РЕШЕНИЯ

9.1. (А.А.Заславский) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр O которой лежит внутри него. Доказать, что, если $\angle BAO = \angle DAC$, то диагонали четырехугольника перпендикулярны.

Решение. Так как $\angle ABO = (\pi - \angle AOB)/2 = \pi/2 - \angle ADB$, $\angle DAC + \angle ADB = \pi/2$, что равносильно утверждению задачи (рис.9.1).

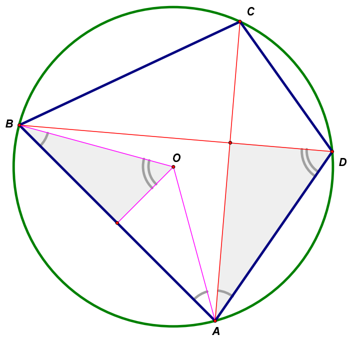


Рис.9.1

9.2. (Л.А.Емельянов) Найти все равнобедренные треугольники, которые нельзя разрезать на три равнобедренных треугольника с одинаковыми боковыми сторонами.

Решение. Остроугольный треугольник можно разрезать на три равнобедренных с равными боковыми сторонами радиусами описанной окружности. Если треугольник ABC — тупоугольный (C — тупой угол), то возьмем на стороне AB точки A', B' такие, что $AB' = B'C = CA' = A'B$, и разрежем треугольник на треугольники $AB'C$, $A'B'C$ и $A'BC$ (рис.9.2.1).

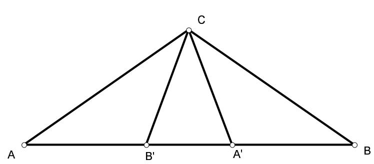


Рис.9.2.1

Докажем, что прямоугольный треугольник ABC ($AC = BC$) разрезать требуемым образом нельзя.

Очевидно, что существует два существенно различных способа разрезания треугольника на три: соединить внутреннюю точку с вершинами или разрезать треугольник на два прямой, проходящей через вершину, а затем повторить эту операцию с одной из двух частей (рис.9.2.2).

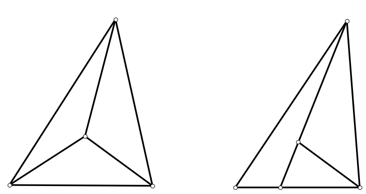


Рис.9.2.2

В первом случае треугольник AXB может быть равнобедренным только при $AX = BX$, но тогда два других треугольника равнобедренными не будут. Во втором случае хотя бы один из получающихся при первом разрезе треугольников должен быть равнобедренным. Следовательно, первая прямая либо является биссектрисой прямого угла, либо соединяет точку C с точкой D на гипотенузе, для которой $AD = AC$. Ни в том, ни в другом случае провести вторую прямую так, чтобы получить нужное разрезание невозможно.

9.3. (И.Ф.Шарыгин) Дана окружность и точки A, B на ней. Изобразить множество середин отрезков, один из концов которых лежит на одной из дуг AB, а другой на второй.

Решение. Пусть K — произвольная точка внутри данной окружности. Хорда, серединой которой является K перпендикулярна OK. Поэтому она пересекает отрезок AB тогда и только тогда, когда один из углов OKA, OKB не острый, а другой — не тупой. Следовательно, искомое множество состоит из точек, лежащих внутри или на границе одного из кругов с диаметрами OA, OB, и вне или на границе другого (рис.9.3).

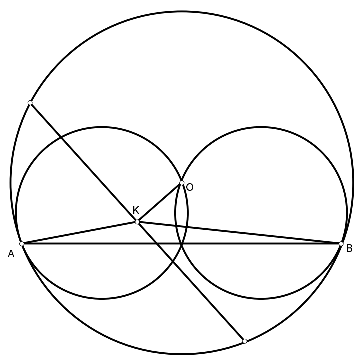


Рис.9.3

9.4 (А.Г.Мякишев) Пусть P — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, M — точка пересечения прямых, соединяющих середины его противоположных сторон, O — точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям, H — точка пересечения прямых ,соединяющих ортоцентры треугольников APD и BCP, APB и CPD. Доказать, что M — середина OH.

Решение. Пусть O_1 — середина AC, а O_2 — середина BD. Несложно показать, что точка M — середина отрезка O_1O_2 (понятно, что M — центр масс системы $1A, 1B, 1C, 1D$. Рассмотрим подсистемы $1A, 1C$ и $1B, 1D$, которые эквивалентны подсистемам $2O_1$, $2O_2$).

Очевидно, четырехугольник, образованный ортоцентрами есть параллелограмм, стороны которого лежат на перпендикулярах, проведенных из вершин четырехугольника к соответствующим диагоналям. Поэтому H — точка пересечения диагоналей этого параллелограмма и делит их пополам.

Докажем, что прямая HO_1 параллельна OO_2, или, иначе говоря, перпендикулярна диагонали BD. Рассмотрим прямую, перпендикулярную этой диагонали и проходящую через H и покажем, что она проходит и через точку O_1. Пусть наша прямая пересекает отрезок AH_4 в точке K. Тогда она является средней линией в треугольнике AH_3H_4, и потому K — середина AH_4. А следовательно, наша прямая будет средней линией и в треугольнике AH_4C, и потому пройдет через O_1.

Рассуждая совершенно аналогично , убеждаемся в том, что прямая HO_2 параллельна OO_1, т.е. HO_1OO_2 — параллелограмм, причем M — точка пересечения его диагоналей (рис.9.4).

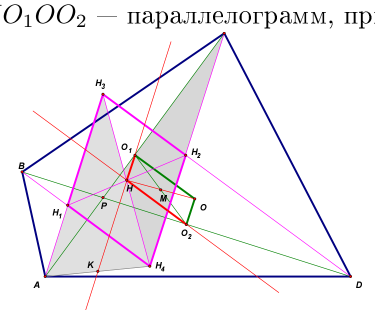


Рис.9.4

Отсюда следует, что точки O, M, H лежат на одной прямой, и $OM = MH$.

9.5. (Б.Р.Френкин) Дано, что ни для какой стороны треугольника из проведенных к ней высоты, биссектрисы и медианы нельзя составить треугольник. Доказать, что один из углов треугольника больше чем $135°$.

Решение. Из условия следует, что каждая медиана больше либо равна сумме биссектрисы и высоты из той же вершины. Если между какой-то медианой и соответствующей высотой угол не больше $60°$, то медиана не больше удвоенной высоты, а сумма биссектрисы и высоты – не меньше, причем равенство не достигается одновременно. Поэтому из условия следует, что между каждой медианой и соответствующей высотой угол больше $60°$. Так как в треугольнике наименьший угол не больше $60°$, то какая-то высота проходит вне треугольника, т.е. он тупоугольный.

Пусть A — вершина тупого угла, B и C — остальные две вершины, AM — медиана, AH — высота, причем точка M принадлежит отрезку BH. По доказанному $\angle AMH < 30°$. Он равен сумме углов ABM и BAM. Медиана из вершины тупого угла меньше половины противолежащей стороны. Отсюда $\angle ABM < 15°$.

Высота из вершины B образует угол больше $60°$ с соответствующей медианой, а тогда и со стороной BC. Поэтому $\angle ACB < 30°$. Значит, $\angle BAC > 180° - 15° - 30° = 135°$.

10.1. (Л.А.Емельянов) Дан выпуклый четырехугольник без параллельных сторон. Для каждой тройки его вершин строится точка, дополняющая эту тройку до параллелограмма, одна из диагоналей которого совпадает с диагональю четырехугольника. Доказать, что из четырех построенных точек ровно одна лежит внутри исходного четырехугольника.

Первое решение. Пусть вершина D' параллелограмма $ABCD'$ лежит внутри четырехугольника $ABCD$. Тогда $\angle BCA < \angle CAD$ и $\angle BAC < \angle ACD$. Следовательно, точки пересечения противоположных сторон $ABCD$ лежат на продолжении отрезков AB и BC за точку B. Очевидно, что вершина с таким свойством в четырехугольнике ровно одна (рис.10.1.1).

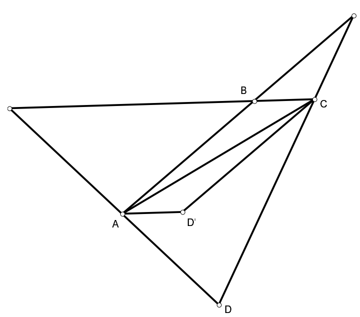


Рис.10.1.1

Второе решение. Пусть $ABCD$ — исходный четырехугольник, $ABCD'$ — параллелограмм, лежащий в нем. Пусть лучи CD' и AD' пересекают стороны в точках C_1 и A_1. Тогда $S_{ABC} = S_{ABD'} = S_{ABC_1} < S_{ABD}$, аналогично $S_{ABC} < S_{ACD}$. Тогда $S_{ABC} < S_{ABD} + S_{ACD} - S_{ABC} = S_{BCD}$, т.е. ABC — треугольник наименьшей площади, образованный тремя вершинами четырехугольника. Наоборот, если он таковой, то на сторонах найдутся точки A_1 и C_1 такие, что $S_{ABC} = S_{ABC_1} = S_{A_1BC}$, и точка пересечения AA_1 и CC_1 будет искомой (рис.10.1.2).

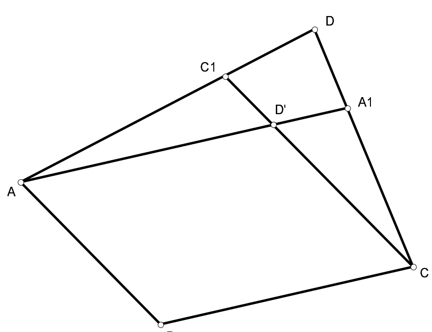


Рис.10.1.2

10.2. (А.В.Шаповалов) Треугольник можно разрезать на три подобных друг другу треугольника. Доказать, что его можно разрезать на любое число подобных друг другу треугольников.

Решение. Пусть треугольник ABC с наибольшим углом C разрезан на три подобных отрезками AX, BX, CX. Так как $\angle AXB > \angle ACB$, углу AXB в других треугольниках могут равняться только углы AXC и BXC. Значит, $\angle AXB = \angle AXC = \angle BXC = 120°$. Но тогда $AX = BX = CX$ и треугольник ABC — правильный.

Пусть теперь треугольник разрезали сначала прямой, проходящей через вершину, на два, а затем один из этих двух еще на два. Так как два последних треугольника подобны, они прямоугольные, т.е. при первом разрезе от исходного треугольника отрезали прямоугольный, а затем оставшийся треугольник разделили на два высотой. Перебрав все возможные варианты, нетрудно убедиться, что исходный треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный. И в том, и в другом случае его можно разрезать на любое число подобных.

10.3. (А.А.Заславский) В окружности с центром O проведены две параллельные хорды AB и CD. Окружности с диаметрами AB и CD пересекаются в точке P. Доказать, что середина отрезка OP равноудалена от прямых AB и CD.

Решение. Пусть X, Y — середины AB и CD, Q — середина OP. Тогда $XQ^2 = (2OX^2 + 2XP^2 - OP^2)/4 = (2OX^2 + 2XA^2 - OP^2)/4 = (2R^2 - OP^2)/4 = YQ^2$. Таким образом, Q равноудалена от точек X и Y, а, значит, и от прямых AB и CD (рис.10.3).

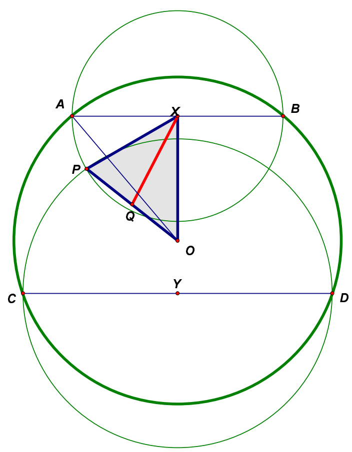


Рис.10.3

10.4. (Вим Пайлс, Нидерланды) На плоскости даны два отрезка A_1B_1 и A_2B_2, причем $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = k < 1$. На отрезке A_1A_2 взята точка A_3, а на продолжении этого отрезка за точку A_2 — точка A_4, так что $\frac{A_3A_2}{A_3A_1} = \frac{A_4A_2}{A_4A_1} = k$. Аналогично, на отрезке B_1B_2 берется точка B_3, а на продолжении этого отрезка за точку B_2 — точка B_4, так что $\frac{B_3B_2}{B_3B_1} = \frac{B_4B_2}{B_4B_1} = k$. Найти угол между прямыми A_3B_3 и A_4B_4.

Первое решение. Пусть O — центр не сохраняющего ориентацию подобия, переводящего A_1 в A_2 и B_1 в B_2. Так как треугольники OA_1B_1 и OA_2B_2 подобны, $\angle A_1OB_1 = \angle B_2OA_2$ и биссектрисы углов A_1OA_2 и B_1OB_2 совпадают. Так как $OA_2/OA_1 = OB_2/OB_1 = k$, эта общая биссектриса пересекает отрезки A_1A_2 и B_1B_2 в точках A_3 и B_3, а перпендикулярная ей прямая пересекает продолжения этих отрезков в точках A_4 и B_4 (рис.10.4.1). Следовательно, искомый угол прямой.

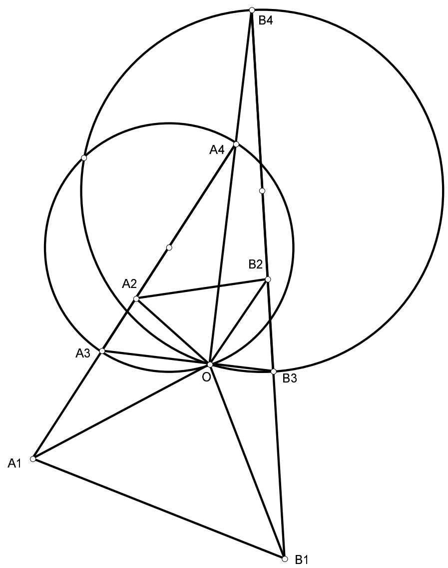


Рис.10.4.1

Чтобы найти точку O, построим окружности с диаметрами A_3A_4 и B_3B_4 и найдем точки их пересечения. Так как окружность с диаметром A_3A_4 — геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до A_2 и A_1 равно k, точки пересечения будут центрами двух подобий, переводящих A_1 в A_2 и B_1 в B_2. Одно из этих подобий сохраняет ориентацию, другое меняет.

