом, т.е. из двух частей, содержащих соседние дуги, углом может быть только одна. Следовательно, количество углов не превосходит n, причем равенство возможно только тогда, когда углом является часть, содержащая каждую вторую дугу. Но при четном n это означает, что есть два угла, содержащие противоположные дуги, т.е. образованные одной и той же парой прямых. При $n > 2$ это, очевидно, невозможно. При нечетном n прямые, содержащие стороны правильного n-угольника, разбивают плоскость на части, из которых n являются углами. Очевидно, что можно добавить к ним еще одну прямую так, чтобы количество углов не уменьшилось.

Второе решение п.а) (А.Гончарук, Харьков) Рассмотрим многоугольник T, являющийся объединением всех ограниченных частей. Ясно, что все углы являются вертикальными к углам T, меньшим 180°. Из формулы для суммы углов сразу следует, что таких углов не меньше трех. Многоугольник с тремя углами можно построить следующим образом. Возьмем точку D внутри треугольника ABC, впишем в угол ADB окружность достаточно малого радиуса, возьмем на меньшей из ее дуг, образованных точками касания $n-4$ точки и проведем касательные в этих точках. Эти касательные вместе с прямыми AC, BC, AD, BD образуют искомый многоугольник.

Критерии. Только ответ — 1 балл.

Только оценка или только пример — 3 балла.

19. (А.Заславский) (9–11) Существует ли неравнобедренный треугольник, у которого медиана, проведенная из одной вершины, биссектриса, проведенная из другой, и высота, проведенная из третьей, равны?

Решение. Да. Зафиксируем вершины A, B, построим точку D, симметричную A относительно B, и возьмем произвольную точку C такую, что $\angle BCD = 150°$. Тогда высота треугольника ABC из вершины A равна расстоянию DH от D до прямой BC, т.е. половине CD. С другой стороны, медиана BM из вершины B является средней линией в треугольнике ACD, т.е. тоже равна половине CD (рис.19). Будем теперь двигать точку C по дуге BD, вмещающей угол $150°$. Когда C стремится к B, биссектриса угла C стремится к нулю, а медиана из B — к $AB/2$. Когда C стремится к D, медиана из B стремится к нулю, а биссектриса не меньше, чем BC. Значит, существует положение точки C, при котором биссектриса равна двум другим отрезкам.

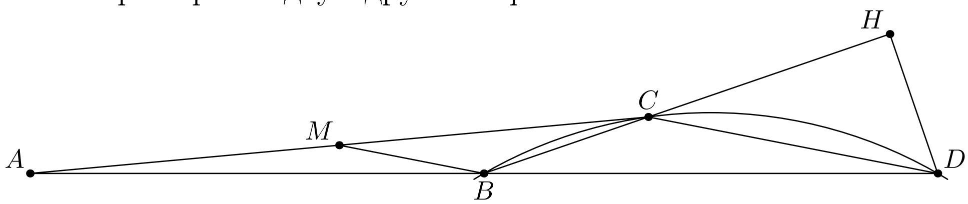


Рис.19

Примечание. Нетрудно видеть, что при движении C от B к D биссектриса возрастает, а высота и медиана убывают. Следовательно, углы искомого треугольника определяются однозначно.

20. (Н.Белухов, А.Заславский) (9–11) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD. Докажите, что $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда $IM : AC = IN : BD$.

Решение. Будем считать, что $ABCD$ не является трапецией. Противный случай требует лишь незначительных изменений решения.

По теореме Ньютона I лежит на MN. Пусть $\lambda = MI : IN$. Возьмем на сторонах четырехугольника точки P, Q, R и S такие, что $AP : PB = CQ : QB = CR : RD = DS : SA = \lambda$. Покажем, что I — середина отрезков PR и QS.

Это можно сделать, например, методом масс: поместим единичные массы в точки A и C, а массы λ в B и D. Две первые массы можно заменить массой 2 в точке M, две вторые — массой 2λ в точке N, следовательно, I — центр всех четырех масс . С другой стороны, можно заменить массы в A и B на массу $1 + \lambda$ в точке P, а две оставшихся на такую же массу в точке R.

Теперь, так как I — середина PR, а прямые AB и CD — не параллельные касательные к окружности с центром I, то они образуют равные углы с PR, т.е. PR параллельна биссектрисе одного из образованных этими прямыми углов. Аналогично, QS параллельна биссектрисе одного из углов между AD и BC. Следовательно, $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда $PR \perp QS$. Так как $PQRS$ — параллелограмм (со сторонами, параллельными AC и BD), это равносильно тому, что $PQRS$ — ромб. Но $PQ = QR \Leftrightarrow \frac{1}{1+\lambda}AC = \frac{\lambda}{1+\lambda}BD \Leftrightarrow \lambda = AC : BD$, ч.т.д.

Критерии. Доказано только в одну сторону — 3 балла.

21. (В.Ясинский) (10–11) На окружности с диаметром AC выбрана произвольная точка B, отличная от A и C. Пусть M, N — середины хорд AB, BC, а P, Q — середины меньших дуг, стягиваемых этими хордами. Прямые AQ и BC пересекаются в точке K, а прямые CP и AB — в точке L. Докажите, что прямые MQ, NP и KL пересекаются в одной точке.

Решение. Прямые PM и QN пересекаются в центре окружности O. Поэтому утверждение задачи следует из теоремы Дезарга, примененной к треугольникам PML и NQK.

22. (Г.Фельдман) (10–11) Из вершины C треугольника ABC проведены касательные CX, CY к окружности, проходящей через середины сторон треугольника. Докажите, что прямые XY, AB и касательная в точке C к окружности, описанной около треугольника ABC, пересекаются в одной точке.

Решение. При гомотетии с центром C и коэффициентом $1/2$ прямая XY перейдет в радикальную ось точки C и окружности, проходящей через середины A', B', C' сторон BC, CA, AB. С другой стороны, касательная в точке C к описанной окружности касается также окружности $A'B'C'$, т.е. является радикальной осью этой окружности и точки C. Следовательно, точка пересечения этих радикальных осей лежит на прямой $A'B'$. Сделав обратную гомотетию, получим утверждение задачи.

23. (Н.Белухов, М.Маринов, Болгария) (10–11) Дан треугольник ABC и прямая l, пересекающая BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Точка A' — середина отрезка, соединяющего проекции A_1 на AB и AC. Аналогично определяются точки B' и C'.

а) Докажите, что A', B' и C' лежат на некоторой прямой l'.

б) Докажите, что, если l проходит через центр описанной окружности $\triangle ABC$, то l' проходит через центр его окружности девяти точек.

Решение. Пусть P_a, P_b, P_c — середины высот AH_a, BH_b, CH_c. Очевидно, что точки A', B', C' лежат на сторонах треугольника $P_aP_bP_c$ и делят их в тех же отношениях, в каких точки A_1, B_1, C_1 делят стороны треугольника ABC. Поэтому п.а) сразу следует из теоремы Менелая. Кроме того, если l проходит через некоторую фиксированную точку, то l' также проходит через некоторую фиксированную точку, так что для доказательства п.б) достаточно проверить его для каких-то двух прямых, проходящих через центр O описанной окружности. Например, для прямых, проходящих через какую-нибудь вершину треугольника.

Пусть C_1 — точка пересечения CO и AB; X, Y — проекции C_1 на AC и BC; A_0, B_0, C_0 — середины BC, CA, AB, U, V середины XY и A_0B_0, Q — точка пересечения серединного перпендикуляра к A_0B_0 с UP_c (рис.23). Так как $XY \parallel AB$, точки C, V, U лежат на одной прямой. Значит, $VQ/CP_c = UV/UC = C_1O/CC_1$, т.е. $VQ = OC_0/2$ и Q — центр окружности $A_0B_0C_0$.

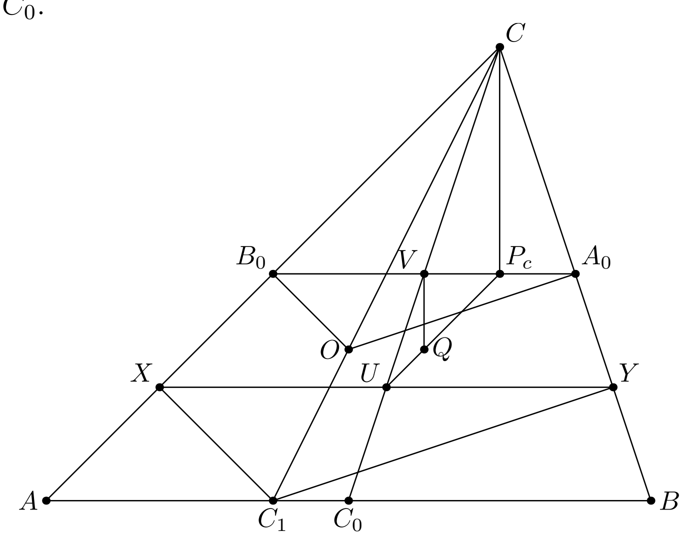


Рис.23

24. (А.Заславский) (10–11) Дан остроугольный треугольник ABC. Найдите на сторонах BC, CA, AB такие точки A', B', C', чтобы наибольшая сторона треугольника $A'B'C'$ была минимальна.

Решение. Докажем сначала, что искомый треугольник — педальный, т.е. перпендикуляры, восставленные из его вершин к соответствующим сторонам ABC, пересекаются в одной точке. Действительно, для произвольного треугольника $A'B'C'$ окружности $AB'C'$, $BC'A'$ и $CA'B'$ пересекаются в некоторой точке P. Пусть A'', B'', C'' — проекции P на BC, CA, AB. Так как $\angle A'PB' = \angle A''PB'' = \pi - \angle C$ и т.д., то $\angle A''PA' = \angle B''PB' = \angle C''PC'$, и, значит, треугольник $A''B''C''$ получается из $A'B'C'$ поворотной гомотетией с коэффициентом, меньшим 1.

Рассмотрим теперь точку T, педальный треугольник которой правильный, и докажем, что педальный треугольник любой другой точки P имеет хотя бы одну сторону большей длины. Пусть A', B' — проекции P на BC и AC. Тогда $A'B' = PC \sin C$, т.е. $A'B'$ не превосходит стороны педального треугольника T тогда и только тогда, когда $PC \leq TC$. Аналогично должны выполняться неравенства $PB \leq TB$, $PA \leq TA$. Очевидно, что три эти неравенства выполнены только для точки T.

Осталось описать построение точки T. Из ее определения следует, что $TA \cdot BC = TB \cdot AC = TC \cdot AB$. Геометрическим местом точек, удовлетворяющих первому равенству является окружность Аполлония, проходящая через C и основания внешней и внутренней биссектрис угла C. Аналогично строится окружность — геометрическое место точек, удовлетворяющих второму равенству. Точка T будет общей точкой этих окружностей, лежащей внутри треугольника ABC.

Критерии. Указано только, что вписанный треугольник равносторонний — 2 балла.

25. (Н.Белухов, Болгария) (10–11) Три равных правильных тетраэдра имеют общий центр. Могут ли все грани многогранника, являющегося их пересечением, быть равны?

Решение. Да. Пусть A, B, C, D — точки касания правильного тетраэдра с вписанной сферой. Повернув их на $120°$ относительно общего перпендикуляра к отрезкам AB и CD, получим точки A', B', C', D', а повернув на $240°$, — точки A'', B'', C'', D''. Плоскости, касающиеся сферы в этих двенадцати точках, образуют три искомых тетраэдра.

Действительно, для любых двух из этих точек существует движение, переводящее все множество из двенадцати точек в себя, а одну из выбранных точек в другую. Такими движениями можно перевести любую грань полученного многогранника в любую другую.

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (М.Рожкова, Украина) (8) В треугольнике ABC точка M — середина AB, а точка D — основание высоты CD. Докажите, что $\angle A = 2\angle B$ тогда и только тогда, когда $AC = 2MD$.

   Решение. Пусть K — середина AC (рис.1). Так как DK — медиана прямоугольного треугольника ADC, то $AK = KD$ и $\angle ADK = \angle A$. С другой стороны, MK — средняя линия треугольника ABC, следовательно, $\angle DMK = \angle B$. Применяя к треугольнику DMK теорему о внешнем угле, получаем, что равенства $KD = DM$ и $\angle KDA = 2\angle KMD$ равносильны.

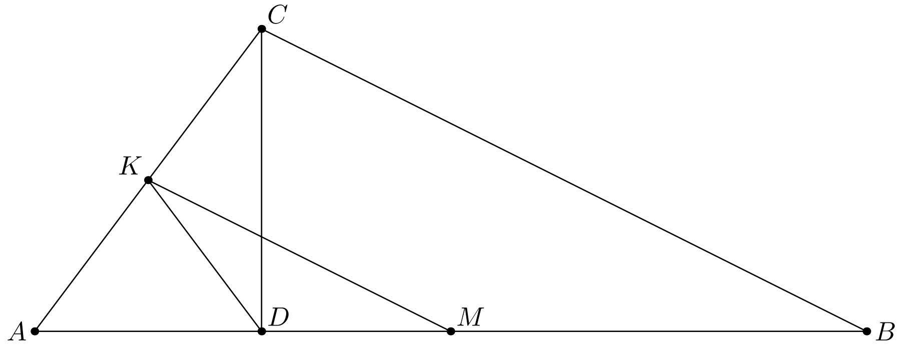


Рис.1

   Критерии. Предложенное доказательство работает только в одну сторону — 3 балла.

2. (Б.Френкин) (8) Вписанный n-угольник разбит непересекающимися (во внутренних точках) диагоналями на треугольники. Каждый из получившихся треугольников подобен хотя бы одному из остальных.

   При каких n возможна описанная ситуация?

   Ответ. При $n = 4$ и при $n > 5$.

   Решение. Очевидно, что $n > 3$. Ясно также, что при четном n можно разрезать правильный n-угольник на два равных многоугольника диагональю, проходящей через его центр, а потом разрезать эти два многоугольника одинаковым образом. Кроме того, можно на трех сторонах правильного $2k$-угольника построить равные треугольники с вершинами на описанной окружности. Поэтому при нечетном $n > 5$ искомая ситуация тоже возможна. Осталось доказать, что она невозможна при $n = 5$.

   Если центр описанной около пятиугольника окружности не лежит ни на одной из проведенных диагоналей, то треугольник, содержащий его, — остроугольный, а остальные — тупоугольные, т.е. описанная ситуация не может иметь места. Если же центр лежит на диагонали, то два треугольника, примыкающие к этой диагонали, — прямоугольные, а третий — тупоугольный. Следовательно, указанная ситуация также невозможна.

3. (Д.Швецов) (8) Окружность с центром I касается сторон AB, BC, CA треугольника ABC в точках C_1, A_1, B_1. Прямые AI, CI, B_1I пересекают A_1C_1 в точках X, Y, Z соответственно. Докажите, что $\angle YB_1Z = \angle XB_1Z$

   Решение. Так как $B_1I \perp AC$, достаточно доказать, что $\angle YB_1A = \angle XB_1C$. Так как CI — серединный перпендикуляр к A_1B_1, то $\angle YB_1A_1 = \angle C_1A_1B_1$, а поскольку $\angle A_1B_1C = \angle B_1A_1C$, то $\angle YB_1A = \angle C_1A_1B$ (рис.3). Аналогично $\angle XB_1C = \angle A_1C_1B = \angle C_1A_1B$.

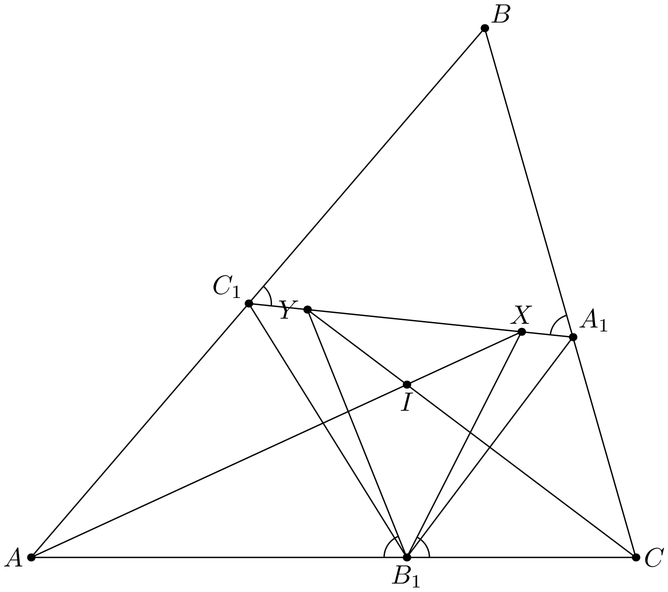


Рис.3

4. (А.Акопян) (8) Дан треугольник ABC. M — середина стороны BC, а P — проекция вершины B на серединный перпендикуляр к AC. Прямая PM пересекает сторону AB в точке Q. Докажите, что треугольник QPB равнобедренный

   Решение. Пусть точка D симметрична B относительно серединного перпендикуляра к AC, а T — точка пересечения AB и CD. Тогда $ACBD$ — равнобокая трапеция, и, значит, треугольник BDT — равнобедренный (рис.4). Так как прямая PM содержит среднюю линию этого треугольника, треугольник QPB тоже равнобедренный.

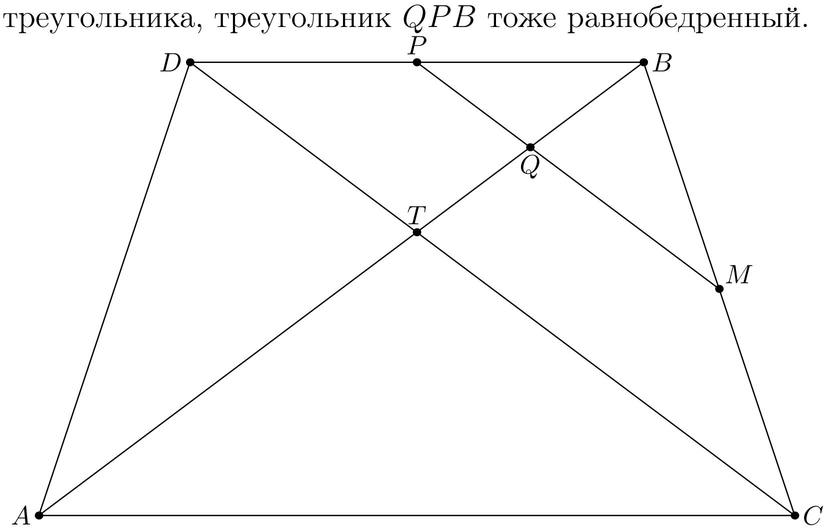


Рис.4

5. (Д.Швецов) (8) На стороне AC треугольника ABC произвольно выбрана точка D. Касательная, проведённая в точке D к описанной окружности треугольника BDC, пересекает сторону AB в точке C_1; аналогично определяется точка A_1. Докажите, что $A_1C_1||AC$.

   Решение. Из условия задачи следует, что $\angle C_1DA = \angle DBC$ и $\angle A_1DC = \angle DBA$ (рис.5). Следовательно, четырехугольник A_1BC_1D — вписанный, т.е. $\angle C_1A_1D = \angle C_1BD = \angle CDA_1$.

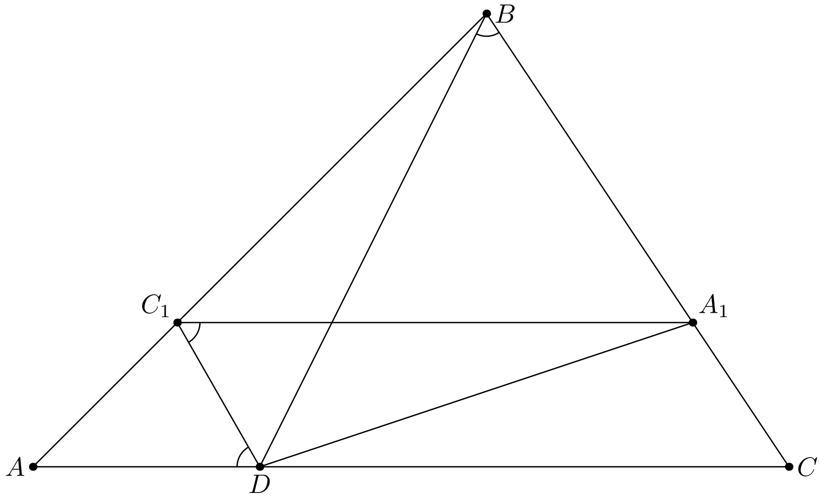


Рис.5

6. (Д.Швецов) (8–9) На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC отметили точку C_1 такую, что $BC = CC_1$.Затем на катете AB отметили точку C_2 такую, что $AC_2 = AC_1$; аналогично определяется точка A_2. Найдите угол AMC, где M — середина отрезка A_2C_2.

   Ответ. $135°$.

   Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Так как точка C_1 симметрична B относительно CI, а C_2 симметрична C_1 относительно AI, то $BI = IC_2$ и $\angle BIC_2 = 90°$. Аналогично $BI = IA_2$ и $\angle BIA_2 = 90°$ (рис.6). Следовательно, I — середина A_2C_2, а $\angle AIC = 135°$.

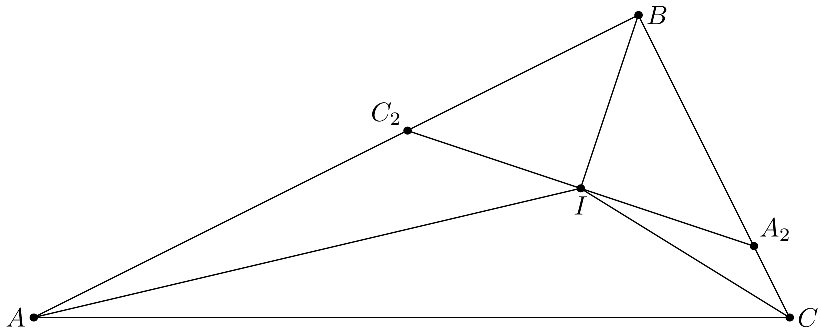


Рис.6

7. (Б.Френкин) (8–9) В неравнобедренном треугольнике ABC биссектрисы углов A и B обратно пропорциональны противолежащим сторонам. Найдите угол C.

   Ответ. $60°$.

   Решение. Пусть AA_1, BB_1 — биссектрисы треугольника, AA_2, BB_2 — его высоты. Из условия задачи следует, что $AA_1/AA_2 = BB_1/BB_2$ и, значит, $\angle A_1AA_2 = \angle B_1BB_2$. Но $\angle A_1AA_2 = |\angle B - \angle C|$, $\angle B_1BB_2 = |\angle A - \angle C|$. Так как треугольник неравнобедренный, равенство $\angle A - \angle C = \angle B - \angle C$ невозможно. Следовательно, $\angle C = (\angle A + \angle B)/2 = 60°$.