Второе решение. Пусть $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{\mathrm{u}}$, $\overrightarrow{A_2B_2} = \vec{\mathrm{v}}$, по условию $\vec{\mathrm{v}}^2 = k^2\vec{\mathrm{u}}^2$. Тогда

$$\overrightarrow{A_3B_3} = \overrightarrow{A_3A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_3} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{A_2A_1} + \vec{\mathrm{u}} + \frac{1}{1+k}\overrightarrow{B_1B_2}; \qquad (*)$$

с другой стороны,

$$\overrightarrow{A_3B_3} = \overrightarrow{A_3A_2} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_2B_3} = \frac{k}{1+k}\overrightarrow{A_1A_2} + \vec{\mathrm{v}} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{B_2B_1}. \qquad (**)$$

Умножив $(*)$ на $\frac{k}{1+k}$, $(**)$ на $\frac{1}{1+k}$ и сложив полученные равенства, имеем $\overrightarrow{A_3B_3} = \frac{k}{1+k}\vec{\mathrm{u}} + \frac{1}{1+k}\vec{\mathrm{v}}$. Аналогично получаем $A_4B_4 = \frac{1}{1-k}\vec{\mathrm{v}} - \frac{k}{1-k}\vec{\mathrm{u}}$. Тогда

$$\left(\overrightarrow{A_3B_3}, \overrightarrow{A_4B_4}\right) = \frac{(k\vec{\mathrm{u}} + \vec{\mathrm{v}}, \vec{\mathrm{v}} - k\vec{\mathrm{u}})}{(1+k)(1-k)} = \frac{k^2\vec{\mathrm{u}}^2 - \vec{\mathrm{v}}^2}{1-k^2} = 0,$$

т. е. векторы ортогональны.

Третье решение. (С.Сафин) Построим параллелограмм $A_1A_2B_2X$ и проведем биссектрису A_1Y треугольника A_1XB_1. Так как $\frac{B_1Y}{XY} = \frac{A_1B_1}{A_1X} = k$, $B_3Y \parallel B_2X$ и $B_3Y = kB_2X = A_1A_3$. Следовательно, $A_1A_3B_3Y$ — параллелограмм, т.е. $A_3B_3 \parallel A_1Y$.

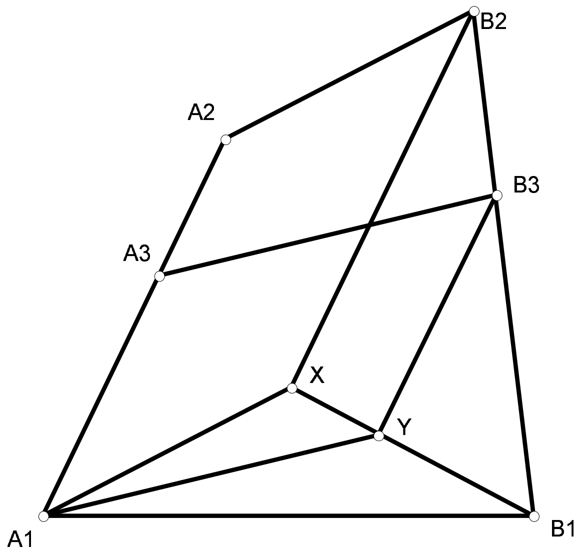


Рис.10.4.2

Аналогично, A_4B_4 параллельно внешней биссектрисе угла XA_1B_1, и, значит прямые A_3B_3 и A_4B_4 перпендикулярны.

10.5. (А.А.Заславский) Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках X, Y, расстояние между которыми также равно 1. Из точки C одной окружности проведены касательные CA, CB к другой. Прямая CB вторично пересекает первую окружность в точке A'. Найти расстояние AA'.

Решение. Пусть O — центр окружности, на которой лежит точка C, O' — центр другой окружности. Так как $OO' = \sqrt{3}$, прямая $A'B'$ касается второй окружности в точке C'. Следовательно, $\angle A'O'A = \angle AO'C' + \frac{1}{2}\angle C'O'B = 2\angle ABC' + \angle C'AB = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B'$, $\angle O'A'O = \angle O'A'B' + \angle B'A'O = \frac{\pi}{2} - \angle C'O'A' + \frac{\pi}{2} - \angle BCA = \pi - \angle BCA - \frac{1}{2}\angle CA'B' = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B'$. Так как $O'A = OA'$, $AO'A'O$ — равнобедренная трапеция, и $AA' = OO' = \sqrt{3}$ (рис.10.5).

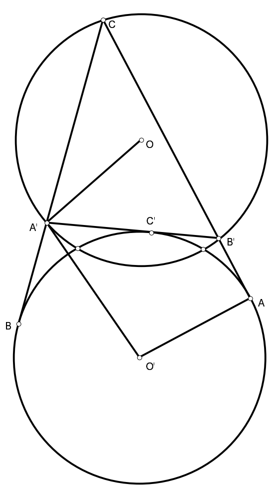


Рис.10.5

10.6. (А.А.Заславский) Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, X — произвольная точка. Окружность с диаметром XH вторично пересекает прямые AH, BH, CH в точках A_1, B_1, C_1, а прямые AX, BX, CX в очках A_2, B_2, C_2. Доказать, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Решение. Рассмотрим для определенности случай, когда точки расположены на окружности в порядке $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$. Пусть $XH = d$. Тогда $A_1B_2 = d\sin\angle A_1HB_2 = d\sin\angle XBC$, так как HA_1 перпендикулярно BC, а HB_2 перпендикулярно BX. Следовательно, $\frac{A_1B_2\cdot C_1A_2\cdot B_1C_2}{A_2B_1\cdot C_2A_1\cdot B_2C_1} = \frac{\sin\angle XBC\sin\angle XCA\sin\angle XAB}{\sin\angle XAC\sin\angle XCB\sin\angle XBA} = 1$, что равносильно утверждению задачи (рис.10.6).

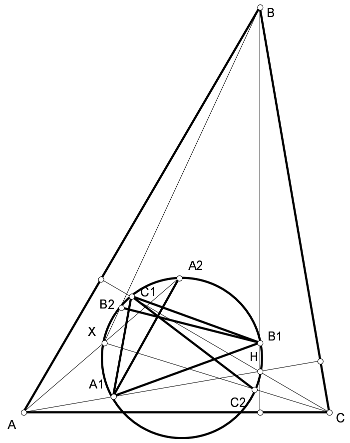


Рис.10.6

Примечание. Нетрудно видеть, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC, а точка пересечения прямых соответствует точке, изогонально сопряженной X.

11.1. (А.А.Заславский) A_1, B_1, C_1 — середины сторон правильного треугольника ABC. Три параллельные прямые, проходящие через A_1, B_1, C_1, пересекают, соответственно, прямые B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 в точках A_2, B_2, C_2. Доказать, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке, лежащей на описанной около треугольника ABC окружности.

Решение. Пусть Z — точка пересечения AA_2 и BB_2. Так как точки B и B_1 симметричны относительно прямой A_1C_1, $\angle ABZ = \angle C_1BB_2 = \angle B_2B_1C_1$. Аналогично $\angle BAZ = \angle A_2A_1C_1$. Так как прямые AA_2 и BB_2 параллельны, $\angle A_2A_1C_2 = \angle B_1B_2C$, следовательно, $\angle AZB = \angle ACB$ и точки A, B, C, Z лежат на одной окружности, откуда и следует утверждение задачи (рис.11.1).

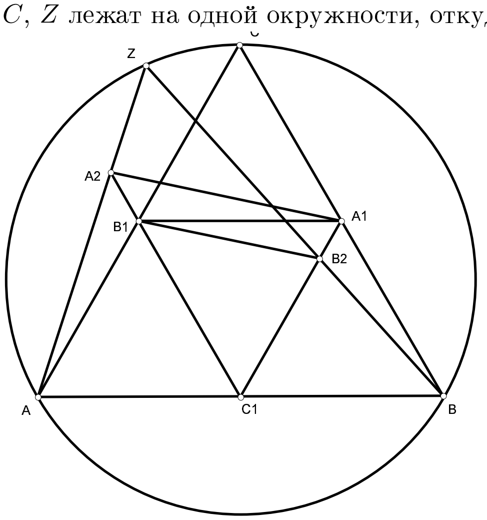


Рис.11.1

11.2 (А.Г.Мякишев) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Прямые BC и AD пересекаются в точке O, причем B лежит на отрезке OC, и A — на отрезке OD. I — центр вписанной в треугольник OAB окружности, J — центр вневписанной в треугольник OCD окружности, касающейся стороны CD и продолжения двух других сторон. Перпендикуляры, опущенные из середины отрезка IJ на прямые BC и AD, пересекают соответствующие стороны четырехугольника (не продолжения) в точках X и Y. Доказать, что отрезок XY делит периметр четырехугольника $ABCD$ пополам, причем из всех отрезков с этим свойством и с концами на BC и AD XY имеет наименьшую длину.

Решение. Используя тот факт, что отрезки касательных, проведенные из одной точки, равны, несложно показать, что отрезок $X'Y'$ с концами на сторонах AD и BC делит периметр пополам тогда и только тогда, когда $OX'+OY'=l$, где l — постоянная величина, равная удвоенному отрезку соответствующей касательной плюс полупериметр четырехугольника.

Пусть M — середина IJ. Также просто проверяется, что $OX+OY=l$. Тогда треугольники MXX' и MYY' равны, а следовательно, треугольники MXY и $MX'Y'$ подобны по двум углам. Значит, $X'Y'$ минимально, когда минимально MX', т.е. когда X' совпадает с X (рис.11.2).

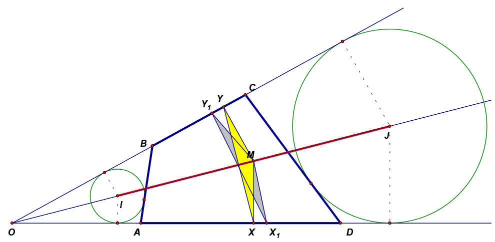


Рис.11.2

11.3. (А.А.Заславский) Внутри вписанного четырехугольника $ABCD$ существует точка K, расстояния от которой до сторон $ABCD$ пропорциональны этим сторонам. Доказать, что K — точка пересечения диагоналей $ABCD$.

Первое решение. Пусть U — точка пересечения касательных к окружности $ABCD$ в точках A и C, X, Y — проекции U на AB и BC. Тогда $UX/UY=\sin\angle UAX/\sin\angle UCY=\sin\angle BCA/\sin\angle BAC=AB/BC$, т.е. K лежит на прямой UB. Аналогично, K лежит на прямой UD, и, если эти прямые не совпадают, то $K=U$. Точно так же, доказывается, что, если не совпадают прямые AV и CV, где V — точка пересечения касательных в точках B и D, то $K=V$, что невозможно. Будем считать, что на одной прямой лежат точки B, D, U. Тогда $AB/AD=AU/UD=CU/UD=BC/CD$ и точки A, C, V также лежат на одной прямой. Следовательно, K — точка пересечения AC и BD.

Второе решение. Множество точек, расстояния от которых до прямых AB и CD пропорциональны соответствующим сторонам, — это прямая, проходящая через точку пересечения AB и CD. Так как $ABCD$ вписанный, треугольники LAB и LCD, где L — точка пересечения диагоналей, подобны, т.е. L лежит на указанной прямой. Аналогично, L лежит на второй такой же прямой и, значит, совпадает с K.

11.4. (И.Ф.Шарыгин) В треугольнике ABC $\angle A=\alpha$, $BC=a$. Вписанная окружность касается прямых AB и AC в точках M и P. Найти длину хорды, высекаемой на прямой MP окружностью с диаметром BC.

Первое решение. Расстояние от центра окружности до хорды равно полусумме расстояний от точек B и C до прямой MP, т.е. $\frac{1}{2}(BM\sin\angle AMP+CP\sin\angle APM)=\frac{1}{2}(BM+CP)\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ (рис.11.4.1).

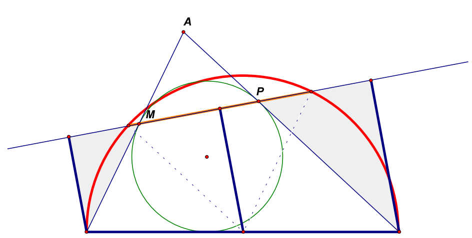


Рис.11.4.1

Соответственно, длина хорды равна $a\sin\frac{\alpha}{2}$.

Второе решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника, X, Y — точки пересечения прямых BI, CI с прямой MP. Тогда $\angle MXB = \angle AMP - \angle MBX = \frac{\angle B}{2}$. Следовательно, треугольники BXM и BCI подобны, т.е.

$$\frac{BX}{BC} = \frac{BM}{BI} = \cos\frac{\angle A}{2}.$$

Это значит, что угол BXC прямой (рис.11.4.2).

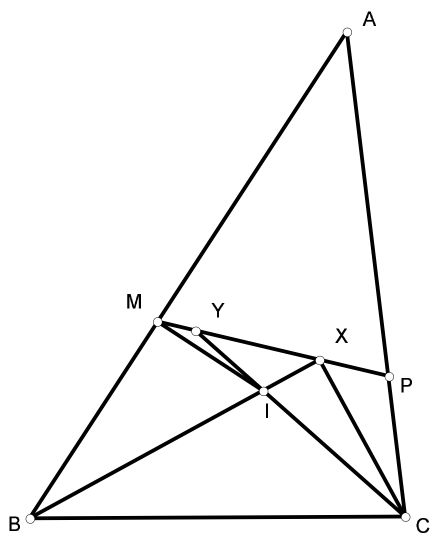


Рис.11.4.2

Аналогично, угол BYC прямой. Следовательно, искомая хорда

$$XY = BC\sin\angle XCY = a\sin\frac{\alpha}{2}.$$

11.5. (В.Ю.Протасов) На плоскости дан угол и точка K внутри него. Доказать, что найдется точка M, обладающая следующим свойством: если произвольная прямая, проходящая через , пересекает стороны угла в точках A и B, то MK является биссектрисой угла AMB.

Первое решение. На произвольной прямой, проходящей через K и пересекающей стороны угла в точках A и B, возьмем точку K', такую что $AK'/BK' = AK/BK$. Так как все точки K' лежат на прямой l, проходящей через вершину угла, все окружности с диаметром KK' проходят через проекцию M точки K на l. При этом всегда выполнено равенство $AM/BM = AK/BK$, т.е. точка M — искомая (рис.11.5.1).

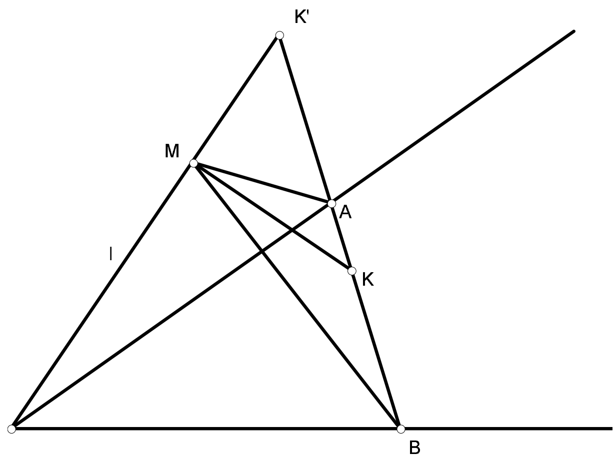


Рис.11.5.1

Второе решение. (Р.Девятов) Пусть O — вершина угла. Построим параллелограмм $KXOY$, две стороны которого лежат на сторонах угла. Пусть M — точка, симметричная K относительно XY. Докажем, что точка M — искомая.

Пусть прямая, проходящая через K, пересекает прямые OX и OY в точках A и B. Заметим, что $MX = KX$, $MY = KY$, $\triangle MXY = \triangle KXY = \triangle OYX$, поэтому $MOYX$ — равнобокая трапеция и $\angle MXO = \angle MYO$. Значит, $\angle MXA = 180^\circ - \angle MXO = 180^\circ - \angle MYO = \angle BYM$. Далее, треугольники AXK и KYB подобны, так как их стороны соответственно параллельны, поэтому $KX/XA = BY/YK$. Отсюда получаем

$$\frac{MX}{XA} = \frac{KX}{XA} = \frac{BY}{YK} = \frac{BY}{YM}.$$

Отсюда и из равенства углов MXA и BYM получаем, что треугольники MXA и BYM подобны (рис.11.5.2).