8. (Д.Швецов) (8–9) Пусть BM – медиана прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$). Окружность, вписанная в треугольник ABM, касается сторон AB, AM в точках A_1, A_2; аналогично определяются точки C_1, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2 и C_1C_2 пересекаются на биссектрисе угла ABC.

Решение. Так как треугольники ABM, CBM — равнобедренные, точки A_1, C_1 — середины соответствующих катетов. Кроме того, прямая A_1A_2 перпендикулярна биссектрисе угла A и, значит, является биссектрисой угла AA_1C_1 (рис.8). Аналогично, C_1C_2 — биссектриса угла CC_1A_1. Следовательно, точка их пересечения — центр вневписанной окружности треугольника A_1BC_1 — лежит на биссектрисе угла B.

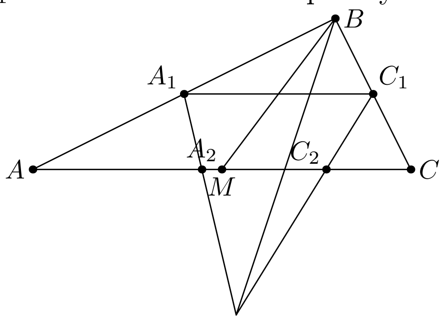


Рис.8

9. (А.Карлюченко) (8–9) Восстановите треугольник ABC по прямым l_b и l_c , содержащим биссектрисы углов B и C, и основанию биссектрисы угла A — точке L_1.

   Решение. Пусть I — точка пересечения l_b и l_c. Тогда IL_1 — биссектриса угла A. Поэтому нам известны углы между биссектрисами треугольника, а значит, и углы треугольника. Построим произвольный треугольник $A'B'C'$ с такими углами, найдем центр I' вписанной в него окружности, отложим на прямых l_b, l_c отрезки $IB'' = I'B'$, $IC'' = I'C'$ и проведем через L_1 прямую, параллельную $B''C''$. Эта прямая пересечет l_b, l_c в вершинах B, C искомого треугольника. После этого вершина A строится очевидным образом.

10. (Б.Френкин, А.Заславский) В выпуклом четырехугольнике все стороны и все углы попарно различны.

    а)(8–9) Может ли наибольший угол примыкать к наибольшей стороне, и при этом наименьший — к наименьшей?

    б)(9–11) Может ли наибольший угол не примыкать к наименьшей стороне, и при этом наименьший — к наибольшей?

    Ответ. а) Да. б) Нет.

    Решение. а) Рассмотрим треугольник ABC, в котором $AC > BC > AB$. Возьмем на отрезке AC такую точку P, что $AP = BC$, восставим из нее перпендикуляр к AC и возьмем на этом перпендикуляре точку D, лежащую вне треугольника и достаточно близкую к P. Тогда в четырехугольнике $ABCD$ AD — наибольшая сторона, CD — наименьшая, D — наибольший угол, C — наименьший (рис.10).

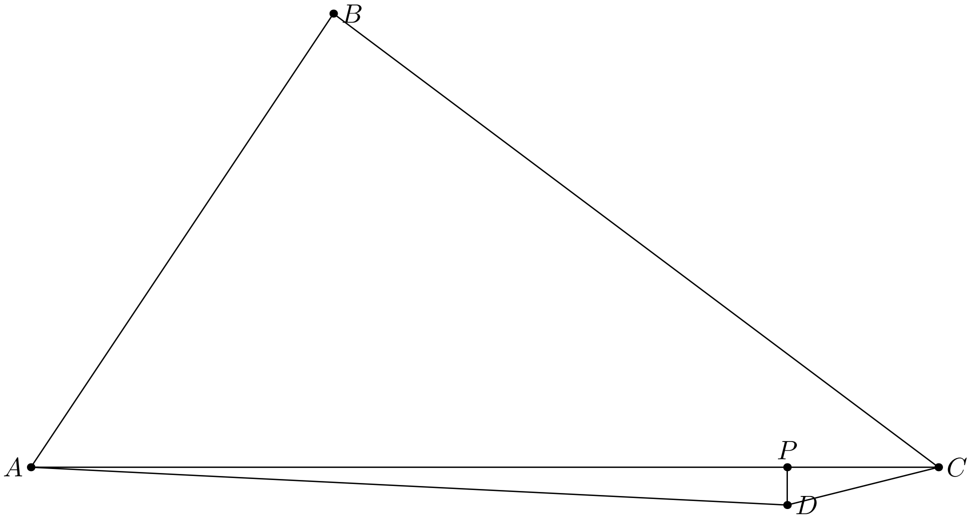


Рис.10

б) Предположим, что $ABCD$ — четырехугольник, удовлетворяющий условию. Без ограничения общности можно считать, что угол B наибольший, а сторона CD наименьшая. Тогда из равенства $AC^2 = AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B = AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos D$ следует, что AD — наибольшая сторона и, значит, C — наименьший угол. Так как $\angle C+\angle D<\pi$, лучи CB и DA пересекаются в некоторой точке P. Так как угол C острый и $\angle C+\angle A<\pi$, то $\sin A > \sin C$. Поскольку $PB/\sin A = AB/\sin P > CD/\sin P = PD/\sin C$, из этого следует, что $PB > PD$. Но $PB = PC - BC < PC - CD < PD$ — противоречие.

Критерии. Неполный перебор — до 3 баллов.

11. (Tran Q.H., Вьетнам) Дан треугольник ABC и точка P. Точки A', B', C' — проекции P на BC, CA, AB. Прямая, проходящая через P и параллельная AB, вторично пересекает описанную окружность треугольника $PA'B'$ в точке C_1. Точки A_1, B_1 определены аналогично. Докажите, что

а) (8-10) прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке;

б) (9–11) треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

Решение. Так как PC — диаметр описанной около треугольника $PA'B'$ окружности, угол PC_1C прямой, т.е. точка C_1 лежит на высоте треугольника ABC. Аналогично точки A_1, B_1 лежат на двух других высотах. Поэтому прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в ортоцентре H и утверждение а) доказано. Кроме того, точки A_1, B_1, C_1 лежат на окружности с диаметром PH, поскольку углы PA_1H, PB_1H, PC_1H прямые. Следовательно, угол между прямыми A_1C_1 и B_1C_1 равен углу между прямыми HA_1 и HB_1, который как угол между высотами треугольника ABC равен углу между его сторонами AC и BC. Таким образом, углы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны, т.е. эти треугольники подобны.

12. (Медет Жанбулатулы, Казахстан) (9–10) Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, проходящая через O и параллельная BC, пересекает AB и AC в точках P и Q соответственно. Известно, что сумма расстояний от точки O до сторон AB и AC равна OA. Докажите, что сумма отрезков PB и QC равна PQ.

Решение. Из равенства $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + r/R$ следует, что в остроугольном треугольнике сумма расстояний от O до сторон равна сумме радиусов описанной и вписанной окружностей. Поэтому из условия задачи следует, что прямая PQ проходит через центр I вписанной окружности. Тогда $\angle PIB = \angle IBA = \angle IBP$ и $PB = IP$. Аналогично $QC = IQ$.

13. (А.Заславский) (9–10) Даны точки A, B. Найдите геометрическое место таких точек C, что C, середины отрезков AC, BC и точка пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной окружности.

    Ответ. Окружность с центром в середине AB и радиусом, равным $AB\sqrt{3}/2$ без точек пересечения с прямой AB.

    Решение. Пусть медианы AA_0 и BB_0 треугольника пересекаются в точке M. Из условия задачи следует, что $AM \cdot AA_0 = AB_0 \cdot AC$, т.е. $AA_0^2 = \frac{3}{4}AC^2$. Аналогично, $BB_0^2 = \frac{3}{4}BC^2$. Поскольку в любом треугольнике отношение суммы квадратов медиан к сумме квадратов сторон равно $3/4$, из этих равенств следует, что медиана из вершины C равна $AB\sqrt{3}/2$. Нетрудно видеть, что любая точка окружности, кроме точек пересечения с прямой AB, входит в искомое ГМТ.

    Критерии. Предложенное доказательство работает только в одну сторону — 3 балла

14. (М.Волчкевич) (9–10) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AC \cap BD = O$ и M — середина BC. Пусть $MO \cap AD = E$. Докажите, что $\frac{AE}{ED} = \frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle CDO}}$.

    Решение. Пусть P — точка пересечения AB и MO. Применяя теорему Менелая к треугольникам ABC и ABD, получаем $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BO}{OD} \cdot \frac{DE}{AE} = \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CO}{OA} = 1$. Следовательно, $\frac{AE}{ED} = \frac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD} = \frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle CDO}}$.

15. (А.Заславский) (9–11) Дан треугольник ABC. Рассматриваются прямые l, обладающие следующим свойством: три прямые, симметричные l относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке. Докажите, что все такие прямые проходят через одну точку.

    Решение. Пусть прямые, симметричные l, пересекаются в точке P. Тогда точки, симметричные P, лежат на l, а, значит, проекции P на стороны треугольника лежат на одной прямой. Следовательно, по теореме Симсона P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Кроме того, так как прямая Симсона точки P делит пополам отрезок между P и ортоцентром H треугольника ABC, то l проходит через H.

16. (Ф.Ивлев) (9–11) Дан прямоугольный треугольник ABC, где AB — гипотенуза. Пусть M — середина AB, O — центр описанной окружности ω треугольника CMB. Прямая AC вторично пересекает окружность ω в точке K. Отрезок KO пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке L. Докажите, что отрезки AL и KM пересекаются на описанной окружности треугольника ACM.

    Первое решение. Так как четырехугольник $BMKC$ вписанный, то $\angle BMK = 90°$ и O лежит на BK. Поэтому $\angle ABL = \angle MBK = \angle MCK = \angle A$. Значит, $\angle MAL = \angle B$, а угол между прямыми AL и KM равен углу A, т.е. углу ACM (рис.16).

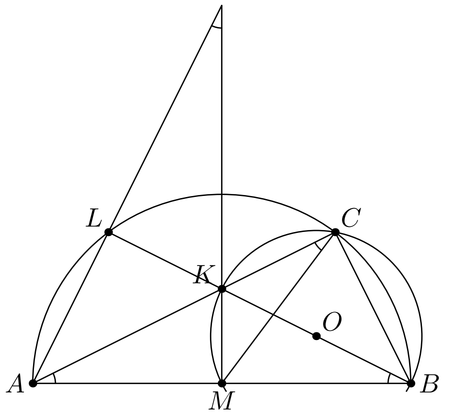


Рис.16

Второе решение. Так как угол KCB прямой, то O лежит на KB. Так как AB диаметр описанной около треугольника ABC окружности, то угол ALB также прямой. Угол KMB прямой, поскольку KCB прямой. А тогда K — точка пересечения высот треугольника из точек A, B и точки пересечения AL с MK. Значит два прямых угла с вершинами C и M опираются на один и тот же диаметр и все доказано.

17. (М.Рожкова, Украина) (9–11) Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Точка M лежит на дуге BC, прямая AM пересекает BD в точке P, прямая DM пересекает AC в точке Q. Докажите, что площадь четырёхугольника $APQD$ равна половине площади квадрата.