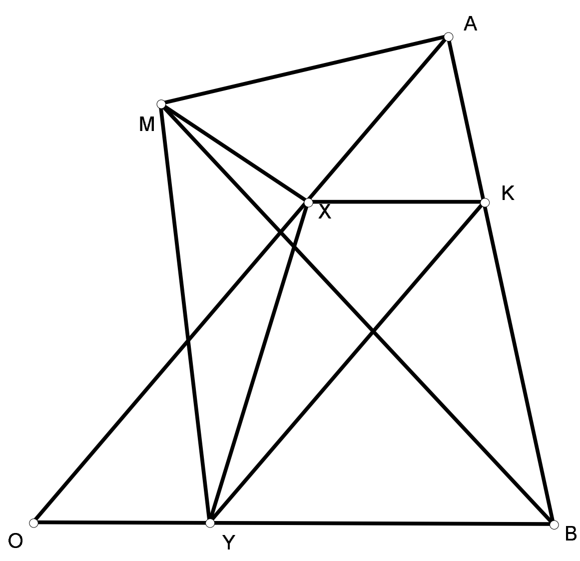


Рис.11.5.2

Теперь, пользуясь двумя доказанными подобиями, получаем

$$\frac{MA}{BM} = \frac{MX}{BY} = \frac{KX}{BY} = \frac{AK}{KB},$$

что и означает, что MK — биссектриса треугольника AMB.

11.6. (И.И.Богданов) Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается его граней в точках A', B', C', D'. Отрезки AA' и BB' пересекаются, и точка их пересечения лежит на вписанной сфере. Доказать, что отрезки CC' и DD' тоже пересекаются на вписанной сфере.

Решение. Так как отрезки AA' и BB' пересекаются, прямые AB и $A'B'$ тоже пересекаются или параллельны. Обозначим их точку пересечения (возможно, бесконечно удаленную) через P. Так как P лежит вне двугранного угла при ребре CD, плоскость CDP не пересекает вписанную сферу. Поэтому существует проективное преобразование, сохраняющее сферу и переводящее эту плоскость в бесконечно удаленную. В результате этого преобразования отрезок $A'B'$ станет диаметром сферы, а AB будет ему параллелен. Так как точка пересечения AA' и BB' лежит на сфере, расстояние от ее центра до AB равно удвоенному радиусу (на рис.11.6.1 показана проекция на плоскость $ABA'B'$).

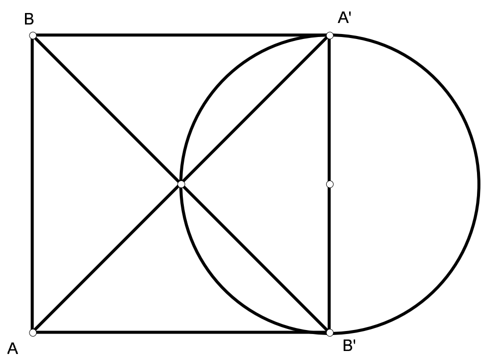


Рис.11.6.1

Значит, угол между плоскостями ABC и ABD равен $60°$, дуга большого круга, соединяющаяя C' и D' равна $120°$ и прямые, проходящие через C', D' и параллельные ABC, ABD, пересекаются на сфере (на рис.11.6.2 показана проекция на плоскость, перпендикулярную AB).

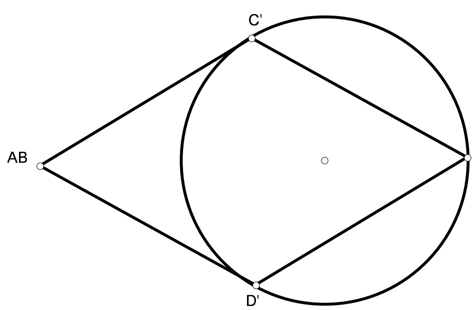


Рис.11.6.2

Вторая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Финал

8 класс

8.1.(И.Ященко) Впишите в данный полукруг правильный треугольник наибольшего периметра.

Решение. Очевидно, вписать треугольник в полукруг можно двумя способами: либо две вершины треугольника лежат на дуге, а третья на диаметре полукруга, либо, наоборот, две вершины на диаметре, а третья на дуге. Рассмотрим первый случай. Пусть вершины A, B лежат на дуге. Тогда серединный перпендикуляр к AB проходит через центр полукруга. Следовательно, третья вершина совпадает с центром и сторона треугольника равна радиусу полукруга (рис.8.1.1).

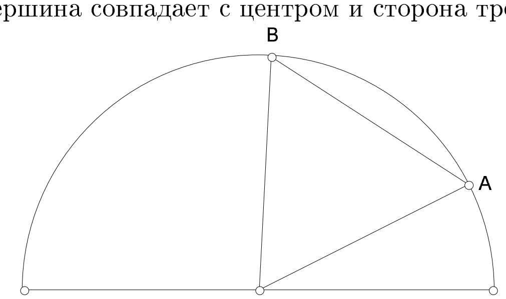


Рис.8.1.1

Во втором случае высота треугольника не превосходит радиуса полукруга, причем в случае, изображенном на рис.8.1.2, равенство достигается. Следовательно, именно этот треугольник и будет искомым.

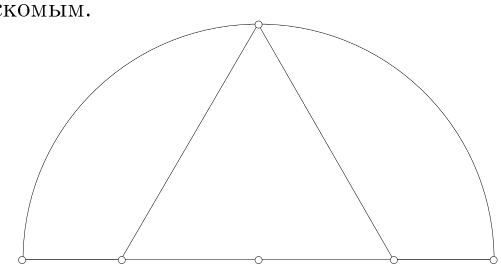


Рис.8.1.2

8.2. (Б.Френкин) При каком наименьшем n существует n-угольник, который можно разрезать на треугольник, четырехугольник,..., 2006-угольник?

Решение. Ответ: $n = 3$. Из рисунка 8.2 видно, что при любом $n \geq 3$ треугольник можно разрезать на n-угольник и $(n+1)$-угольник. Следовательно, можно лучами, выходящими из одной вершины, разрезать треугольник на 1002 треугольника, а затем первый из них разрезать на треугольник и четырехугольник, второй на пятиугольник и шестиугольник, ..., последний — на 2005-угольник и 2006-угольник.

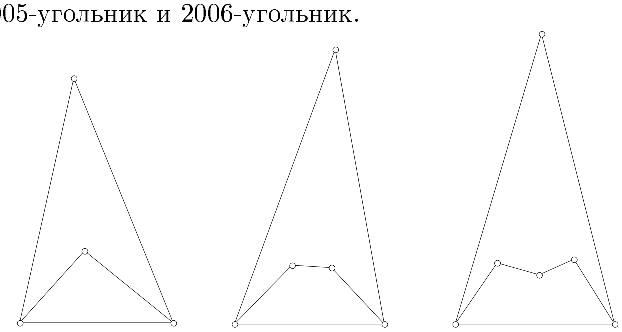


Рис.8.1

8.3. (В.Протасов) Дан параллелограмм $ABCD$. Две окружности с центрами в вершинах A и C проходят через D. Прямая ℓ проходит через D и вторично пересекает окружности в точках X, Y. Докажите, что $BX = BY$.

Решение. Рассмотрим, например, случай, изображенный на рис.8.3. Имеем $AX = AD = BC$ и $CY = CD = AB$. Кроме того, $\angle BCY = \angle C - \angle DCY = \angle C - (\pi - 2\angle CDY) = 2\angle CDY - \angle D = \angle CDY - \angle ADX$, $\angle BAX = \angle DAX - \angle A = \pi - 2\angle ADX - \angle A = \angle D - 2\angle ADX = \angle CDY - \angle ADX$. Значит, треугольники ABX и CYB равны, откуда и следует искомое равенство. Другие случаи расположения точек X, Y рассматриваются аналогично.

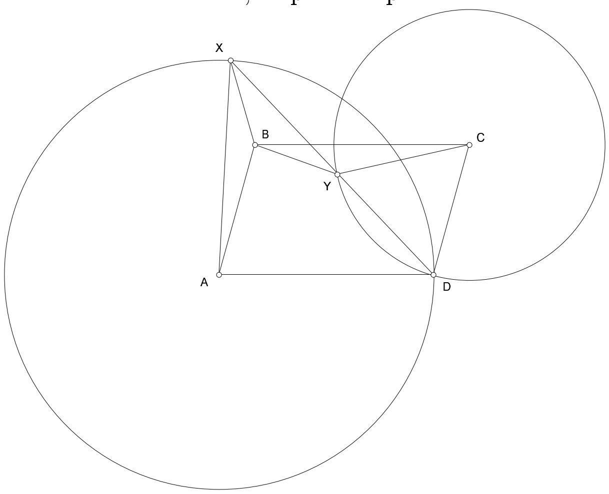


Рис.8.3

8.4. (А.Заславский) Две равные окружности пересекаются в точках A и B. P — отличная от A и B точка одной из окружностей, X, Y — вторые точки пересечения прямых PA, PB с другой окружностью. Докажите, что прямая, проходящая через P и перпендикулярная AB, делит одну из дуг XY пополам.

Решение. Рассмотрим случай, когда P лежит внутри второй окружности (рис.8.4). Пусть Q точка пересечения прямой, проходящей через P и перпендикулярной AB, лежащая вне первой окружности. Тогда $\angle QPX = (\smile QX + \smile AP)/2$, $\angle QPY = (\smile QY + \smile BP)/2$. Но $(\smile AP - \smile BP)/2 = \angle PBA - \angle PAB = \angle QPX - \angle QPY$, следовательно дуги QX и QY равны. Другие случаи рассматриваются аналогично.

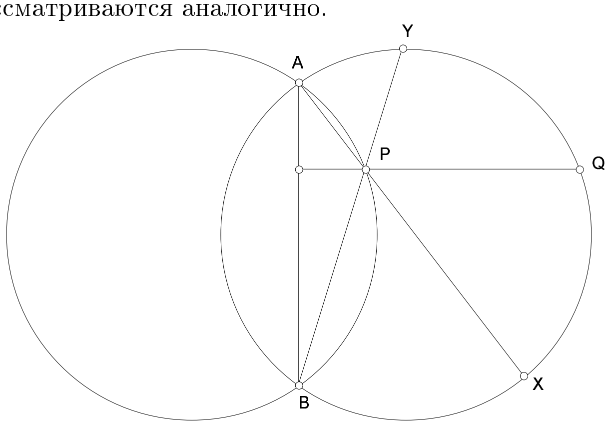


Рис.8.4

8.5. (В.Гуровиц, Б.Френкин) Существует ли выпуклый многоугольник, у которого каждая сторона равна какой-нибудь диагонали, а каждая диагональ — какой-нибудь стороне?

Решение. Ответ: нет. Предположим противное, и пусть AB — наибольшая сторона многоугольника, CD — наименьшая диагональ (AB и CD могут иметь один общий конец), E — вершина, лежащая от CD по другую сторону, чем A и B (рис.8.5). Тогда, так как $AE \leq AB$ и $BE \leq AB$,

$\angle AEB \geq 60^\circ$. С другой стороны, так как $CE \geq CD$ и $DE \geq CD$, $\angle CED \leq 60^\circ$. Но $\angle CED > \angle AEB$ — противоречие.

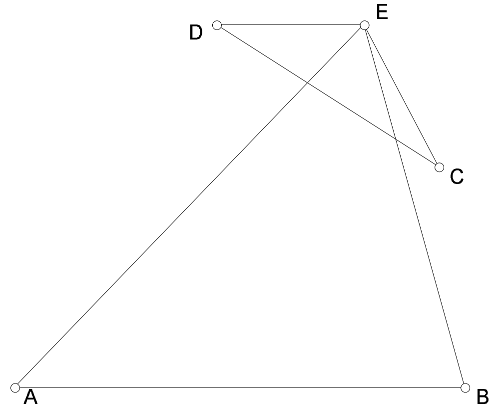


Рис.8.5

8.6. (М.Волчкевич) Дан треугольник ABC и точка P внутри него. A', B', C' — проекции P на прямые BC, CA, AB. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$, лежит внутри треугольника ABC.

Решение. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки, симметричные P относительно BC, CA, AB. Так как $CA_1 = CP = CB_1$, серединный перпендикуляр к отрезку A_1B_1 совпадает с биссектрисой угла A_1CB_1. Так как $\angle A_1CB_1 = 2\angle ACB$, эта биссектриса проходит внутри угла ACB (рис.8.6). Аналогично, серединные перпендикуляры к отрезкам A_1C_1 и B_1C_1 проходят внутри соответствующих углов треугольника ABC. Следовательно, центр Q окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, лежит внутри треугольника ABC. Так как треугольник $A'B'C'$ получается из треугольника $A_1B_1C_1$ гомотетией с центром P и коэффициентом $\frac{1}{2}$, центр окружности, описанной около $A'B'C'$, совпадает с серединой отрезка PQ и, значит, лежит внутри ABC.

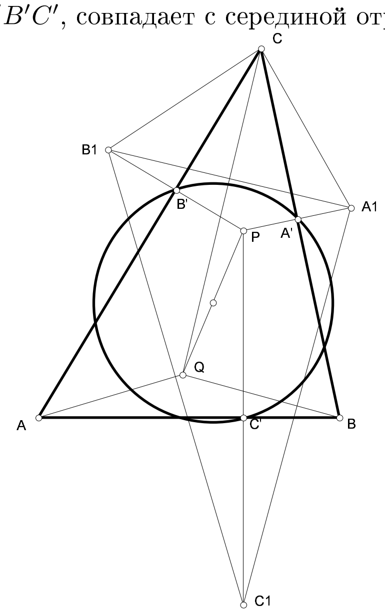


Рис.8.6

9 класс

9.1. (В.Протасов) Дана окружность радиуса R. Две другие окружности, сумма радиусов которых также равна R, касаются ее изнутри. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, проходит через одну из общих точек этих окружностей.

Решение. Пусть O — центр внешней окружности, O_1, O_2 — центры внутренних, A, B — точки касания. Проведем через O_1 прямую, параллельную OB, а через O_2 прямую, параллельную OA. По теореме Фалеса эти прямые пересекутся в точке C, лежащей на отрезке AB. При этом $O_1C = O_1A$ и $O_2C = O_2B$, так что точка C принадлежит обеим внутренним окружностям (рис.9.1).

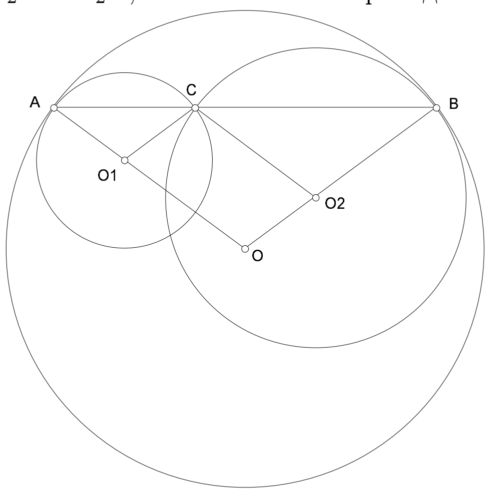


Рис.9.1

9.2. (В.Протасов) Дана окружность, точка A на ней и точка M внутри нее. Рассматриваются хорды BC, проходящие через M. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон всех треугольников ABC, касаются некоторой фиксированной окружности.