    Решение. Так как $\angle AMD = 45^\circ = \angle OAD = \angle ODA$, то $\angle AQD = \angle AMD + \angle MAQ = \angle PAD$. Аналогично, $\angle APD = \angle ADQ$ (рис.17). Следовательно, треугольники APD и QDA подобны, т.е. $AQ \cdot PD = AD^2$, что равносильно утверждению задачи.

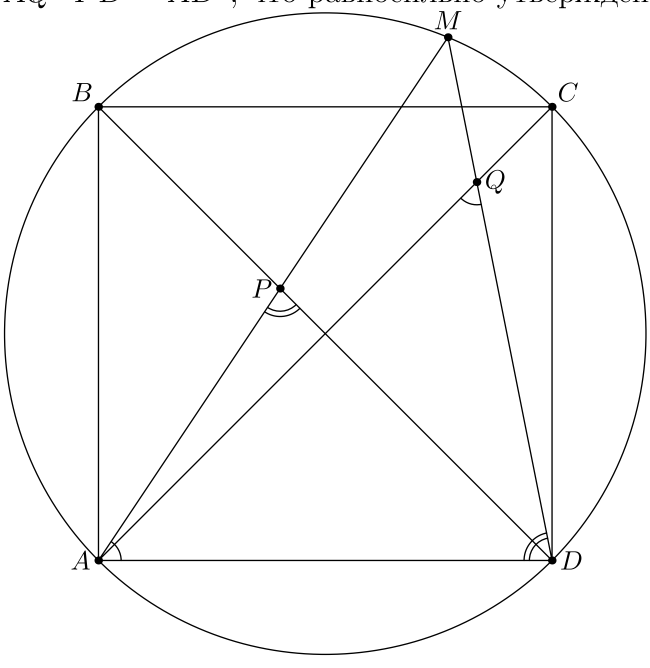


Рис.17

18. (Б.Френкин) (9–11) На плоскости начерчен треугольник и в нём отмечены две точки. Известно, что какой-то из углов равен 58°, какой-то из остальных 59°, какая-то из отмеченных точек является центром вписанной окружности, а другая — центром описанной. Используя только линейку без делений, определите, где какой угол и где какая точка.

Решение. Проведём прямую через отмеченные точки. Она пересечёт две стороны треугольника (скажем, AB и AC) и продолжение третьей (скажем, за вершиной C). Тогда AB — наибольшая сторона треугольника, BC — наименьшая и центром вписанной окружности является та из отмеченных точек, которая ближе к BC.

Докажем сделанные утверждения. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника, O — центр описанной. Соединим их с вершинами треугольника и вычислим углы. Получим, что O лежит в треугольнике, образованном наибольшей стороной и I, а I лежит в треугольнике, образованном наименьшей стороной и O. Значит, прямая OI пересекает наибольшую и наименьшую стороны треугольника и, следовательно, пересекает продолжение средней стороны. При этом O лежит ближе к наибольшей стороне, а I — к наименьшей.

Остаётся узнать, с какой стороны OI пересекает продолжение средней стороны AC. Для этого надо сравнить длину перпендикуляров из O и I на прямую AC. Если r и R — радиусы вписанной и описанной окружности, то перпендикуляр из I равен r, а перпендикуляр из O равен $R\cos\ 59^\circ > R/2 > r$, откуда следует ответ.

Критерии. Правильное решение, опирающееся на недоказанные тригонометрические неравенства — 3 балла.

19. (А.Заславский) (10–11) Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках X, Y, расстояние между которыми тоже равно 1. Из точки C одной окружности проведены к другой касательные CA, CB, вторично пересекающие первую окружность в точках B', A'. Прямые AA' и BB' пересекаются в точке Z. Найдите угол XZY.

Ответ. 150°.

Решение. Из условия следует, что расстояние между центрами окружностей равно $\sqrt{3}$, значит, по формуле Эйлера эти окружности для треугольника $A'B'C$ являются описанной и вневписанной, т.е. $A'B'$ касается второй окружности в точке C', лежащей на прямой CZ (рис.19).

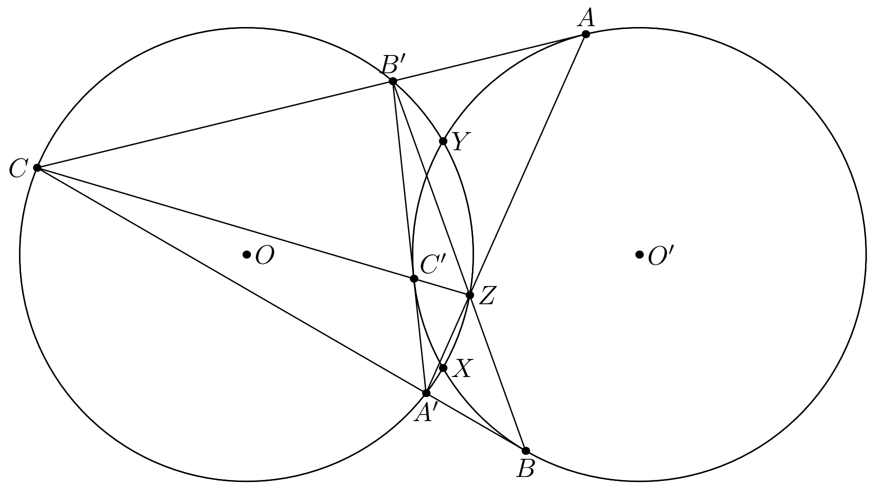


Рис.19

Пусть O, O' — центры окружностей. Тогда $\angle A'O'A = \angle AO'C' + \frac{1}{2}\angle C'O'B = 2\angle ABC' + \angle C'AB = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B'$, $\angle O'A'O = \angle O'A'B' + \angle B'A'O = \frac{\pi}{2} - \angle C'O'A' + \frac{\pi}{2} - \angle BCA = \pi - \angle BCA - \frac{1}{2}\angle CA'B' = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B'$, и, так как $O'A = OA'$, то $AO'A'O$ — равнобедренная трапеция. Поэтому $\angle O'AA' = \angle A'OO'$ и, аналогично, $\angle O'BB' = \angle B'OO'$.

Следовательно, $\angle A'ZB' = 2\pi - \angle AO'B - \angle A'OB' = \pi - \angle C$, т.е. точка Z лежит на описанной окружности треугольника и $\angle XZY = 150^\circ$.

Примечание. Доказать, что Z лежит на окружности, можно и по-другому. При изогональном сопряжении относительно треугольника $A'B'C$ Z перейдет в центр гомотетии окружностей, который в силу равенства их радиусов является бесконечно удаленным.

Критерии. Без доказательства утверждается, что Z лежит на окружности — 2 балла.

20. (Г.Фельдман) (10–11) В треугольнике ABC на стороне AB отметили точку D. Пусть ω_1 и Ω_1, ω_2 и Ω_2 — соответственно вписанные и вневписанные (касающиеся AB во внутренней точке) окружности треугольников ACD и BCD. Докажите, что общие внешние касательные к ω_1 и ω_2, Ω_1 и Ω_2 пересекаются на прямой AB.

Первое решение. Пусть I_1, J_1, I_2, J_2 — центры ω_1, Ω_1, ω_2, Ω_2, а K_1, K_2 — точки пересечения прямых I_1J_1, I_2J_2 с AB (рис.20). Тогда $I_1K_1/I_1C = J_1K_1/J_1C$, $I_2K_2/I_2C = J_2K_2/J_2C$ и, дважды применив к треугольнику CK_1K_2 теорему Менелая, получим, что прямые I_1I_2 и J_1J_2 пересекают AB в одной и той же точке. Через эту точку проходят и общие внешние касательные.

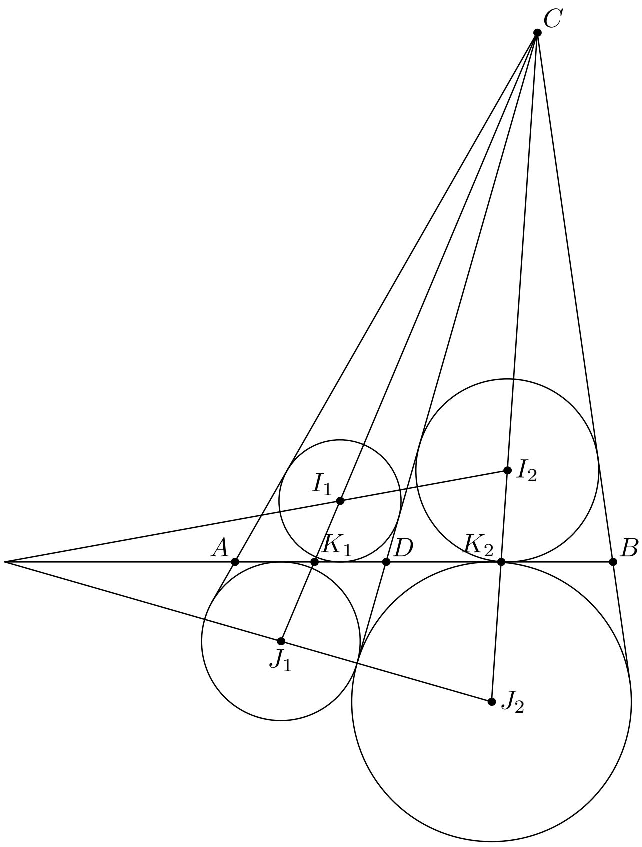


Рис.20

Второе решение. Возьмем пересечение общих внешних касательных к окружностям ω_1 и Ω_2 — точку P. Тогда, применяя теорему о трех колпаках для троек окружностей ω_1, Ω_1, Ω_2 и ω_1, ω_2, Ω_2, получаем, что точки пересечения общих внешних касательных сначала к окружностям Ω_1 и Ω_2, а потом к ω_1 и ω_2 являются точкой пересечения прямой PC с прямой AB, т.е. совпадают и лежат на AB.

21. (Н.Белухов, Э.Колев, Болгария) (10–11) Через ортоцентр остроугольного треугольника проведены две перпендикулярные прямые. Стороны треугольника высекают на каждой

из этих прямых два отрезка: один, лежащий внутри треугольника, второй — вне его. Докажите, что произведение двух внутренних отрезков равно произведению двух внешних.

Решение. Пусть одна из прямых пересекает BC, CA, AB в точках X_a, X_b, X_c, а другая — в точках Y_a, Y_b, Y_c (рис.21). Тогда $\angle HY_aB = \angle X_bHA$ и $\angle HX_bA = \angle Y_aHB$, так как стороны этих углов перпендикулярны. Поэтому треугольники HBY_a и X_bAH подобны. Аналогично, подобны треугольники HX_aB и Y_bAH. Значит, $AX_b \cdot BY_a = AH \cdot BH = AY_b \cdot BX_a$. С другой стороны, применив теорему Менелая к треугольникам CX_aX_b, CY_aY_b и прямой AB, получим $\frac{CA}{AX_b} \cdot \frac{X_bX_c}{X_cX_a} \cdot \frac{X_aB}{BC} = \frac{CA}{AY_b} \cdot \frac{Y_bY_c}{Y_cY_a} \cdot \frac{Y_aB}{BC} = 1$. Из этих трех равенств следует утверждение задачи.