Решение. Пусть O — центр данной окружности, O' — центр окружности, проходящей через середины сторон ABC, P — центр тяжести ABC. Поскольку вершины треугольника ABC переходят в середины его сторон при гомотетии с центром P и коэффициентом $-\frac{1}{2}$, P лежит на отрезке OO' и делит его в отношении $2:1$. Кроме того, так как множество середин хорд, проходящих через M, — это окружность с диаметром OM, множество центров тяжести треугольников ABC — тоже окружность, получающаяся из нее гомотетией с центром A и коэффициентом $\frac{2}{3}$. Значит, множество точек O' — тоже окружность (рис.9.2).

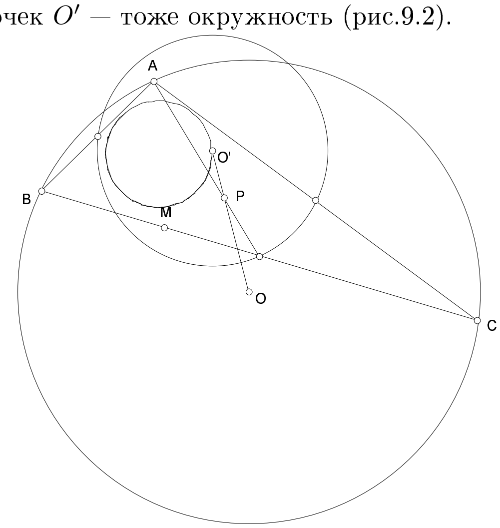


Рис.9.2

Поскольку радиусы всех окружностей, проходящих через середины сторон ABC, равны половине радиуса данной окружности, все эти окружности касаются двух окружностей, концентричных с окружностью, на которой лежат точки O' (если точка M совпадает с O, одна из этих окружностей вырождается в точку).

9.3. (А.Акопян) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и по-разному ориентированы. На отрезке AA_1 взята точка A', такая что $AA'/A_1A' = BC/B_1C_1$. Аналогично строим B' и C'. Докажите, что A', B' и C' лежат на одной прямой.

Решение. Подобие, переводящее ABC в $A_1B_1C_1$, можно представить как композицию симметрии относительно прямой l и гомотетии с центром в некоторой точке, лежащей на l, и коэффициентом k, равным отношению соответствующих сторон треугольников. Очевидно, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 делятся l в отношении, равном k, т.е. точки A', B', C' лежат на l.

9.4. (С.Маркелов) В невыпуклом шестиугольнике каждый угол равен либо 90, либо 270 градусов. Верно ли, что при некоторых длинах сторон его можно разрезать на два подобных ему и неравных между собой шестиугольника?

Решение. Пусть t — корень уравнения $t^4+t^2 = 1$. Возьмем шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB : BC = BC : CD = CD : AF = AF : FE = FE : ED = \frac{1}{t}$, и разрежем его, как на рис.9.4. Тогда получившиеся шестиугольники подобны $ABCDEF$ с коэффициентами t и t^2.

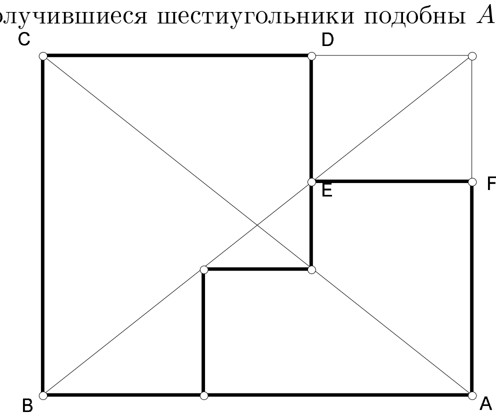


Рис.9.4

9.5. (А.Заславский) Прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения высот неравностороннего треугольника ABC, делит его периметр и площадь в одном и том же отношении. Найдите это отношение.

Решение. Ответ: 1 : 1.

Прежде всего докажем, что прямая делит периметр и площадь треугольника в одном отношении тогда и только тогда, когда она проходит через центр вписанной окружности. Действительно, пусть прямая пересекает стороны AC, BC в точках X, Y, а биссектрису угла C в точке J; d_1 — расстояние от J до стороны AB, d_2 — расстояние от J до двух других сторон. Тогда $2S_{CXY} = (CX + CY)d_2$, $2S_{AXYB} = (AX + BY)d_2 + AB \cdot d_1$, и отношения равны тогда и только тогда, когда $d_2 = d_1$, т.е. J — центр вписанной окружности.

Пусть теперь центр описанной окружности O, центр вписанной окружности I и ортоцентр H лежат на одной прямой. Эта прямая содержит не более одной вершины треугольника. Пусть она не проходит через вершины A и B. Так как AI, BI — биссектрисы углов HAO, HBO, получаем, что $AH/AO = HI/IO = BH/BO$. Так как $AO = BO$, то $AH = BH$, т.е. треугольник ABC равнобедренный и искомое отношение равно 1 : 1.

9.6. (Я.Ганин, F.Rideau) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. A', B', C', D' — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Докажите, что в четырехугольниках $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответствующие диагонали делятся точками пересечения в одном и том же отношении.

Решение. Используем следующее утверждение.

Пусть $KLMN$ — выпуклый четырехугольник; точки X, Y делят отрезки KL и NM в отношении α; точки U, V делят в отрезки LM и KN в отношении β. Тогда точка пересечения отрезков XY и UV делит первый из них в отношении β, а второй в отношении α (рис.9.6)

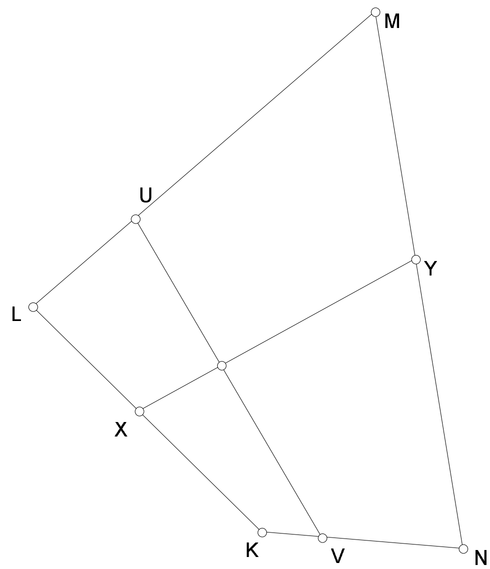


Рис.9.6

Доказательство этого утверждения легко получить методом масс.

Пусть теперь A_1, B_1, C_1, D_1 — центры тяжести треугольников BCD, CDA, DAB, ABC; A_2, B_2, C_2, D_2 — центры описанных около них окружностей. Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ гомотетичен четырехугольнику $ABCD$ относительно его центра тяжести с коэффициентом $-\frac{1}{3}$. Следовательно, соответствующие диагонали этих четырехугольников делятся точками пересечения в одинаковых отношениях. Докажем, что в тех же отношениях делят друг друга диагонали четырехугольника $A_2B_2C_2D_2$.

Пусть P — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Тогда

$$\frac{AP}{CP} = \frac{AP}{BP}\frac{BP}{CP} = \frac{\sin\angle ABD \sin\angle ACB}{\sin\angle BAC \sin\angle CBD}.$$

Поскольку стороны и диагонали четырехугольника $A_2B_2C_2D_2$ перпендикулярны сторонам и диагоналям четырехугольника $ABCD$ (например, точки A_2, B_2 лежат на серединном перпендикуляре к CD), в таком же отношении делится и диагональ A_2C_2.

Пусть теперь P_1, P_2 — точки пересечения диагоналей четырехугольников $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$; P' — точка на отрезке $A'C'$, делящая его в отношении A_2P_2/P_2C_2. Так как точки A_1, C_1 лежат на отрезках $A'A_2$, $C'C_2$ и делят их в отношении $2:1$, из сформулированного утверждения вытекает, что точка P_1 также делит отрезок $P'P_2$ в отношении $2:1$. Рассмотрев аналогичную точку на отрезке $B'D'$, получим тот же результат. Отсюда следует, что P' — точка пересечения диагоналей четырехугольника $A'B'C'D'$, причем диагонали делятся этой точкой в том же отношении, что и в четырехугольниках $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ и $ABCD$.

10 класс

10.1. (Hiacinthos) Пять прямых проходят через одну точку. Докажите, что существует замкнутая пятизвенная ломаная, вершины и середины звеньев которой лежат на этих прямых, причем на каждой прямой лежит ровно по одной вершине.

Решение. Пусть O — точка пересечения прямых. Возьмем на прямой l_1 точку A_1 и найдем на l_3 такую точку A_2, что середина B отрезка A_1A_2 лежит на прямой l_2 (рис.10.1). Применяя теорему синусов к треугольникам OA_1B и OA_2B, получаем, что $\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{\sin\angle A_1OB}{\sin\angle A_2OB}$.

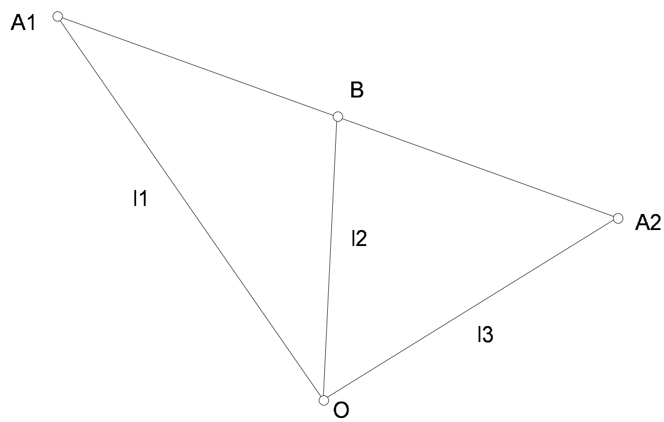


Рис.10.1

Аналогично по точке A_2 построим на прямой l_5 такую точку A_3, что середина A_2A_3 лежит на l_4 и т.д. Перемножив полученные соотношения, получим, что A_6 совпадает с A_1.

10.2. (А.Заславский) Проекции точки X на стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на одной окружности. Y — точка, симметричная X относительно центра этой окружности. Докажите, что проекции точки B на прямые AX, XC, CY, YA также лежат на одной окружности.

Решение. Рассмотрим случай, когда X лежит внутри $ABCD$, остальные разбираются аналогично. Пусть K, L, M, N — проекции X на AB, BC, CD, DA; K', L', M', N' — точки, симметричные X относительно этих прямых. Так как K, L, M, N лежат на окружности, K', L', M', N' также лежат на окружности. Так как $BK' = BX = BL'$, серединный перпендикуляр к отрезку $K'L'$ проходит через B и является биссектрисой угла $K'BL'$, т.е. симметричен BX относительно биссектрисы угла B. Следовательно, четыре прямые, симметричные прямым, соединяющим X с вершинами $ABCD$, относительно биссектрис соответствующих углов, пересекаются в одной точке X', являющейся центром описанной окружности четырехугольника $K'L'M'N'$. При этом центром окружности $KLMN$ будет середина XX', и значит, X' совпадает с Y. Далее, так как четырехугольники $XKBL$, $XLCM$, $XMDN$, $XNAK$ вписанные, $\angle AXB + \angle CXD = \angle KXA + \angle KXB + \angle CXM + \angle DXM = \angle KNA + \angle BLK + \angle CLM + \angle MND = (\pi - \angle KLM) + (\pi - \angle MNK) = \pi$. Отсюда следует, что прямые XB и DX симметричны относительно биссектрисы угла AXC. Аналогично, прямые YB и DY симметричны относительно биссектрисы угла AYC. Кроме того, как уже было показано, совпадают биссектрисы углов BAD и XAY, BCD и XCY. Таким образом, прямые, симметричные BA, BX, BC, BY, относительно биссектрис соответствующих углов $AXCY$, пересекаются в точке D. Отсюда, рассуждая аналогично началу решения, получаем утверждение задачи (рис.10.2).

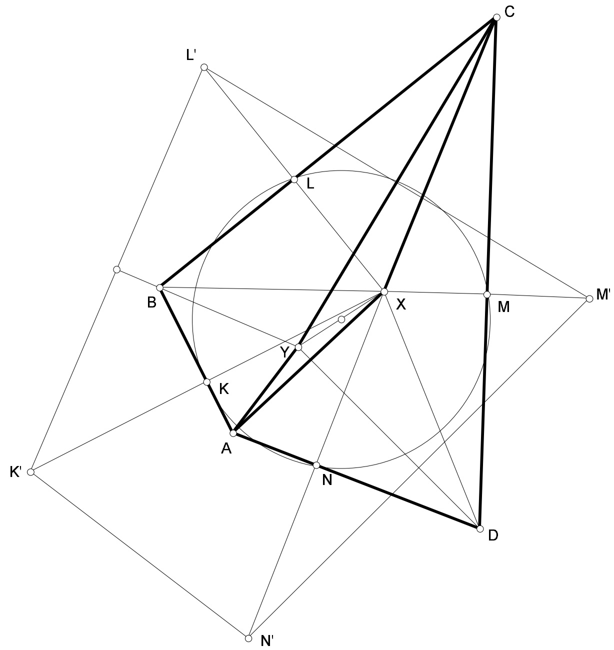


Рис.10.2

10.3. (П.Кожевников) Дана окружность и точка P внутри нее, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P. Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

Решение. Пусть X — точка пересечения касательных. Проведем окружность с центром X и радиусом XP и рассмотрим инверсию относительно нее. При этой инверсии окружности, касающиеся в точке P, перейдут друг в друга, так как они касаются окружности инверсии и двух прямых, переходящих в себя. Следовательно, исходная окружность перейдет в себя. Значит, окружность инверсии ортогональна исходной, т.е. касательная из X к исходной окружности равна XP и X лежит на радикальной оси точки P и исходной окружности. Очевидно, что любая точка радикальной оси может быть получена таким образом, т.е искомое ГМТ совпадает с радикальной осью точки P и исходной окружности.

10.4. (А.Заславский) Прямые, содержащие медианы треугольника ABC, вторично пересекают его описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1. Прямые, проходящие через A, B, C и параллельные противоположным сторонам, пересекают ее же в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Решение (М.Илюхина). Пусть A' — точка пересечения касательных к описанной окружности ω в точках B и C (аналогично построим точки B' и C'). Тогда, как известно, прямая AA' является симедианой треугольника ABC (то есть прямой, симметричной AA_1 относительно биссектрисы угла A). Пусть прямая AA' вторично пересекает ω в точке A_0. Тогда $\angle A_1AB = \angle A_0AC$, откуда дуги BA_1 и CA_0 равны.

Так как треугольник $A'BC$ равнобедренный, а ω — его вневписанная окружность, то они симметричны относительно биссектрисы ℓ угла $BA'C$. Из равенства дуг следует, что при этой симметрии точки A_1 и A_0 переходят друг в друга. Заметим, что ℓ — серединный перпендикуляр к BC, поэтому A при этой симметрии переходит в A_2 (рис.10.4), а, следовательно, прямая A_1A_2 переходит в прямую AA'. Поэтому, так как прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке L как симедианы треугольника ABC, то прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 также пересекаются в точке, изогонально сопряженной L относительно треугольника $A'B'C'$.

Случай, когда одной из точек A', B', C' не существует, аналогичен.

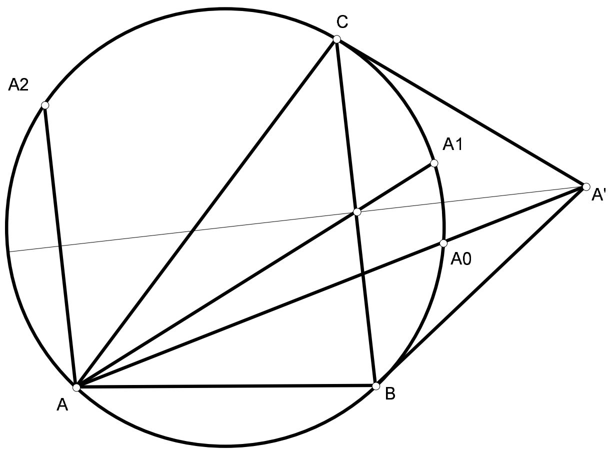


Рис.10.4

10.5. (С.Маркелов) Может ли развертка тетраэдра оказаться треугольником со сторонами 3, 4 и 5 (тетраэдр можно резать только по ребрам)?

Решение. Ответ: да. Например, можно склеить тетраэдр из развертки, показанной на рис.10.5 (меньший катет разделен на три равные части, а гипотенуза в отношении 4 : 1). Нетрудно убедиться, что каждый из трех углов, на которые делится меньший угол треугольника, меньше суммы двух других; следовательно, из такой развертки, действительно, можно склеить тетраэдр.

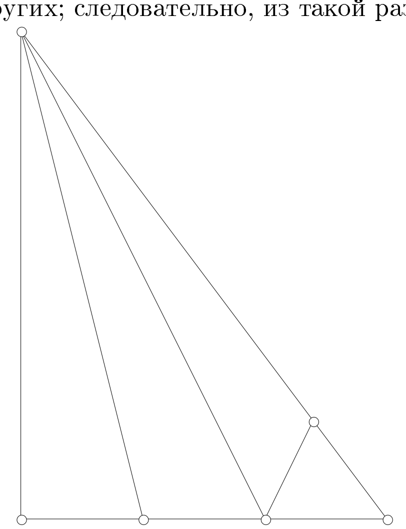


Рис.10.5

10.6. (А.Заславский) На доске был нарисован четырехугольник, в который можно вписать и около которого можно описать окружность. В нем отметили центры этих окружностей и точку пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон, после чего сам четырехугольник стерли. Восстановите его с помощью циркуля и линейки.

Решение. Построение основано на двух леммах.

1. Диагонали всех четырехугольников, вписанных в данную окружность с центром O и описанных около данной окружности с центром I, пересекаются в одной и той же точке L, лежащей на продолжении отрезка OI за точку I.

2. Центр вписанной в четырехугольник окружности лежит на прямой, соединяющей середины его диагоналей (Теорема Монжа).

Отметим также, что в любом четырехугольнике точка M пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон, делит пополам отрезок между серединами диагоналей.

Из леммы 1 следует, что середины диагоналей искомого четырехугольника лежат на окружности с диаметром OL. Отсюда и из леммы 2 получаем, что точка M лежит на окружности, диаметрально противоположными точками которой являются I и середина OL. Поэтому, проведя через M прямую, перпендикулярную IM, и найдя точку ее пересечения с OI, мы получим середину OL, а значит, и саму точку L. Далее, построив окружность с диаметром OL и найдя ее точки пересечения с прямой MI, получим середины диагоналей четырехугольника. Кроме того, рассмотрев четырехугольник, две вершины которого лежат на прямой OI, нетрудно убедиться, что для третьей вершины X XI — биссектриса угла OXL (рис.10.6). Это дает возможность восстановить описанную окружность четырехугольника и найти его вершины, как точки пересечения этой окружности с диагоналями.

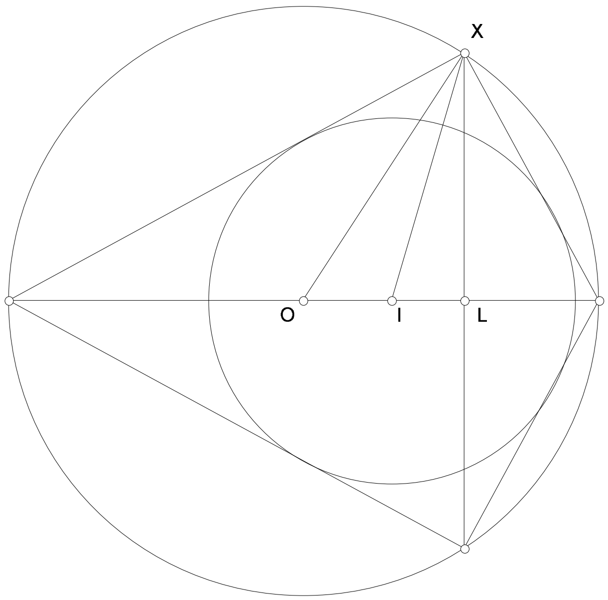
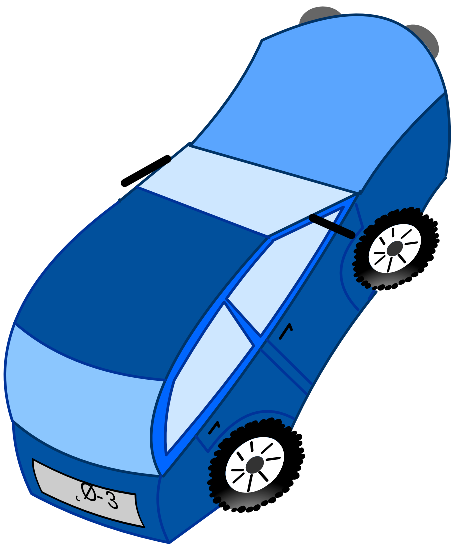


Рис.10.6

III олимпиада по геометрии памяти И.Ф.Шарыгина, 2007 год.
Финал.
8 класс

1. (С.Маркелов) Определите, с какой стороны расположен руль у изображенного на рисунке автомобиля.



Решение. В зеркалах заднего вида водитель должен видеть дорогу сзади автомобиля. Для этого зеркало со стороны водителя должно располагаться почти перпендикулярно оси автомобиля, а с противоположной стороны — под углом, примерно равным 45°. Следовательно, у автомобиля на рисунке руль справа.

2. (Б.Френкин) Восстановите прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) по вершинам A, C и точке на биссектрисе угла B.

Первое решение. Так как треугольник ABC прямоугольный, вершина B лежит на прямой, проходящей через C и перпендикулярной AC. Кроме того, при симметрии относительно биссектрисы угла B точка A переходит в лежащую на этой же прямой точку A', такую что $BA' = BA$. Для любой лежащей на биссектрисе точки L имеем $LA = LA'$, а поскольку $BA > BC$, точки A' и L лежат по разные стороны от прямой AC (рис.8.2.1). Таким образом, получаем следующее построение.

Проведем через C прямую l, перпендикулярную AC.

Проведем окружность с центром L и радиусом LA и найдем точку A' ее пересечения с l, лежащую с L по разные стороны от AC.

Проведем серединный перпендикуляр к отрезку AA' и найдем точку B его пересечения с l.

Задача имеет решение тогда и только тогда, когда $AL > CL$ и $\angle ACL < 90^\circ$.

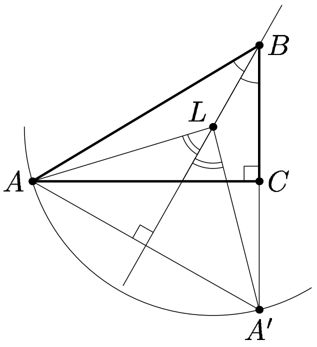


Рис. 8.2.1.

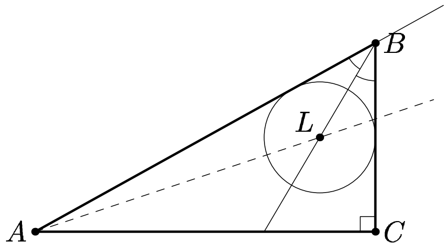


Рис. 8.2.2.

Второе решение. Мы знаем прямую BC — это перпендикуляр к AC, проведенный через C. Построим окружность с центром в точке L, касающуюся BC. Так как BL — биссектриса, то эта окружность касается также и AB. Тогда точка B — это точка пересечения BC и луча из точки A, касающегося нашей окружности. При этом точка пересечения AL и BC лежит на отрезке BC (рис 8.2.2). Такой касательный луч только один (или вовсе нет его).

Построение проходит, когда L и A лежат по одну сторону от BC, а диаметр окружности меньше AC, то есть как раз когда $AL > CL$ и $\angle ACL < 90°$.

Замечание. Если точке L разрешить лежать на *продолжении* биссектрисы (или хотя бы на луче биссектрисы, а не на отрезке!), то решений будет чаще всего два, соответствующие двум касательным.

Третье решение. Аналогично строим прямую BC. Пусть K — точка пересечения AL и BC. Тогда BL — биссектриса в треугольнике ABK, и B лежит на окружности Аполлония для отрезка AK и точки L внутри него. При этом опять надо из двух точек пересечения брать дальнюю от C.

3. (Б.Френкин) Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре подобных треугольника. Докажите, что его можно разрезать на два равных треугольника.

   Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Если, например, угол AOB тупой, то он больше любого из углов треугольника BOC, т. е. треугольники AOB и BOC не могут быть подобны. Следовательно, диагонали четырехугольника перпендикулярны.

   Из подобия прямоугольных треугольников AOB и BOC следует, что угол OAB равен либо углу OCB, либо углу OBC. В первом случае диагональ BD является серединным перпендикуляром к AC, т. е. осью симметрии четырехугольника и, значит, разрезает его на два равных треугольника. Во втором случае угол B прямой.

   Рассуждая аналогично, получаем, что если ни одна из диагоналей не является осью симметрии четырехугольника, то все его углы прямые, а так как диагонали перпендикулярны, то четырехугольник — квадрат. Но диагональ квадрата является его осью симметрии — противоречие.

4. (А.Заславский) Найдите геометрическое место точек пересечения высот треугольников, у которых даны середина одной стороны и основания высот, опущенных на две другие.

Решение. Пусть C_0 — середина стороны AB треугольника ABC, A_1, B_1 — основания высот, опущенных на стороны BC, AC. Так как треугольники ABA_1, ABB_1 — прямоугольные, их медианы A_1C_0, B_1C_0 равны половине гипотенузы AB. Следовательно, если для данных точек $C_0A_1 \neq C_0B_1$, то искомое ГМТ — пустое множество. Это же верно и в случае, когда C_0 — середина A_1B_1, ибо $A_1B_1 = AB\cos C < AB$.

Если же $A_1B_1C_0$ — равнобедренный треугольник, то точки A, B лежат на окружности ω с центром C_0 и радиусом $C_0A_1 = C_0B_1$, причем являются концами диаметра этой окружности. Если треугольник ABC остроугольный, то его ортоцентр H является пересечением хорд AA_1 и BB_1 этой окружности (рис.8.4). Тогда угол A_1HB_1 равен полусумме дуг A_1B_1 и AB, т. е. $90° + \frac{\angle A_1C_0B_1}{2}$. Следовательно, точка H лежит на дуге окружности с концами A_1, B_1, вмещающей этот угол. Аналогично, если треугольник ABC тупоугольный, то H лежит на дополнительной дуге этой же окружности. Если же AB — катет прямоугольного треугольника, то его ортоцентр совпадает с вершиной прямого угла, т. е. с одной из точек A_1, B_1, и значит, также лежит на этой окружности.

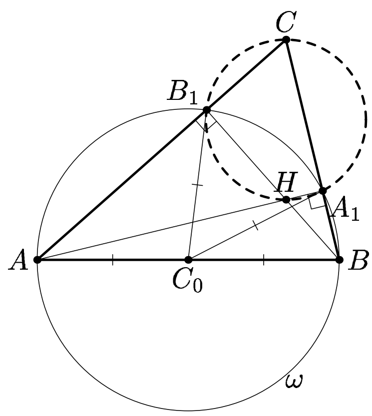


Рис. 8.4.

С другой стороны, если мы возьмем точку H на нашей окружности, то прямые A_1H и B_1H пересекают окружность ω в диаметрально противоположных точках. Тогда это — точки A и B, а C есть пересечение AB_1 и AA_1; таким образом, треугольник ABC существует для любой точки H нашей окружности. Следовательно, искомым ГМТ будет вся окружность.

5. (С.Берлов) Медианы AA' и BB' треугольника ABC пересекаются в точке M, причем $\angle AMB = 120°$. Докажите, что углы $AB'M$ и $BA'M$ не могут быть оба острыми или оба тупыми.

Решение. Если $AA' = BB'$, то $A'M = AA'/3 = BB'/3 = BM/2$. Отсюда и из того, что $\angle A'MB = 60°$, получаем, что $\angle BA'M = 90°$. Аналогично $\angle AB'M = 90°$.

Пусть теперь $AA' > BB'$, X — проекция B на AA', Y — проекция A на BB' (рис.8.5). Тогда $MX = MB/2 < MA'$, $MY = MA/2 > MB'$ и, следовательно, $\angle BA'M < 90° < \angle AB'M$.

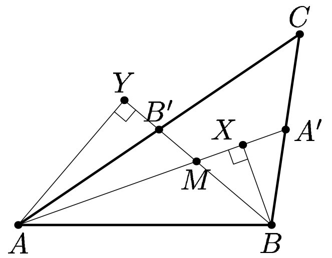


Рис. 8.5.

6. (Б.Френкин) Назовем два неравных треугольника *похожими*, если можно обозначить их ABC и $A'B'C'$, так чтобы выполнялись равенства $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\angle B = \angle B'$. Существуют ли три попарно похожих треугольника?

   Решение. Да, существуют. Например, пусть XYZ — правильный треугольник, P — точка на дуге XY описанной около него окружности, отличная от середины дуги (рис.8.6). Тогда треугольники XPY, YPZ, ZPX попарно не равны. При этом в треугольниках XPZ и YPZ сторона PZ общая, $XZ = YZ$ и $\angle XPZ = \angle YPZ = 60°$. В треугольниках XPZ и XPY сторона XP общая, $XZ = XY$ и $\angle PZX = \angle PYX$. Аналогично находятся равные элементы в треугольниках PXY и PYZ.

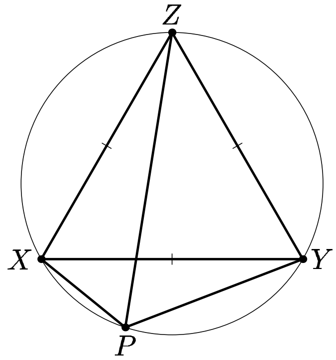


Рис. 8.6.

9 класс

1. (Б.Френкин) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Докажите, что радиус этой окружности меньше суммы радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD.