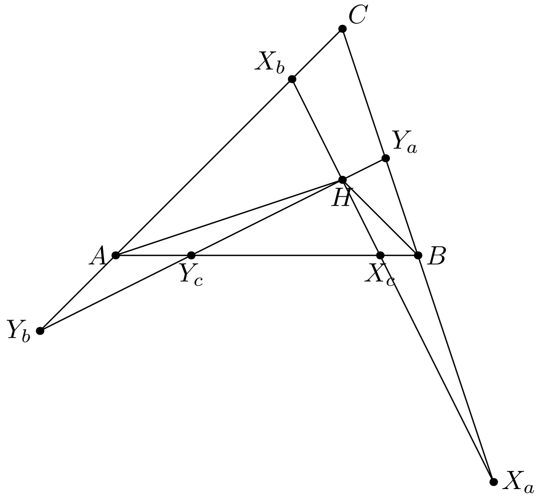


Рис.21

22. (Ф.Нилов) (10–11) В сегмент, ограниченный хордой и дугой AB окружности, вписана окружность ω с центром I. Обозначим середину указанной дуги AB через M, а середину дополнительной дуги через N. Из точки N проведены две прямые, касающиеся ω в точках C и D. Противоположные стороны AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке X, диагонали $ABCD$ пересекаются в точке Y. Докажите, что точки X, Y, I и M лежат на одной прямой.

Решение. Пусть K, L — точки касания ω с AB и большой окружностью. Так как L — центр гомотетии окружности, а касательные к ним в точках K и N параллельны, точки L, K, N лежат на одной прямой. При этом $\angle KAN = \angle NLA$, так как эти углы опираются на равные дуги. Значит, треугольники KAN и ALN подобны и $AN^2 = NK \cdot NL = NC^2$, т.е. четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром N (рис.22). Относительно этой окружности прямая XY является полярой точки пересечения AB и CD. При этом, поскольку $\angle NAM = \angle NBM = \angle NCI = \angle NDI = 90°$, точки M и I являются полюсами прямых AB и CD и, следовательно, лежат на XY.

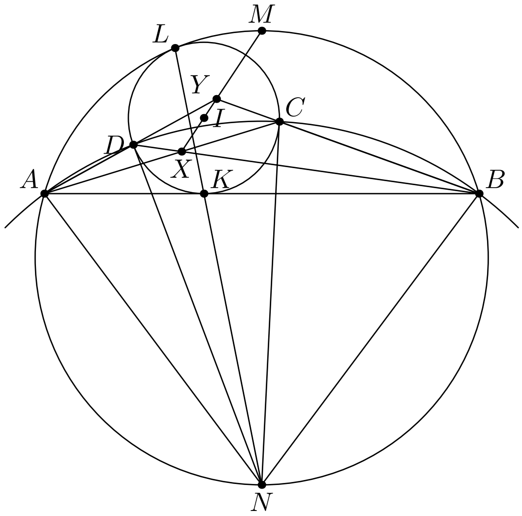


Рис.22

23. (А.Канель) (10–11) На каждой из двенадцати диагоналей граней куба выбирается произвольная точка. Определяется центр тяжести этих двенадцати точек. Найдите геометрическое место всех таких центров тяжести.

Решение. Прежде всего заметим, что множеством середин отрезков, концы которых лежат на двух диагоналях квадрата, будет квадрат с вершинами в серединах сторон исходного. Поэтому множеством центров тяжести четырех точек, лежащих на диагоналях двух противоположных граней куба, будет квадрат с вершинами в центрах четырех остальных граней. Таким образом, задача равносильна определению ГМТ — центров тяжести трех точек, каждая из которых выбирается в одном из трех таких квадратов. Очевидно, что все такие центры тяжести лежат в октаэдре, образованном центрами граней куба. Кроме того, если одна из точек лежит в центральной плоскости этого октаэдра, а две другие удалены от этой плоскости на расстояние, не превышающее половины ребра куба, то расстояние от центра тяжести до плоскости не может быть больше трети ребра. Значит, все центры тяжести лежат в многограннике, полученном в результате отсечения от октаэдра шести четырехугольных пирамидок с ребрами, равными одной трети ребра октаэдра. С другой стороны, все вершины этого многогранника, а, значит и все его внутренние точки принадлежат искомому ГМТ.

24. (В.А.Ясинский, Украина) (10–11) На плоскости даны n ($n > 2$) точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколькими различными способами это множество точек можно разбить на два непустых подмножества так, чтобы выпуклые оболочки этих подмножеств не пересекались?

Ответ. $n(n-1)/2$.

Решение. Так как выпуклые оболочки двух подмножеств не пересекаются, они лежат по разные стороны от некоторой прямой. Таким образом требуется узнать, сколькими способами данное множество точек можно разделить прямой на два подмножества. Возьмем в плоскости точку O, не лежащую ни на одной из прямых, соединяющих данные точки, и рассмотрим полярное соответствие с центром O. Данным точкам будут соответствовать n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. По индукции легко доказать, что эти прямые делят плоскость на $n(n+1)/2+1$ частей, из которых $2n$ неограниченных.

Лемма. Пусть поляры a, b точек A, B делят плоскость на 4 угла. Тогда полюса прямых, пересекающих отрезок AB, лежат в двух вертикальных углах, а полюса прямых, не пересекающих отрезок AB, — в двух других углах.

Действительно, пусть прямая l пересекает прямую AB в точке X. Тогда поляра X проходит через точку пересечения a и b. Если вращать l вокруг X, то ее полюс будет двигаться по этой прямой, т.е. внутри пары вертикальных углов, образованных a и b. При движении точки X по AB ее поляра вращается вокруг точки пересечения a и b, переходя из одной пары вертикальных углов в другую в моменты прохождения X точки A или B. Лемма доказана.

Вернемся к задаче. Из леммы следует, что две прямые разбивают данное множество точек одинаковым образом тогда и только тогда, когда их полюсы либо лежат в одной из частей, на которые плоскость разбивается полярами данных точек, либо лежат по разные стороны от всех n прямых. Но второй случай возможен тогда и только тогда, когда обе точки лежат в неограниченных областях. Действительно, если точки P, Q лежат по разные стороны от всех прямых, то каждая из этих прямых пересекает отрезок PQ. Значит, каждый из продолжающих этот отрезок лучей целиком лежит в одной части. Обратно, если точка P лежит в неограниченной части, то возьмем луч с началом в ней, целиком лежащий в этой части и не параллельный ни одной из n прямых. Точки противоположного луча, лежащие дальше от P, чем все точки пересечения с прямыми, лежат по разные стороны с P от этих прямых.

Таким образом, $2n$ неограниченных областей разбиваются на пары, каждой из которых соответствует один способ разбиения данного множества точек, а каждой из остальных областей соответствует свой способ разбиения. Всего получаем $n(n-1)/2+1$ способов, при одном из которых все n точек попадают в одно подмножество.

Критерии. Решение по индукции с недостаточно обоснованным переходом — 5-6 баллов.

IX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (Н.Москвитин) (8) В треугольнике ABC $AB = BC$. Из точки E на стороне AB опущен перпендикуляр ED на BC. Оказалось, что $AE = DE$. Найдите угол DAC.

   Ответ. $45°$.

   Решение. По теореме о внешнем угле $\angle AED = 90° + \angle B = 270° - 2\angle A$ (рис.1). Следовательно, $\angle EAD = (180° - \angle AED)/2 = \angle A - 45°$.

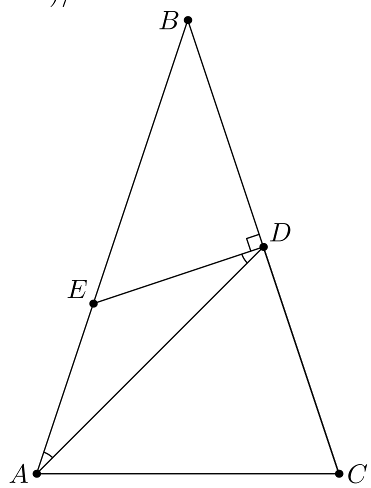


Рис.1

2. (Л.Штейнгарц, Израиль) (8) В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) угол при вершине C равен $20°$. Биссектрисы углов A и B пересекают боковые стороны треугольника соответственно в точках A_1 и B_1. Докажите, что треугольник A_1OB_1 (где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC) является равносторонним.

   Решение. Возьмем на сторонах BC и AC точки A' и B' так, что $AB' = B'O = OA' = A'B$. Очевидно, что $A'B' \parallel AB$, т.е. $\angle CA'B' = \angle CBA = 80°$. Кроме того, $\angle A'OB = \angle A'BO = \angle BCO = 10°$. Значит, $\angle CA'O = 20°$, а $\angle OA'B' = 60°$, т.е. треугольник $OA'B'$ — равносторонний. Тогда $A'B' = A'B$ и $\angle A'BB' = \angle A'B'B = \angle ABB'$ (рис.2). Следовательно, точка B' совпадает с B_1. Аналогично, A' совпадает с A_1, ч.т.д.

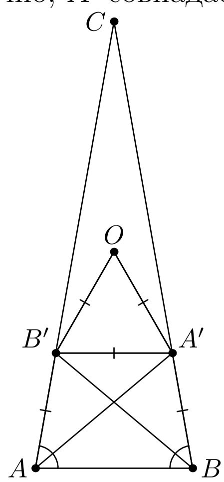


Рис.2

3. (Д.Швецов) (8) Вневписанная окружность, соответствующая вершине A прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$), касается продолжений сторон AB, AC в точках A_1,

A_2 соответственно; аналогично определим точки C_1, C_2. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A, B, C на прямые C_1C_2, A_1C_1, A_1A_2, пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, D — четвертая вершина прямоугольника $ABCD$. Так как $AI \perp A_1A_2$, $CI \perp C_1C_2$, то перпендикуляры из A на CC_1 и из C на AA_1 пересекаются в центре J окружности, вписанной в треугольник ACD. Поэтому достаточно доказать, что $DI \perp A_1C_1$. Пусть X, Y, Z — проекции I на AB, BC, CD соответственно. Тогда $BC_1 = XC_2 = ZD$ и $A_1B = CY = IZ$, значит, треугольники A_1BC_1 и IZD равны, т.е. $\angle IDZ = \angle A_1C_1B$ (рис.3), откуда и следует искомая перпендикулярность.

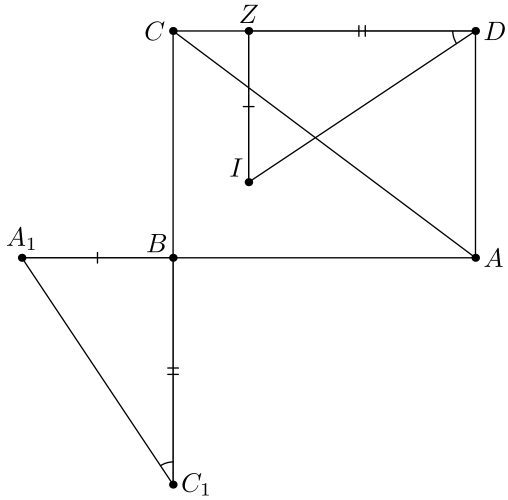


Рис.3

4. (Ф.Ивлев) (8) Дан неравнобедренный треугольник ABC. Точка O — центр описанной около него окружности, а точка K — центр окружности w, описанной около треугольника BCO. Высота треугольника, проведенная из точки A, пересекает окружность w в точке P. Прямая PK пересекает описанную окружность треугольника в точках E и F. Докажите, что один из отрезков EP и FP равен отрезку PA.

Решение. Так как точки O, K лежат на серединном перпендикуляре к BC, то $OK \parallel AP$. Поэтому $\angle OPK = \angle POK = \angle OPA$. Значит, точка A', симметричная A относительно OP, лежит на прямой PK. При этом $OA' = OA$, т.е. A' лежит на описанной окружности треугольника ABC (рис.4) и, следовательно, совпадает с одной из точек E, F.