   Первое решение. Пусть ℓ — касательная к окружности, вписанной в треугольник ABC, параллельная AC; ℓ_1, ℓ_2 — касательные к вписанной окружности четырехугольника, параллельные ℓ. Рассмотрим гомотетию с центром B, переводящую окружность, вписанную в треугольник ABC, во вписанную окружность четырехугольника. Она переводит прямые ℓ и AC в ℓ_1 и ℓ_2 соответственно. Поскольку AC лежит ближе к B, чем ℓ_2, то ℓ лежит ближе к B, чем ℓ_1, т. е. вписанная в четырехугольник окружность не пересекает прямой ℓ. Аналогично она не пересекает параллельной AC прямой, касающейся окружности, вписанной в треугольник ACD, и значит, лежит внутри полосы, образованной этими двумя прямыми. Но ширина этой полосы равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники.

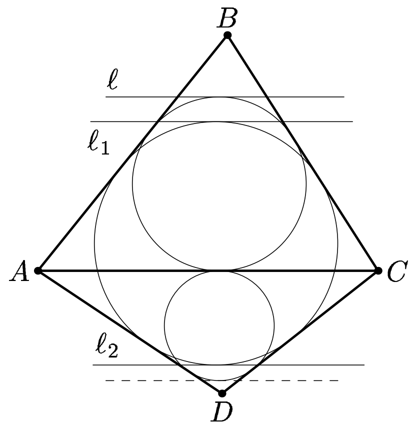


Рис. 9.1.

Второе решение. Пусть r, r_1, r_2 — радиусы вписанных окружностей четырехугольника $ABCD$ и треугольников ABC, ACD соответственно; p, p_1, p_2 — их полупериметры. Тогда $p > p_1$, $p > p_2$ и

$$pr = S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = p_1r_1 + p_2r_2 < p(r_1 + r_2).$$

Третье решение. Пусть диагонали пересекаются в точке O. Проведем касательную ℓ_1 ко вписанной в $ABCD$ окружности ω, параллельную AC и отделяющую B от AC. Такая, очевидно, есть. Тогда из гомотетии, переводящей ω в окружность, вписанную в ABC, имеем, что коэффициент гомотетии r_2/r больше, чем отношение расстояний от D до O и до B, то есть больше DO/BD. Из аналогичных соображений $r_1/r > BO/BD$. Складывая, получаем требуемое.

2. (А.Хачатурян) На основании AD и боковой стороне AB равнобедренной трапеции $ABCD$ взяты точки E, F соответственно так, что $CDEF$ — также равнобедренная трапеция. Докажите, что $AE \cdot ED = AF \cdot FB$.

Первое решение. Из условия задачи следует, что $\angle DCF = \angle CDA = \angle DAB = \angle FEA$ (рис.9.2). Следовательно, $\angle BCF = \angle AFE$ и

$$\frac{BF}{ED} = \frac{BF}{FC} = \frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle CBF} = \frac{\sin\angle AFE}{\sin\angle FEA} = \frac{AE}{AF},$$

что равносильно утверждению задачи

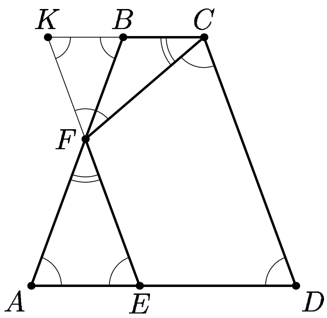


Рис. 9.2.

Второе решение. Пусть прямая EF пересекает BC в точке K. Тогда $\angle FKC = \angle FEA = \angle CDA = \angle BAD = \angle KFC$, поэтому равнобедренные треугольники CFK и FAE подобны, и $CF/AF = FK/AE = FB/AE$. Отсюда $DE \cdot AE = CF \cdot AE = FB \cdot AF$, что и требовалось.

3. (А.Заславский) В шестиугольнике $ABCDEF$ $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$ и $\angle A = \angle C = \angle E$. Докажите, что главные диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.

   Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ACF. Тогда O лежит на серединных перпендикулярах к отрезкам AC, CE, EA, которые совпадают с биссектрисами углов B, D, F шестиугольника. Кроме того, из симметрии имеем $\angle BAO = \angle BCO$, $\angle DCO = \angle DEO$, $\angle FAO = \angle FEO$. Так как попарные суммы этих углов по условию равны, то равны и они сами, то есть AO, CO, EO — тоже биссектрисы углов шестиугольника (рис.9.3) и O — центр вписанной в него окружности. Значит, по теореме Брианшона главные диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.

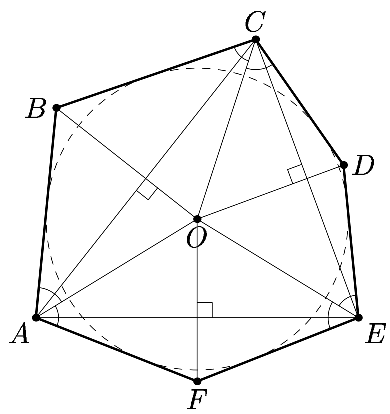


Рис. 9.3.

4. (С.Тахаев) Дан треугольник ABC. Точка P лежит на окружности ABH, где H — ортоцентр треугольника. Прямые AP, BP пересекают противоположные стороны треугольника в точках A', B'. Найдите ГМТ середин отрезков $A'B'$.

   Первое решение. Пусть AA_1, BB_1 — высоты в треугольнике ABC. Тогда $\angle A'AA_1 = \angle PAH = \angle PBH = \angle B'BB_1$. Следовательно, треугольники $A'AA_1$ и $B'BB_1$ подобны и отношение $A'A_1/B'B_1$ не зависит от точки P. Значит, когда точка A' движется по прямой BC с постоянной скоростью, точка B' движется по прямой AC также с постоянной скоростью и середина отрезка $A'B'$ тоже движется по прямой. Взяв в качестве P точки пересечения окружности с AC и BC, отличные от вершин треугольника, убеждаемся, что эта прямая совпадает с A_1B_1 (рис. 9.4).

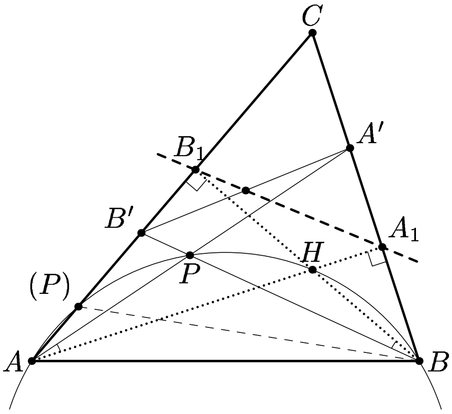


Рис. 9.4.

Второе решение. Опять заметим, что треугольники AA_1A' и BB_1B' подобны с коэффициентом подобия $\dfrac{AA_1}{BB_1} = \dfrac{AC}{BC}$. Таким образом, $\dfrac{A_1A'}{B_1B'} = \dfrac{AC}{BC}$, а значит, отношение расстояний от A' и B' до A_1B_1 равно

$$\frac{A_1A' \sin CA_1B_1}{B_1B' \sin CB_1A_1} = \frac{AC}{BC}\frac{\sin CAB}{\sin CBA} = 1,$$

то есть середина $A'B'$ лежит на A_1B_1.

Наоборот, для каждой точки на прямой A_1B_1 можно построить хорду $A'B'$ угла BAC, которая делится этой точкой пополам. Тогда $\dfrac{AA'}{BB'} = \dfrac{AC}{BC}$, и все рассуждения проходят в обратную сторону.

5. (А.Заславский) Постройте треугольник, если даны центр вписанной в него окружности, середина одной из сторон и основание опущенной на эту сторону высоты.

Первое решение. Пусть C_0 — середина стороны AB треугольника ABC, C_1, C_2 — основания проведенных к этой стороне высоты и биссектрисы, C_3, C_4 — точки ее касания с вписанной и вневписанной окружностями. Тогда $C_0C_3 = C_0C_4$. Перпендикуляры к AB, проведенные из точек C_1, C_3, C_4, пересекают биссектрису угла C в вершине и центрах I, I' вписанной и вневписанной окружностей. Так как точки C и C_2 являются центрами гомотетии этих окружностей, $CI/C_2I = CI'/C_2I'$. Значит, $C_1C_3/C_2C_3 = C_1C_4/C_2C_4$, т. е. $C_0C_3^2 = C_0C_1 \cdot C_0C_2$.

Пусть теперь даны точки I, C_0, C_1. Тогда найдем точки C_3 как проекцию I на C_0C_1 и C_2, пользуясь полученным выше соотношением. Теперь точка C находится как пересечение C_2I и перпендикуляра к C_0C_1, проведенного через C_1. Далее, точка C' пересечения CI и перпендикуляра к C_0C_1, проведенного через C_0, лежит на описанной окружности треугольника (рис.9.5.1). Центр этой окружности является пересечением $C'C_0$ и серединного перпендикуляра к CC'; поэтому, проведя эту окружность и найдя точки ее пересечения с C_0C_1, мы построим искомый треугольник.

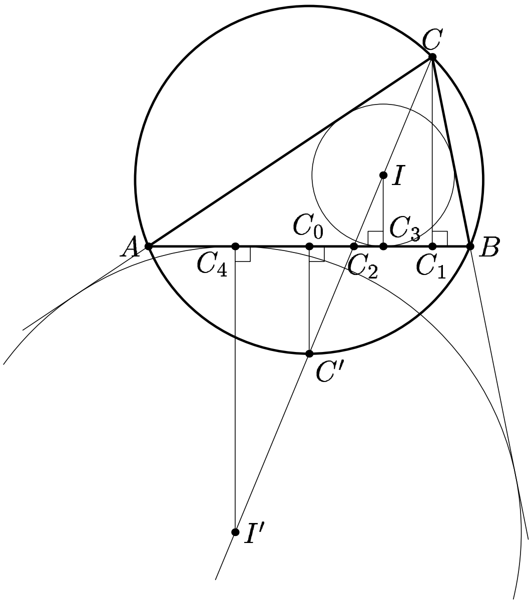


Рис. 9.5.1.

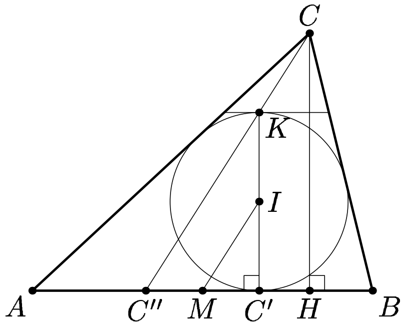


Рис. 9.5.2.

Второе решение. Пусть M, H — основания медианы и высоты из вершины C треугольника ABC, I — центр вписанной окружности, C' и C'' — точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной AB, K — точка на вписанной окружности, диаметрально противоположная C'. Из гомотетии, переводящей вписанную окружность во вневписанную, получаем, что C, K, C'' лежат на одной прямой. Далее, $MC' = MC''$, поэтому IM — средняя линия в треугольнике $KC'C''$ и $IM \parallel C''C$.

Теперь последовательно восстанавливаем прямую $AB = MH$; вписанную окружность и точку C'; точки C'' и K как симметричные C' относительно M и I; вершину C как пересечение перпендикуляра к AB в точке H и прямой $C''K$; точки A и B, как пересечения касательных ко вписанной окружности из точки C (рис.9.5.2).

6. (Т.Караваева, А.Заславский) Куб с ребром $2n+1$ разрезают на кубики с ребром 1 и бруски размера $2 \times 2 \times 1$. Какое наименьшее количество единичных кубиков может при этом получиться?

Ответ: $2n+1$.

Решение. Разрежем куб плоскостями, параллельными какой-нибудь грани, на слои $(2n+1) \times (2n+1) \times 1$. Так как любой полукирпич $2 \times 2 \times 1$ пересекает каждый слой по четному числу единичных кубиков, в каждом слое должен содержаться хотя бы один кубик, т. е. общее число кубиков не меньше, чем $2n+1$. Покажем по индукции, что разрезание с $2n+1$ единичным кубиком существует. Предположим, что куб с ребром $2n-1$ разрезать требуемым образом можно. Рассмотрим оболочку, которая получается, если из куба с ребром $2n+1$ удалить все внутренние кубики. Если удалить из этой оболочки два кубика, стоящие в противоположных углах, то оставшуюся часть можно разбить на 6 квадратов $2n \times 2n \times 1$, каждый из которых содержит один из оставшихся угловых кубиков. Следовательно, оболочку можно разрезать на полукирпичи и два единичных кубика, а внутренность куба по предположению индукции — на полукирпичи и $2n-1$ кубик.

10 класс

1. (Б.Френкин) В остроугольном треугольнике отметили отличные от вершин точки пересечения описанной окружности с высотами, проведенными из двух вершин, и биссектрисой, проведенной из третьей вершины, после чего сам треугольник стерли. Восстановите его.

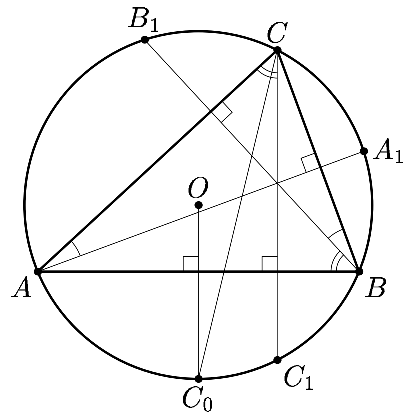


Рис. 10.1.

Решение. Пусть биссектриса угла C пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке C_0, а высоты, проведенные из вершин A, B — в точках A_1, B_1. Так как $\angle A_1AC = \angle B_1BC = 90^\circ - \angle C$, точка C является серединой дуги A_1B_1, не содержащей C_0. Далее, прямая OC_0 является серединным перпендикуляром к AB, и значит, параллельна высоте, проведенной из C. Проведя эту высоту, найдем вторую точку C_1 ее пересечения с окружностью и затем найдем точки A, B, как середины дуг B_1C_1 и A_1C_1 (рис.10.1).

2. (В.Протасов) Точки A', B', C' — основания высот остроугольного треугольника ABC. Окружность с центром B и радиусом BB' пересекает прямую $A'C'$ в точках K и L (точки K и A лежат по одну сторону от BB'). Докажите, что точка пересечения прямых AK и CL лежит на прямой BO, где O — центр окружности, описанной около ABC.

Первое решение. Так как ортоцентр треугольника ABC является центром вписанной окружности треугольника $A'B'C'$, точка, симметричная B' относительно AB, лежит на прямой $A'C'$, т. е. совпадает с K. Аналогично B' и L симметричны относительно BC. Отсюда следует, что $\angle AKC' = \angle AB'C' = \angle CB'A' = \angle CL'A'$, т. е. точка пересечения AK и CL лежит на серединном перпендикуляре к отрезку KL. Так как $BK = BB' = BL$, этот серединный перпендикуляр совпадает с биссектрисой угла KBL, которая в силу равенства $\angle OBA = \angle B'BC = 90^\circ - \angle C$ проходит через O (рис.10.2.1).

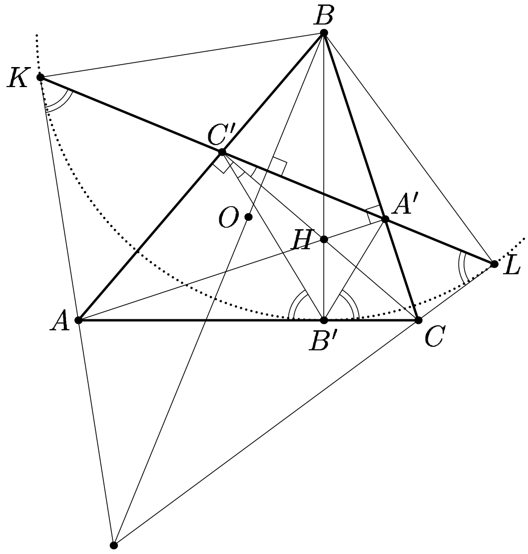


Рис. 10.2.1.

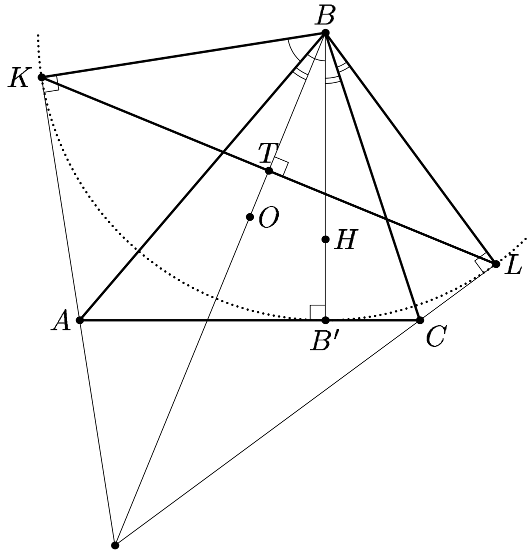


Рис. 10.2.2.

Второе решение. Пусть BT — высота в $\triangle BA'C'$. Как известно, O лежит на BT. Из подобия $BA'C'$ и BCA имеем $BT/BK = BT/BB' = BA'/BC = \cos ABC$, поэтому $\angle KBT = \angle LBT = \angle ABC$. Тогда $\angle KBA = \angle KBT - \angle ABT = \angle ABC - \angle CBB' = \angle ABB'$. Тогда точки K и B' симметричны относительно AB, поэтому AK (и аналогично CL) — касательные к нашей окружности в точках K и L. Они пересекаются на биссектрисе $\angle KBL$, т. е. на $BT = BO$ (рис.10.2.2).

3. (А.Заславский) Даны две окружности, пересекающиеся в точках P и Q. C — произвольная точка одной из окружностей, отличная от P и Q; A, B — вторые точки пересечения прямых CP, CQ с другой окружностью. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников ABC.

   Первое решение. Пусть C_1 — точка, диаметрально противоположная C, C_2 — точка, симметричная C_1 относительно центра O второй окружности. Тогда, так как $C_1P \perp AC$, а проекцией O на AC является середина отрезка PA, $C_2A \perp AC$. Аналогично, $C_2B \perp AB$. Значит, центром описанной около ABC окружности будет середина отрезка CC_2. При этом CC_2 параллелен отрезку между центрами окружностей и вдвое его длиннее. Следовательно, искомым ГМТ будет окружность, полученная из той, на которой лежит точка C, переносом на вектор, определяемый центрами данных окружностей, без точек, соответствующих P и Q (рис.10.3).

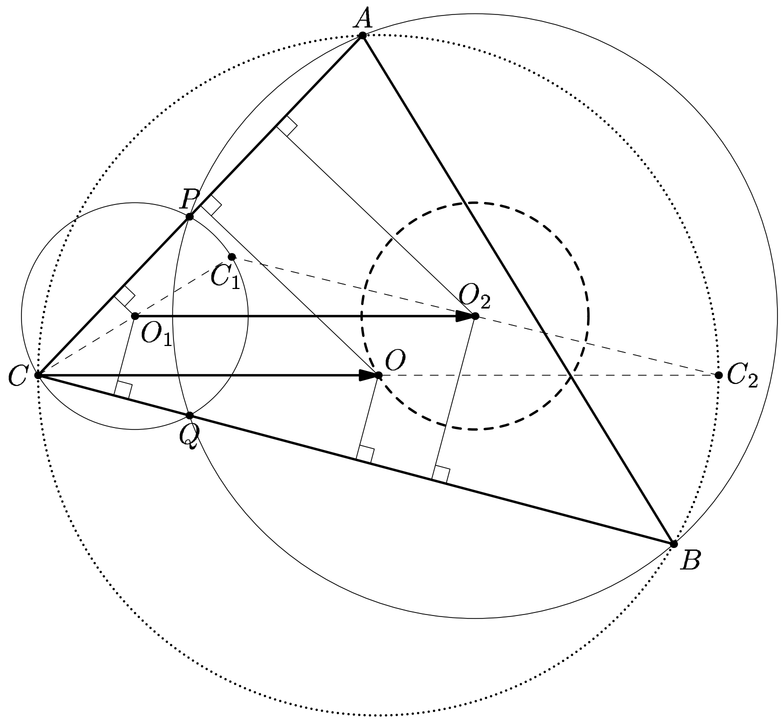


Рис. 10.3.

Второе решение. Пусть O_1 и O_2 — центры исходных окружностей, а O — центр окружности ABC. Тогда проекции O_1 и O_2 на AC — середины отрезков CP и PA, поэтому проекция $\overrightarrow{O_1O_2}$ равна $\overrightarrow{CA}/2$. Аналогично, его проекция на CB есть $\overrightarrow{CA}/2$. Значит, проекции $\overrightarrow{O_1O_2}$ и $\overrightarrow{CO}$ на эти прямые совпадают, а значит, $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{CO}$. Тогда для каждой точки C точка O получается переносом на вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$, а значит, искомое ГМТ — окружность, полученная переносом первой окружности на этот вектор, кроме точек, соответствующих P и Q.

4. (А.Заславский) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Точки C', D' симметричны ортоцентрам треугольников ABD и ABC относительно O. Докажите, что если прямые BD и BD' симметричны относительно биссектрисы угла B, то прямые AC и AC' симметричны относительно биссектрисы угла A.

   Первое решение. Покажем, что произведения расстояний от O до противоположных сторон четырехугольника равны. Действительно, если X, Y — проекции D' на BC и AB, а X', Y' — основания высот треугольника ABC, опущенных на эти же стороны, то отношение расстояний от O до AD и CD равно

$$\frac{\cos\angle ABD}{\cos\angle CBD} = \frac{\cos\angle CBD'}{\cos\angle ABD'} = \frac{BX}{BY} = \frac{CX'}{AY'} = \frac{\cos\angle BCA}{\cos\angle BAC},$$

   т. е. отношению расстояний от O до AB и BC. Покажем, что по трем вершинам четырехугольника, обладающего этим свойством, четвертая определяется однозначно, т. е. оно равносильно как условию задачи, так и ее заключению.

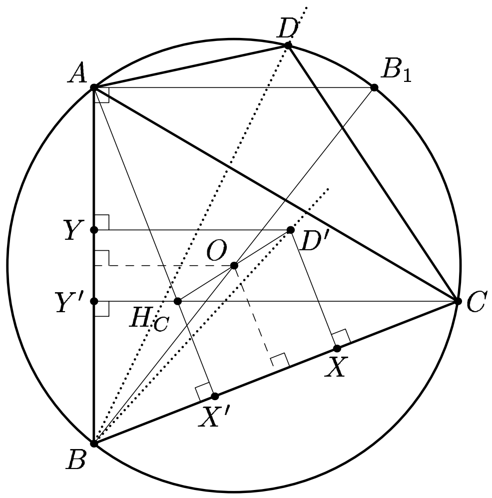


Рис. 10.4.1

Итак, пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, в котором произведения расстояний от центра описанной окружности до противоположных сторон равны. Рассмотрим четырехугольник AB_1CD_1, где B_1, D_1 — точки, диаметрально противоположные B, D. Очевидно, что, например, AB_1 равно удвоенному расстоянию от центра окружности до AB, т. е. наше свойство равносильно тому, что четырехугольник AB_1CD_1 — гармонический. Но в гармоническом четырехугольнике три вершины однозначно определяют четвертую.

Второе решение. Отметим на нашей окружности ω точки C'' и D'' такие, что BD и BD'' симметричны относительно биссектрисы угла B, а AC и AC'' симметричны относительно биссектрисы угла A. Тогда имеем $\smile AD'' = \smile DC = \smile C''B$, то есть C'' и D'' симметричны относительно серединного перпендикуляра d к отрезку AB. Заметим, что точки B, D' и D'' лежат на одной прямой.

Выясним, как строятся точки C' и D'. Пусть отрезок $A'B'$ симметричен отрезку AB относительно O, а ℓ — прямая, параллельная AB и проходящая через точку O — центр ω. Тогда вторая точка пересечения высоты CH_C треугольника ABC с ω получается из C симметрией относительно ℓ, а ортоцентр H_C из этой точки — симметрией относительно AB; наконец, D' получается из H_C симметрией относительно O. Композиция этих трех преобразований — симметрия относительно середины K отрезка $A'B'$ (см. рис.10.4.2). Итак, точки C' и D' лежат на окружности ω', симметричной ω относительно K.

Суммируем полученные результаты. Нам нужно доказать, что точки A, C', C'' лежат на одной прямой, то есть — что прямые BD' и AC' симметричны относительно d. Покажем для этого, что точка C' при отражении относительно d попадает на прямую BD', а точнее — во вторую точкой пересечения BD' и ω' (обозначим эту точку через D'_0). Это эквивалентно тому, что D и D'_0 симметричны относительно $A'B'$.

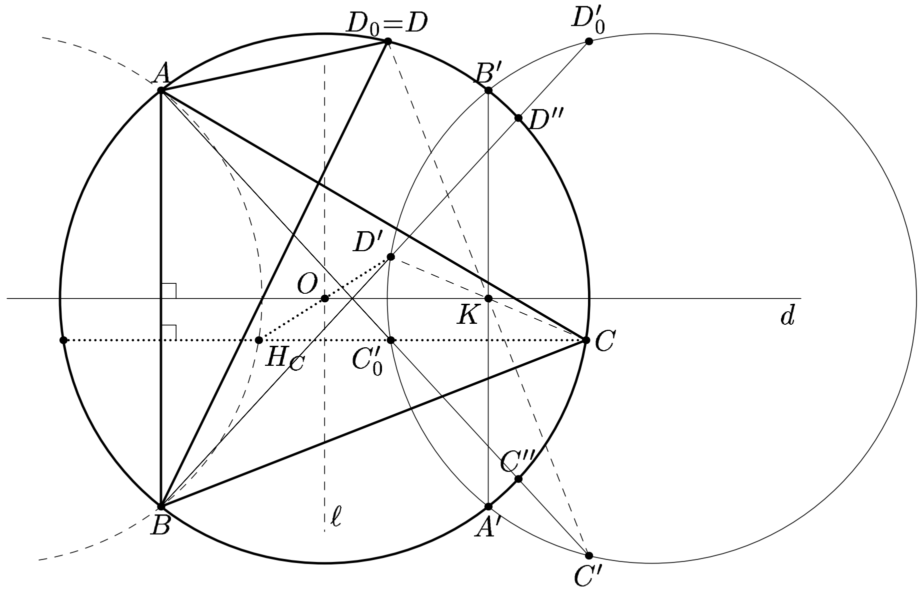


Рис. 10.4.2

Итак, пусть D_0 — точка, симметричная D_0' относительно $A'B'$. Тогда

$$\smile AD'' = 2\angle ABD'' = 2\angle(B'A', D'D'') = \smile A'D' + \smile B'D_0' = \smile B'C' + \smile D_0B',$$

последнее равенство — в силу симметрий. Итак, $\smile AD'' = \smile D_0C$, что и означает $D = D_0$.

5. (А.Заславский) Каждое ребро выпуклого многогранника параллельно перенесли на некоторый вектор так, что ребра образовали каркас нового выпуклого многогранника. Обязательно ли он равен исходному?

Первое решение. Нет. Рассмотрим, например, правильный икосаэдр. Пять его граней, имеющие общую вершину, являются боковыми гранями правильной пятиугольной пирамиды. Центры этих граней образуют правильный пятиугольник, стороны которого параллельны сторонам основания пирамиды. Поэтому ребра икосаэдра параллельны ребрам додекаэдра, образованного центрами его граней. Следовательно, параллельно перенеся ребра икосаэдра, можно получить додекаэдр.

Второе решение. Рассмотрим призму $ABCA'B'C'$ с разносторонним треугольником ABC в основании. Пусть B_1 — середина BB', а точки A_1 и C_1 расположены на ребрах AA' и CC' так, что $AA_1 = C'C_1$ (рис.10.5).

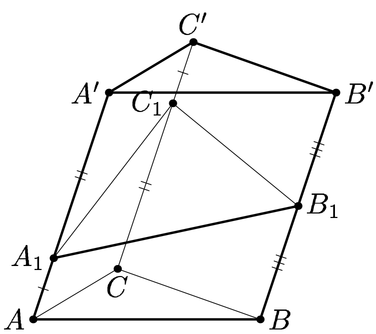


Рис. 10.5.

Тогда в многогранниках $ABCA_1B_1C_1$ и $A'B'C'A_1B_1C_1$ ребра удовлетворяют условию. Легко подобрать параметры так, чтобы все ребра в каждом из них были различными, а двугранный угол при AB — непрямым. Тогда эти многогранники не могут быть равными, так как двугранные углы при одинаковых ребрах AB и $A'B'$ дополнительны и потому различны.

6. (В.Протасов) Даны две концентрические окружности. Каждая из окружностей b_1 и b_2 касается внешним образом одной окружности и внутренним — другой, а каждая из окружностей c_1 и c_2 касается внутренним образом обеих окружностей. Докажите, что 8 точек, в которых окружности b_1, b_2 пересекают c_1, c_2, лежат на двух окружностях, отличных от b_1, b_2, c_1, c_2. (Некоторые из этих окружностей могут выродиться в прямые.)

Первое решение. Обозначим концентрические окружности через ω и ω', их центр — O, точки касания ω с b_1, b_2, c_1, c_2 — через B_1, B_2, C_1, C_2, точки касания ω' с ними же — через B_1', B_2', C_1', C_2'. Все углы и дуги предполагаем ориентированными, углы mod 180°, дуги mod 360°.

Рассмотрим пару b_i, c_k. Рассмотрим точку B_i'', диаметрально противоположную B_i на ω. Тогда $B_iC_k \perp B_i''C_k \parallel B_i'C_k'$ (последнее — т. к. C_kC_k' и B_iB_i' проходят через O). Пусть прямые $B_i'C_k'$ и B_iC_k пересекаются в точке X_{ik}. Тогда $\angle B_i'X_{ik}B_i = \angle C_k'X_{ik}C_k = 90°$, т. е. это одна из точек пересечения b_i и c_k. Другую точку их пересечения мы обозначим через Y_{ik}. Заметим, что дуги B_iC_k, B_iX_{ik} и $X_{ik}C_k$ окружностей ω, b_i и c_i имеют одинаковую градусную меру, ибо они гомотетичны. Поэтому $\angle B_iY_{ik}X_{ik} = \angle X_{ik}Y_{ik}C_k = \frac{1}{2} \smile B_iC_k$ (рис. 10.6.1).