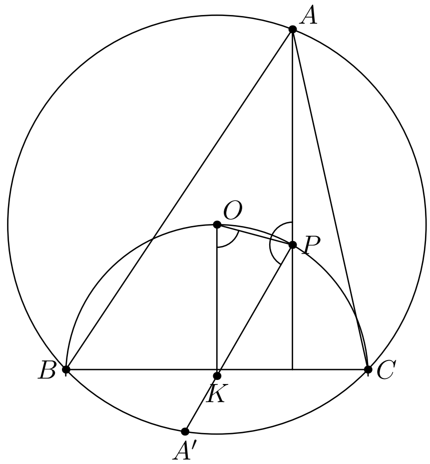


Рис.4

5. (Б.Френкин) (8) Точка внутри выпуклого четырехугольника соединена с вершинами. Получились четыре равных треугольника. Верно ли, что четырехугольник — ромб?

   Ответ. Да.

   Решение. Пусть $ABCD$ и O — четырехугольник и точка из условия. В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы. Так как $\triangle ABO = \triangle CBO$, то углы BAO и BCO равны, как лежащие против BO. Аналогично $\angle DAO = \angle DCO$, откуда $\angle BAD = \angle BCD$. Точно так же равны и два других противоположных угла четырехугольника, поэтому сумма любых двух соседних углов равна π, т.е. $ABCD$ — параллелограмм.

   При точке O найдутся два соседних угла, сумма которых не меньше π, скажем $\angle AOB$ и $\angle COB$. Второй из них равен одному из углов треугольника AOB. Это может быть только $\angle AOB$, так как его сумма с любым другим углом треугольника AOB меньше π. В равных треугольниках AOB и COB против равных углов лежат равные стороны, поэтому $AB = BC$ и, значит, $ABCD$ — ромб.

6. (Д.Швецов) (8–9) Диагонали AC, BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P. Описанные окружности треугольников ABP, CDP пересекают прямую AD в точках X, Y. Точка M — середина XY. Докажите, что $BM = CM$.

   Решение. Из условия следует, что $\angle BXA = \angle BPA = \angle CPD = \angle CYD$ (рис.6). Значит, трапеция $BXYC$ равнобокая, что равносильно утверждению задачи.

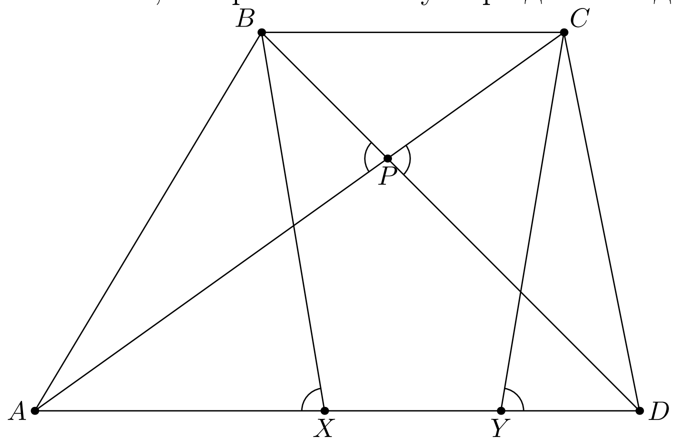


Рис.6

7. (Д.Швецов) (8–9) Пусть BD — биссектриса треугольника ABC. Точки I_a, I_c — центры вписанных окружностей треугольников ABD, CBD. Прямая I_aI_c пересекает прямую AC в точке Q. Докажите, что $\angle DBQ = 90^\circ$.

   Решение. Прямые AI_a и CI_c пересекаются в центре I вписанной окружности треугольника ABC. При этом $AI_a/I_aI = AD/ID$, $CI_c/I_cI = CD/ID$. По теореме Менелая получаем, что $QA/QC = AD/CD = AB/BC$. Следовательно, BQ — внешняя биссектриса угла B, ч.т.д.

8. (М.Плотников, Украина) (8–9) Вокруг треугольника ABC описана окружность. Пусть X — точка внутри окружности, K и L — точки пересечения окружности и прямых BX и CX соответственно. Прямая LK пересекает BA в точке E, а прямую AC в точке F. Найдите геометрическое место таких точек X, что окружности, описанные около треугольников AFK и AEL, касаются.

Ответ. Дуга окружности, проходящей через B, C и центр O описанной окружности треугольника ABC.

Решение. Пусть окружности касаются. Тогда углы, образованные их общей касательной с прямыми AC и AB, равны соответственно углам ALE и AKF, которые в свою очередь равны углам ABX и ACX. Поскольку сумма этих углов равна углу A треугольника, то $\angle BXC = 2\angle A = \angle BOC$. Аналогично получаем, что любая точка дуги удовлетворяет условию.

9. (М.Плотников) (8–9) Пусть T_1, T_2 — точки касания вневписанных окружностей треугольника ABC со сторонами BC и AC соответственно. Оказалось, что точка, симметричная центру вписанной окружности треугольника относительно середины AB, лежит на окружности, описанной около треугольника CT_1T_2. Найдите угол BCA.

   Ответ. $90°$.

   Решение. Пусть D — четвертая вершина параллелограмма $ACBD$, J — центр вписанной окружности треугольника ABD, S_1, S_2 — точки касания этой окружности с AD и BD. Тогда $S_1T_1 \parallel AC$, $S_2T_2 \parallel BC$ и $\angle T_1JT_2 = \angle S_1JS_2 = \pi - \angle C$. Кроме того, $DS_1 = DS_2$, а значит, прямые S_1T_1, S_2T_2 и DJ пересекаются в одной точке. Следовательно, J совпадает с точкой пересечения прямых S_1T_1 и S_2T_2, т.е. $\angle C = 90°$ (рис.9).

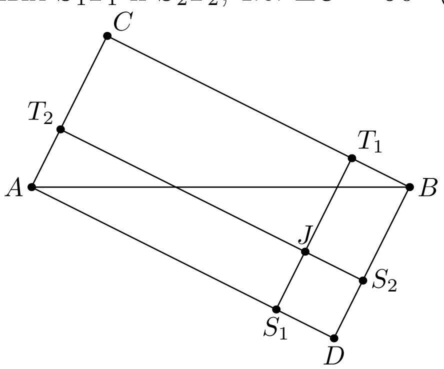


Рис.9

10. (Д.Швецов) (8–9) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке C'. Окружность, вписанная в треугольник ACC', касается сторон AB и AC в точках C_1, B_1; окружность, вписанная в треугольник BCC', касается сторон AB и BC в точках C_2, A_2. Докажите, что прямые B_1C_1, A_2C_2 и CC' пересекаются в одной точке.

    Решение. Поскольку $AC' - BC' = AC - BC$, вписанные окружности треугольников ACC' и BCC' касаются стороны CC' в одной и той же точке. Поэтому $CB_1 = CA_2$. Кроме того, $AB_1 = AC_1$, $BA_2 = BC_2$, и, вычислив углы четырехугольника $A_2B_1C_1C_2$, получаем, что он вписанный. Следовательно, прямые B_1C_1, A_2C_2 и CC' пересекаются в радикальном центре трех окружностей: описанной окружности четырехугольника $A_2B_1C_1C_2$ и вписанных окружностей треугольников ACC', BCC' (рис.10).

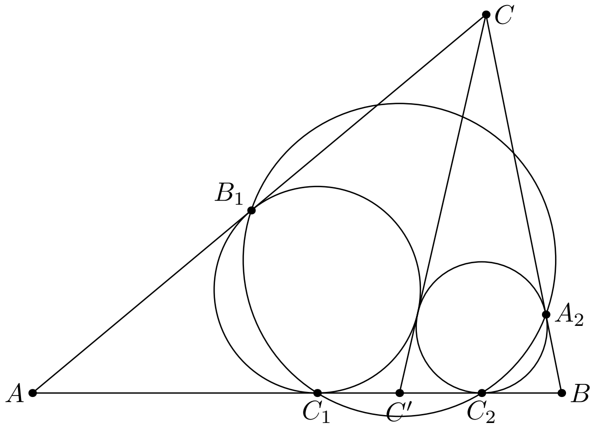


Рис.10

11. (П.Кожевников) (8–9) а) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r_4$ — взятые в порядке возрастания радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA, DAB. Может ли оказаться, что $r_4 > 2r_3$?

    б)В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E. Пусть $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r_4$ — взятые в порядке возрастания радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABE, BCE, CDE, DAE. Может ли оказаться, что $r_2 > 2r_1$?

    Ответ. а) Нет. б) Нет.

    Решение. а) Пусть для определенности $r_4 = r(ABC)$. Достаточно показать, что $r(ABC)/2 < \max\{r(ABD), r(CBD)\}$. Середина K диагонали AC лежит в одном из треугольников ABD, CBD, скажем, в треугольнике ABD. Тогда треугольник AKL, где L — середина AB, целиком содержится в треугольнике ABD, поэтому $r(ABC)/2 = r(AKL) < r(ABD)$.

    б) Пусть $r = r_1$ — радиус окружности, вписанной в треугольник ABE. Так как диаметры окружностей, вписанных в треугольники BCE, ADE, меньше высот этих треугольников, совпадающих с высотами h_a, h_b треугольника ABE, достаточно доказать, что одна из этих высот не превосходит $4r$. Пусть $AE \geq BE$. Тогда полупериметр треугольника $p < AE + BE \leq 2AE$ и $h_b = 2S/AE = 2pr/AE < 4r$.

    Примечание. Отметим, что в обоих пунктах ответ изменится на положительный, если константу 2 заменить на меньшую

12. (Б.Френкин) (8–11) На каждой стороне треугольника ABC отмечены две различные точки. Известно, что это основания высот и биссектрис.

    (а) Пользуясь только линейкой без делений, определите, где высоты, а где биссектрисы.

    (б) Решите пункт (а), проведя только три прямых.

    Решение. Предварительные замечания. Поскольку все основания высот и биссектрис по условию различны, треугольник неравнобедренный. На любой стороне треугольника основание высоты лежит ближе к меньшей из прилежащих сторон, чем основание биссектрисы, и поэтому достаточно определить, какая сторона треугольника наибольшая, наименьшая и средняя. Основания биссектрисы и высоты, проведённых из некоторой вершины X, будем обозначать L_X и H_X соответственно.

    Лемма. Если $|AC| > |BC|$, то прямые L_BL_A и H_BH_A пересекают продолжение стороны AB за вершину B.

Доказательство леммы. Пусть L_BD — перпендикуляр из L_B на AB, а CH — высота. Поскольку биссектриса делит сторону пропорционально прилежащим, выполнено равенство $|L_BD| : |CH| = |AB| : (|BC| + |AB|)$. Аналогично, если L_AE — перпендикуляр из L_A на AB, то $|L_AE| : |CH| = |AB| : (|AC| + |AB|)$. Так как $|AC| > |BC|$, то $|L_BD > |L_AE|$, поэтому L_BL_A пересекает AB за вершиной B, что и требовалось.

Точки H_B, H_A лежат на полуокружности с диаметром AB. Если бы углы H_AAB и H_BBA были равны, то перпендикуляры из H_A и H_B на AB также были бы равны. Но первый из углов меньше, поэтому и соответствующий перпендикуляр меньше. Лемма доказана.

Простейшее решение п. (а). Соединим отмеченные точки с противолежащими вершинами. Получим два семейства конкурентных прямых. На двух сторонах треугольника возьмём точки, принадлежащие одному и тому же семейству, и проведём через них прямую. Согласно лемме она пересекает продолжение третьей стороны за меньшей из двух выбранных сторон — независимо от того, какому семейству соответствуют выбранные точки. Отсюда определяется, какая сторона треугольника меньше какой, что и требуется.

Решение п. (б). Для каждой вершины треугольника выберем на прилежащих сторонах ближайшие отмеченные точки и соединим их прямой. Как показано ниже, *эти прямые пересекут продолжение наибольшей стороны треугольника за вершину среднего угла и продолжения остальных двух сторон за вершину наибольшего угла.* Отсюда определяется, какая сторона треугольника меньше какой, что и требуется.

Докажем утверждение, выделенное курсивом. Пусть $|AB| > |AC| > |BC|$. Отмеченные точки, ближайшие (по сторонам) к вершине наименьшего угла, — основания биссектрис, а ближайшие к вершине наибольшего угла — основания высот. Согласно лемме, соединяющие их прямые пересекают соответственно продолжение BC за C и продолжение AB за B. Отмеченные точки, ближайшие по сторонам к вершине среднего угла B, — это H_C и L_A. Согласно лемме, прямая L_CL_A пересекает продолжение AC за C в некоторой точке P. Луч H_CL_A направлен внутрь треугольника H_CCP и потому пересекает CP, что и требуется.

13. (Ф.Ивлев) (9–10) Пусть A_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AB соответственно, а A' и C' — точки касания вневписанной окружности треугольника, вписанной в угол B, с продолжениями сторон BC и AB соответственно. Докажите, что ортоцентр H треугольника ABC лежит на A_1C_1 тогда и только тогда, когда прямые $A'C_1$ и BA перпендикулярны.

    Решение. Пусть $A'C_1 \perp BA$. Тогда по теореме Фалеса высота, проведенная из C, делит отрезок A_1C_1 в отношении $A_1C : CA' = p - c : p - a$. Через ту же точку проходит и высота из A. Обратное утверждение доказывается аналогично.

14. (Д.Швецов) (9–11) Точки M, N — середины диагоналей AC, BD прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = \angle D = 90°$). Описанные окружности треугольников ABN, CDM пересекают прямую BC в точках Q, R. Докажите, что точки Q, R равноудалены от середины отрезка MN.

    Решение. Пусть X, Y — проекции N и M на BC. Тогда утверждение задачи равносильно равенству $RY = XQ$. Так как $\angle NQX = \angle NAB = \angle DBA$, треугольники XQN и ABD подобны (рис.14). Значит, $XQ = AB{\cdot}NX/AD$. Но $NX = CD \sin \angle BCD/2 = CD{\cdot}AD/2BC$, следовательно, $XQ = AB \cdot CD/2BC = RY$.

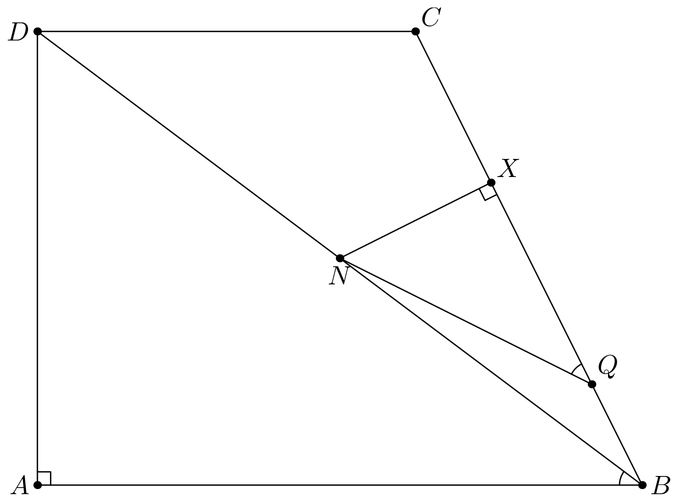


Рис.14

15. (9–11) а) (В.Расторгуев) В треугольник ABC вписаны треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ так, что $C_1A_1 \perp BC$, $A_1B_1 \perp CA$, $B_1C_1 \perp AB$, $B_2A_2 \perp BC$, $C_2B_2 \perp CA$, $A_2C_2 \perp AB$. Докажите, что эти треугольники равны.

б) (П.Кожевников) Внутри треугольника ABC взяли точки $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ так, что A_1 - на отрезке AB_1, B_1 - на отрезке BC_1, C_1 - на отрезке CA_1, A_2 - на отрезке AC_2, B_2 - на отрезке BA_2, C_2 - на отрезке CB_2 и углы $BAA_1, CBB_1, ACC_1, CAA_2, ABB_2, BCC_2$ равны. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

Решение. а) Опишем вокруг треугольника $A_2B_2C_2$ треугольник $A'B'C'$ так, что $C_2A_2 \perp B'C'$, $A_2B_2 \perp C'A'$, $B_2C_2 \perp A'B'$. Очевидно, что соответствующие стороны треугольников ABC и $B'C'A'$ симметричны относительно центра описанной окружности треугольника $A_2B_2C_2$. При этой симметрии треугольник $A_2B_2C_2$ переходит в треугольник $B_1C_1A_1$. Следовательно, эти треугольники равны и имеют общий центр описанной окружности.

б) В описанной окружности треугольника ABC рассмотрим хорды AA', BB', CC', AA'', BB'', CC'', лежащие соответственно на прямых A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, A_2C_2, B_2A_2, C_2B_2. Из условия задачи следует равенство дуг AC', BA', CB', AB'', CA'', BC''. Пусть каждая из этих дуг равна φ. Тогда при повороте вокруг центра описанной окружности хорды AA', BB', CC' переходят соответственно в BB'', CC'', AA'', значит, этот поворот совмещает треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ (рис.15).

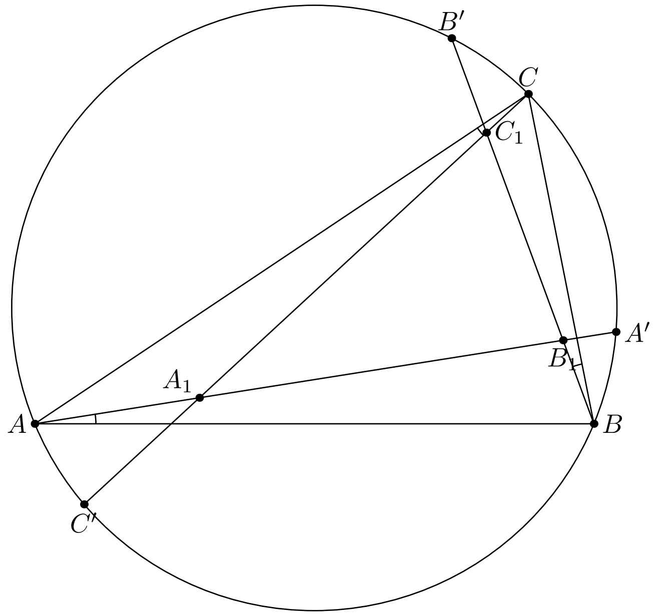


Рис.15

Примечание. Как частный случай этой задачи получаем, что, если треугольник $A_1B_1C_1$ вырождается в точку, то треугольник $A_2B_2C_2$ также вырождается в точку, причем обе точки равноудалены от центра описанной окружности. Эти точки называются *точками Брокара* треугольника.

16. (Ф.Ивлев) (9–11) Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA, AB в точках A', B', C' соответственно. Перпендикуляр из центра I этой окружности на медиану из вершины C пересекает прямую $A'B'$ в точке K. Докажите, что $CK \parallel AB$.

Решение. При полярном преобразовании относительно вписанной окружности перпендикуляр из I на медиану перейдет в бесконечно удаленную точку этой медианы, прямая $A'B'$ — в точку C, а прямая, проходящая через C и параллельная AB, — в точку P пересечения $A'B'$ с IC'. Таким образом, надо доказать, что эта точка лежит на медиане.

Поскольку $IA' = IB'$, $\angle PIB' = \angle A$, $\angle PIA' = \angle B$, то $B'P : A'P = BC : AC$. А так как $CA' = CB'$, то $\sin\angle ACP : \sin\angle BCP = BC : AC$, т.е. CP делит AB пополам (рис.16).

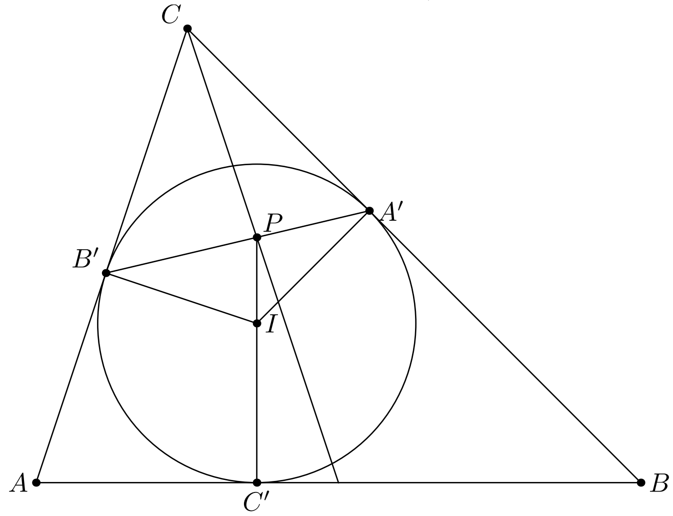


Рис.16

17. (А.Заславский) (9–11) Дан вписанный четырехугольник, острый угол между диагоналями которого равен ϕ. Докажите, что острый угол между диагоналями любого другого четырехугольника с теми же длинами сторон меньше ϕ.

Решение. Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Обозначив $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$, $PD = d$, выразим стороны четырехугольника по теореме косинусов через a, b, c, d и $\cos\phi$.

$$|AB^2 - BC^2 + CD^2 - CA^2| = 2\cos\phi(ab + bc + cd + da) = 2AC \cdot BD \cos\phi.$$

Но по теореме Птолемея $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$, причем равенство достигается только на вписанном четырехугольнике.

18. (А.Иванов) (9–11) В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Точки M и N являются проекциями B и C на AD. Окружность с диаметром MN пересекает BC в точках X и Y. Докажите, что $\angle BAX = \angle CAY$.

Решение. Пусть B', C', X', Y' — точки, симметричные B, C, X, Y относительно MN. Тогда $BB'CC'$ — равнобокая трапеция, диагонали которой пересекаются в точке L, инверсной A относительно окружности с диаметром MN. В этой же точке пересекаются диагонали равнобокой трапеции $XX'YY'$, вписанной в эту окружность. Боковые стороны этой трапеции пересекаются на поляре точки L, которая проходит через A и параллельна основаниям трапеции. В силу симметрии точка пересечения боковых сторон совпадает с A, что равносильно утверждению задачи (рис.18).

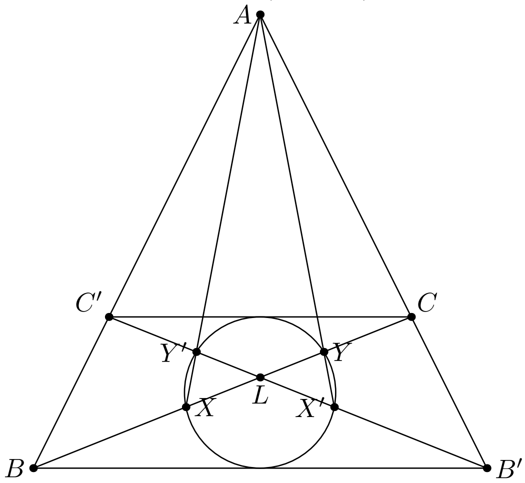


Рис.18

19. (Д.Прокопенко) (10–11) а) Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках B_0 и C_0 соответственно. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекают серединный перпендикуляр к биссектрисе AL в точках Q и P соответственно. Докажите, что прямые PC_0 и QB_0 пересекаются на прямой BC.

б) В треугольнике ABC провели биссектрису AL. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABL и ACL соответственно. Точки B_1 и C_1 — проекции вершин C и B на биссектрисы углов B и C соответственно. Докажите, что прямые O_1C_1 и O_1B_1 пересекаются на прямой BC.

в) Докажите, что точки, полученные в пп.а) и б), совпадают.

Решение. а) Очевидно, что $PQ \parallel B_0C_0$. Кроме того, точка P лежит на описанной окружности треугольника ACL. Значит, $\angle PLA = \angle C/2$ и $\angle PLB = 90^\circ - \angle B/2 = \angle C_0A_0B$, где A_0 — точка касания вписанной окружности с BC. Следовательно, соответственные стороны треугольников PQL и $C_0B_0A_0$ параллельны, т.е. эти треугольники гомотетичны (рис.19а). Центр гомотетии S лежит на прямой LA_0. Значит, прямые P_0 и QB_0 пересекаются в S, т.е. на прямой BC.

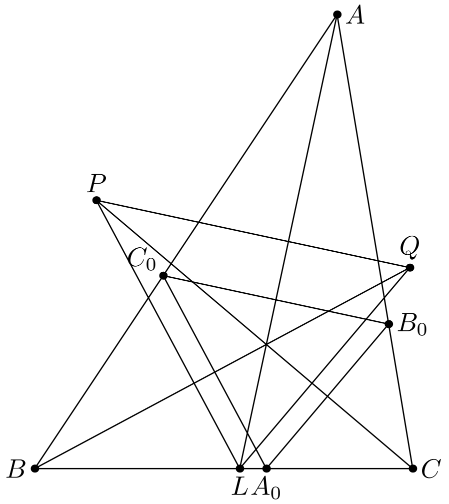


Рис.19а

б) Докажем сначала, что точки C_0, B_0, C_1 и B_1 лежат на одной прямой. Действительно, поскольку точка, симметричная B относительно биссектрисы угла C, лежит на прямой AC, точка C_1 лежит на средней линии $A'C'$. При этом $A'C_1 = BC/2$, а значит, $C'C_1 = |AC - BC|/2 = C'B_0$. Этим же свойством обладает и точка пересечения $A'C'$ с B_0C_0. Таким образом, прямые O_1O_2 и C_1B_1 параллельны. Далее, четырехугольник BC_1IA_0 — вписанный, поэтому $\angle C_1A_0B = 90^\circ - \angle A/2 = \angle O_1LB$. Значит, $A_0C_1 \parallel LO_1$. Аналогично $A_0B_1 \parallel LO_2$ (рис.19б). Следовательно, треугольники O_1O_2L и $C_1B_1A_0$ гомотетичны.

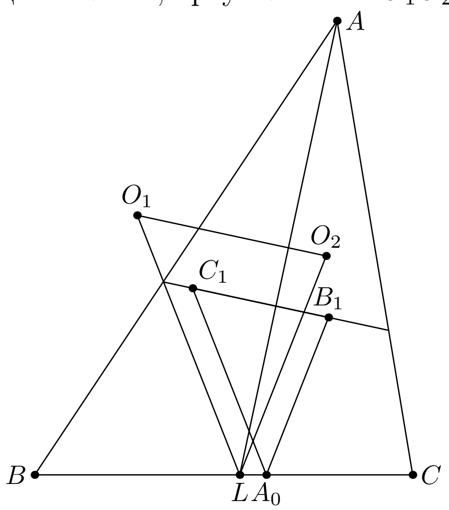


Рис.19б

в) Каждая из гомотетий пп. а) и б) переводит A_0 в L, а прямую B_0C_0 — в серединный перпендикуляр к AL. Поэтому их центры совпадают.

20. (В.Ясинский) (10–11) На стороне AB треугольника ABC взята произвольная точка C_1. Точки A_1, B_1 на лучах BC и AC таковы, что $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = \angle ACB$. Прямые AA_1

и BB_1 пересекаются в точке C_2. Докажите, что все прямые C_1C_2 проходят через одну точку.

Решение. Из условия следует, что четырехугольники ACA_1C_1 и BCB_1C_1 — вписанные. Поэтому $\angle B_1BC_1 = \angle ACC_1$, $\angle A_1AC_1 = \angle BCC_1$, а значит, $\angle AC_2B = \pi - \angle C$, т.е. C_2 лежит на окружности, проходящей через A, B и точку C', симметричную C относительно AB. При этом $\angle BC'C_1 = \angle BAC_2$, следовательно, прямая $C'C_1$ проходит через C_2 (рис.20).

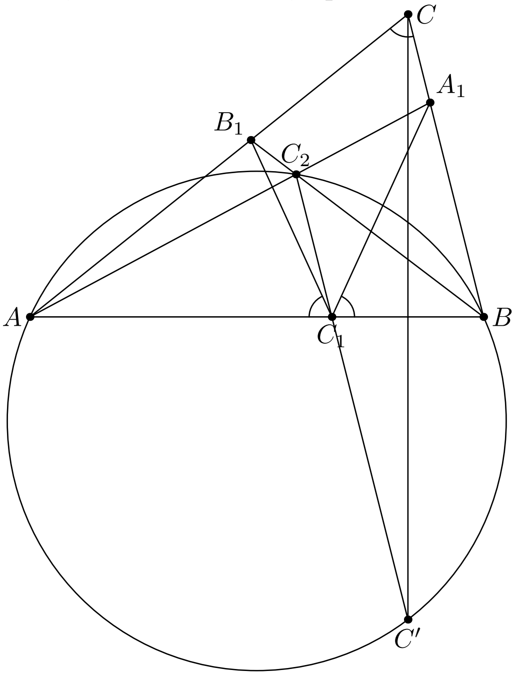


Рис.20

21. (В.Ясинский) (10–11) Дана окружность ω и точка A вне ее. Через A проведены две прямые, одна из которых пересекает ω в точках B и C, а другая — в точках D и E (D лежит между A и E). Прямая, проходящая через D и параллельная BC, вторично пересекает ω в точке F, а прямая AF — в точке T. Пусть M — точка пересечения прямых ET и BC, а N — точка, симметричная A относительно M. Докажите, что описанная около треугольника DEN окружность проходит через середину отрезка BC.

    Решение. Спроецируем сначала прямую AB на окружность из точки D, а затем окружность на прямую AB из точки T. В результате A перейдет в M, бесконечно удаленная точка — в A, а точки B и C останутся на месте. Приравняв двойные отношения, получим $MB/MC = (AB/AC)^2$. Из этого соотношения получаем, что $AM = AB \cdot AC/(AB + AC)$. Пусть теперь K — середина BC. Тогда $AN \cdot AK = 2AM(AB+AC)/2 = AB \cdot AC = AD \cdot AE$, т.е. точки D, E, K, N лежат на окружности.

22. (А.Заславский) (10–11) Общие перпендикуляры к противоположным сторонам пространственного четырехугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что они пересекаются.

    Решение. Пусть K, L, M, N — точки на сторонах AB, BC, CD, DA пространственного четырехугольника $ABCD$, являющиеся основаниями общих перпендикуляров. При проекции на плоскость, параллельную KM и LN, эти прямые перейдут в перпендикулярные прямые $K'M'$ и $L'N'$. По теореме о трех перпендикулярах проекции прямых AB и CD будут перпендикулярны $K'M'$, а проекции прямых BC и AD перпендикулярны $L'N'$. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ проецируется в прямоугольник $A'B'C'D'$, причем $A'K' = D'M'$, $B'L' = A'N'$. Значит, $AK/KB = DM/MC$, $BL/LC = AN/ND$ и по теореме Менелая точки K, L, M, N лежат в одной плоскости.

23. (Б.Френкин) (10–11) Выпуклые многогранники A и B не имеют общих точек. Многогранник A имеет ровно 2012 плоскостей симметрии. Каково наибольшее возможное количество плоскостей симметрии у фигуры, состоящей из A и B, если B имеет а) 2012, б) 2013 плоскостей симметрии?

   в) Каков будет ответ в пункте (б), если плоскости симметрии заменить на оси симметрии?

   Ответ. (а) 2013. (б) 2012. (в) 1.

   Решение. (а) *Оценка.* Симметрия либо меняет многогранники A и B местами, либо оставляет каждый из них на месте. В первом случае она меняет местами их центры тяжести, поэтому плоскость симметрии перпендикулярна отрезку между центрами тяжести и проходит через его середину. Во втором случае плоскость симметрии фигуры является плоскостью симметрии каждого из многогранников A и B. Отсюда оценка $1+2012=2013$. *Пример.* Пусть A — правильная 2012-угольная пирамида. На её оси симметрии (очевидно, единственной) выберем точку вне A и проведем через неё плоскость P перпендикулярно оси. Пусть B получается из A отражением относительно P. Все условия задачи выполнены, при этом P и 2012 плоскостей симметрии пирамиды A являются плоскостями симметрии полученной фигуры.

   (б) *Оценка.* Поскольку многогранники A и B имеют разное количество плоскостей симметрии, они не равны и не могут перейти друг в друга при симметрии всей фигуры. Следовательно, эта симметрия оставляет каждый из них на месте и, в частности, является симметрией многогранника A, но он по условию имеет только 2012 плоскостей симметрии. *Пример.* Пусть A, как и в п. (а), — правильная 2012-угольная пирамида. Выберем на её оси точку вне A, проведем через неё плоскость перпендикулярно оси и отразим основание пирамиды относительно этой плоскости. Над этим основанием построим прямую призму, не имеющую общих точек с A, это и будет B. Ясно, что B имеет 2013 плоскостей симметрии: одна из них параллельна плоскостям оснований призмы и расположена посредине между ними, а остальные 2012 проходят через ось призмы и две противоположные вершины основания. Они являются плоскостями симметрии также для A и для всей фигуры.

   (в) *Оценка.* Поскольку многогранники A и B имеют разное количество осей симметрии, они не равны и не могут перейти друг в друга при симметрии всей фигуры. Значит, эта симметрия оставляет каждый из них на месте. Поэтому она оставляет на месте центр тяжести каждого из многогранников. Эти центры не совпадают, поскольку многогранники выпуклые (это существенно!). Таким образом, у соединяющей прямой есть две неподвижные точки. Значит, она и есть ось симметрии. *Пример.* Пусть A — прямая призма, основания которой — правильные 2011-угольники. Плоскости оснований считаем горизонтальными. Тогда у призмы одна вертикальная ось симметрии, и через середину её отрезка между основаниями проходят 2011 горизонтальных осей симметрии. Далее, пусть B — прямая призма, её основания горизонтальны и являются правильными 2012-угольниками, а вертикальная ось та же, что у A, причем A и B не имеют общих точек. Тогда A имеет 2012 осей симметрии, B — 2013, а составленная из них фигура имеет вертикальную ось симметрии.