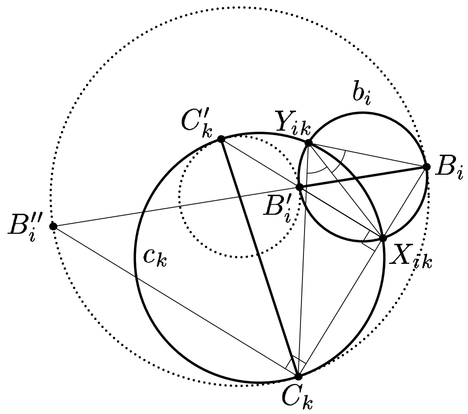


Рис.10.6.1

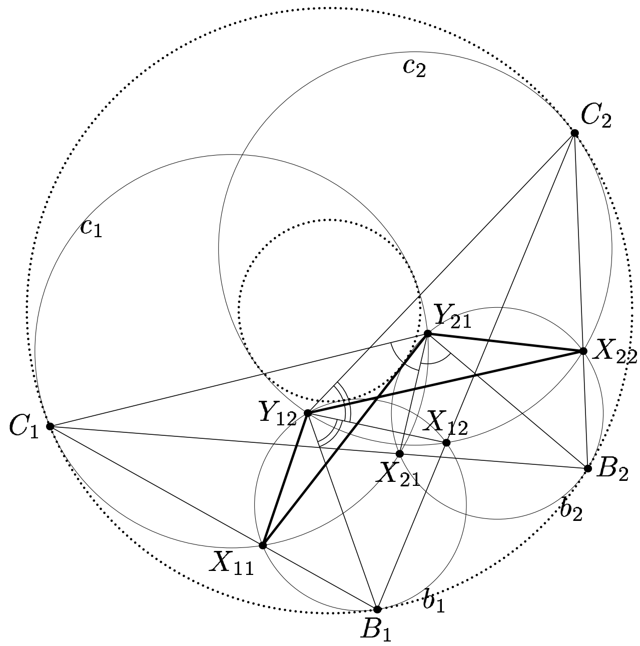


Рис.10.6.2

Покажем, что точки X_{11}, X_{22}, Y_{12} и Y_{21} лежат на одной окружности. Имеем (напомним — mod 180°; см. рис. 10.6.2)

$$\angle X_{11}Y_{12}X_{22} = \angle X_{11}Y_{12}B_1 + \angle B_1Y_{12}C_2 + \angle C_2Y_{12}X_{22} = \frac{\smile C_1B_1 + 2 \smile B_1C_2 + \smile C_2B_2}{2}.$$

Аналогично,

$$\angle X_{22}Y_{21}X_{11} = \frac{\smile C_2B_2 + 2 \smile B_2C_1 + \smile C_1B_1}{2},$$

и

$$\angle X_{11}Y_{12}X_{22} + \angle X_{22}Y_{21}X_{11} = \smile C_1B_1 + \smile B_1C_2 + \smile C_2B_2 + \smile B_2C_1 = 0,$$

что и требовалось.

Замечание. Приведем другой (может быть, более естественный) способ выяснить ту же информацию про точки X_{ik} и Y_{ik}. Здесь в одном месте намеренно пропущена деталь, которая впоследствии восстанавливается.

Пусть X и Y — точки пересечения b_i и c_k. Тогда обозначим через Y^b и Y^c проекции точки Y на ω из точек B_i и C_k, соответственно. Эти точки являются образами Y при гомотетиях, переводящих соответственно b_i и c_k в ω. Обозначим радиусы ω и ω' через R и r. Радиусы b_j и c_k равны $\frac{R-r}{2}$ и $\frac{R+r}{2}$, поэтому имеем

$$\frac{YY^c}{YC_k} = \frac{Y^cC_k}{YC_k} - 1 = \frac{R}{(R+r)/2} - 1 = \left(\frac{R}{(R-r)/2} - 1\right)^{-1} = \left(\frac{B_kY^b}{YB_k} - 1\right)^{-1} = \frac{YB_k}{YY^b},$$

то есть, вроде бы, $Y^bC_k \parallel Y^cB_j$. Тогда $\angle B_iYC_k = \smile B_iC_k$. но такая точка на окружности b_i (отличная от B_i) одна, что странно, ибо рассуждения проходят и для точки X (рис.10.6.3).

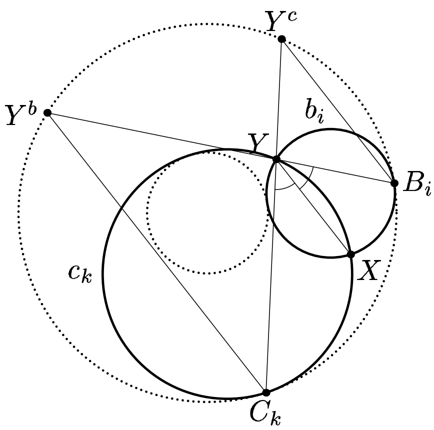


Рис.10.6.3

На самом деле, мы пользовались тем, что точка Y *не лежит на прямой* B_iC_k (иначе все рассматриваемые точки лежат на этой прямой, и из равенства отношений нельзя вывести параллельность). Значит, одна из точек пересечения лежит на этой прямой. Для окружностей b_i и c_k, обозначим через X_{ik} их точку пересечения, не лежащую на прямой B_iC_k, а через Y_{ik} — лежащую. Далее решение может быть продолжено как и выше.

Второе решение. Сформулируем сначала несколько вспомогательных утверждений.

Теорема Птолемея. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность тогда и только тогда, когда выполнено равенство $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

Теорема Кези. Пусть даны четыре окружности. Окружность, касающаяся их всех, существует тогда и только тогда, когда отрезки общих касательных к окружностям удовлетворяют равенству, аналогичному теореме Птолемея. При этом для каждой пары окружностей надо брать отрезок общей внешней касательной, если искомая окружность касается их одинаковым (внешним или внутренним) образом, и отрезок общей внутренней касательной в противном случае.

Теорема Кези является обобщением теоремы Птолемея и легко из нее выводится.

Следствие. Пусть на сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки X, Y, такие что $XY \parallel AB$. Тогда существует окружность, проходящая через X, Y и касающаяся одинаковым образом вневписанных окружностей треугольника, вписанных в углы A и B.

Доказательство. Применим теорему Кези к двум вневписанным окружностям и двум вырожденным окружностям X и Y.

Лемма. Пусть даны две окружности, лежащие одна вне другой. Произвольная окружность, касающаяся их одинаковым образом, пересекает одну из их общих внутренних касательных в точках A и A', а другую — в точках B и B'. Тогда среди прямых AB, AB', $A'B$, $A'B'$ найдутся две, параллельные общим внешним касательным к данным окружностям.

Действительно, зафиксируем точку A на одной из внутренних касательных. Через нее можно провести две окружности, касающиеся данных одинаковым образом. По следствию из теоремы Кези, каждая из этих окружностей проходит через одну из точек пересечения второй внутренней касательной с прямыми, проходящими через A и параллельными внешним касательным (см. рис. 10.6.4). Значит, одна из таких точек совпадает, например, с точкой B, т. е. прямая AB параллельна одной из общих внешних касательных. Тогда, поскольку четырехугольник $ABB'A'$ — вписанный, то прямая $A'B'$ параллельна второй внешней касательной.

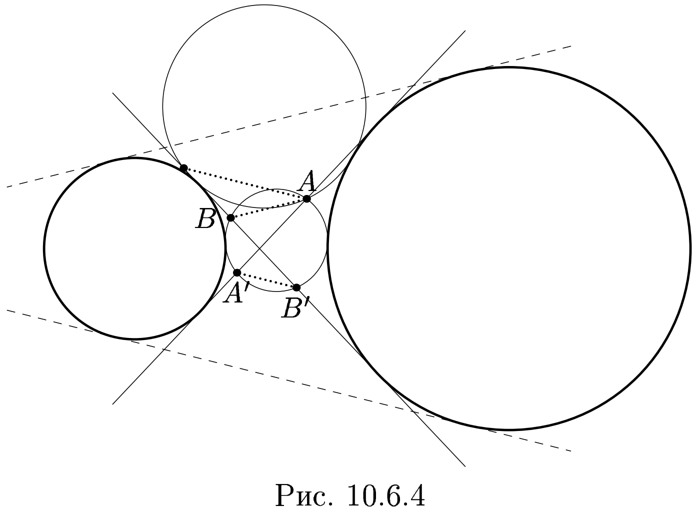


Рис. 10.6.4

Вернемся теперь к решению исходной задачи. Очевидно, что окружности c_1 и c_2 пересекаются. Инверсия с центром в одной из точек их пересечения переводит эти окружности в прямые l_1, l_2, а исходные концентрические окружности в две окружности, для которых l_1, l_2 являются общими внутренними касательными. Окружности

b_1, b_2 перейдут в две окружности, касающиеся этих окружностей одинаковым образом. Пусть одна из них пересекает l_1 в точках A_1, A_1', а l_2 — в точках A_2, A_2'. Аналогично вторая окружность пересекает эти прямые в точках B_1, B_1', B_2, B_2'. Тогда по лемме получаем, что, например, $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ и, значит, точки A_1, A_2, B_1', B_2' лежат на одной окружности. Аналогично доказывается, что остальные четыре точки лежат на одной окружности. Сделав теперь обратную инверсию, получим утверждение задачи.

Третье решение. Будем использовать два вспомогательных факта. Первый состоит в том, что геометрическое место точек, отношение степеней которых относительно двух данных окружностей равно заданному числу, является окружностью или прямой. Это можно доказать, например, методом координат. Напомним, что степенью точки M относительно окружности называется число $d^2 - r^2$, где r – радиус окружности и d – расстояние от ее центра до точки M. Второй вспомогательный факт сформулируем в виде леммы.

Лемма 1. Две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами r_1, r_2 пересекаются в точках A и B. Пусть P — четвертая вершина параллелограмма O_2AO_1P. Тогда для любой окружности с центром P, пересекающей обе окружности (первую — в точках M_1, N_1, вторую — в точках M_2, N_2, рис.10.6.5) прямые M_1M_2 и N_1N_2 проходят через точку A и $\frac{AN_1}{AM_2} = \frac{AM_1}{AN_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

Доказательство. Треугольники PO_1M_1 и M_2O_2P равны по трем сторонам, откуда $\angle M_1O_1P = \angle M_2O_2P$. Кроме того, $\angle PO_1B = \angle PO_2B$, поскольку O_2O_1PB — равнобедренная трапеция. Складывая эти равенства, получаем $\angle M_1O_1B = \angle M_2O_2B$, поэтому $\smile BM_1 = \smile BM_2$. Следовательно, $\angle M_1AB = \angle M_2AB$, и прямая M_1M_2 проходит через точку A. С прямой N_1N_2 — аналогично. Далее, хорды M_1N_1 и M_2N_2 стягивают на двух окружностях одинаковые углы, следовательно $\frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Поскольку четырехугольник $M_1M_2N_1N_2$ вписанный, треугольники M_1AN_1 и N_2AM_2 подобны с коэффициентом $\frac{M_1N_1}{M_2N_2}$, поэтому $\frac{AN_1}{AM_2} = \frac{AM_1}{AN_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

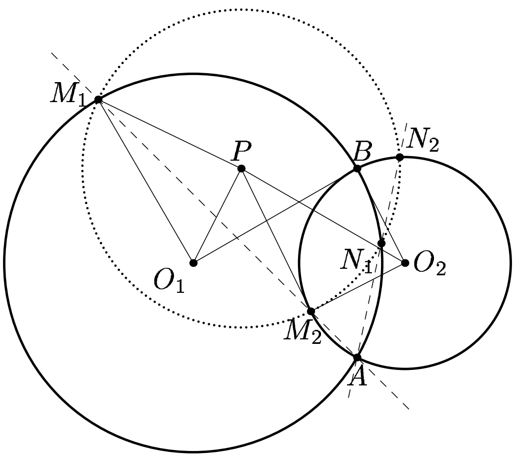


Рис.10.6.5

Теперь начинаем решение задачи. Пусть P – общий центр данных окружностей, будем называть их большей и меньшей окружностью, окружности β_0, β_1 радиуса R касаются данных внутренним образом, а окружности γ_0, γ_1 радиуса r касаются большей окружности внутренним образом, а меньшей — внешним. Точки пересечения

β_i и γ_k обозначим A_{ik}^0 и A_{ik}^1 (первая точка находится дальше второй от центра P). Проведем произвольную окружность с центром P, она пересекает каждую из окружностей β_i и γ_k в двух точках $b_i^s, s = 0, 1$ (соответственно c_k^s). При обходе окружности β_i в положительном направлении, начиная с точки ее касания с большей окружностью, сначала идет b_i^0, потом b_i^1. С точками c_k^s аналогично (рис.10.6.6). Все верхние индексы берутся по модулю 2, например $A_{10}^2 = A_{10}^0, c_1^3 = c_1^1$.

Покажем, что 4 точки A_{ik}^{i+k} $(i, k \in \{0, 1\})$ лежат на одной окружности. Пусть O_1, O_2 — центры окружностей β_0 и γ_0 соответственно. Тогда $O_2A_{00}^0O_1P$ — параллелограмм, длины его сторон — r и R. По лемме 1 прямые $b_0^0c_0^0$ и $b_0^1c_0^1$ пересекаются в точке A_{00}^0. Обозначим через $\mathbf{b}$ окружность, касающуюся β_0 и β_1 в точках b_0^0 и b_1^1 соответственно, а через $\mathbf{c}$ — окружность, касающуюся γ_0 и γ_1 в точках c_0^1 и c_1^0 соответственно. Предполагаем, что $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не вырождаются в прямые. Пусть x — радиус окружности $\mathbf{b}$, взятый со знаком плюс, если эта окружность касается β_0 внешним образом, и со знаком минус, если внутренним. Аналогично, y — радиус окружности $\mathbf{c}$, взятый со знаком. Пусть также B — вторая точка пересечения прямой $b_0^0A_{00}^0$ с окружностью $\mathbf{b}$, а C – вторая точка пересечения прямой $c_0^1A_{00}^0$ с окружностью $\mathbf{c}$. В силу подобия окружностей имеем $b_0^0B = \frac{x}{R}b_0^0A_{00}^0$, следовательно, степень точки A_{00}^0 относительно $\mathbf{b}$ равна $A_{00}^0b_0^0 \cdot A_{00}^0B = \left(1 + \frac{x}{R}\right)\left(A_{00}^0b_0^0\right)^2$. Аналогично, степень точки A_{00}^0 относительно $\mathbf{c}$ равна $\left(1 + \frac{y}{r}\right)\left(A_{00}^0c_0^1\right)^2$. Согласно лемме 1 имеем $A_{00}^0b_0^0/A_{00}^0c_0^1 = R/r$. Следовательно, отношение степеней точки A_{00}^0 относительно окружностей $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ равно $\frac{(R+x)R}{(r+y)r}$. Проведя то же рассуждение с точками $A_{11}^0, A_{10}^1, A_{01}^1$, получаем, что у каждой из них отношение степеней относительно $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ равно $\frac{(R+x)R}{(r+y)r}$. Следовательно, эти 4 точки лежат на одной окружности.

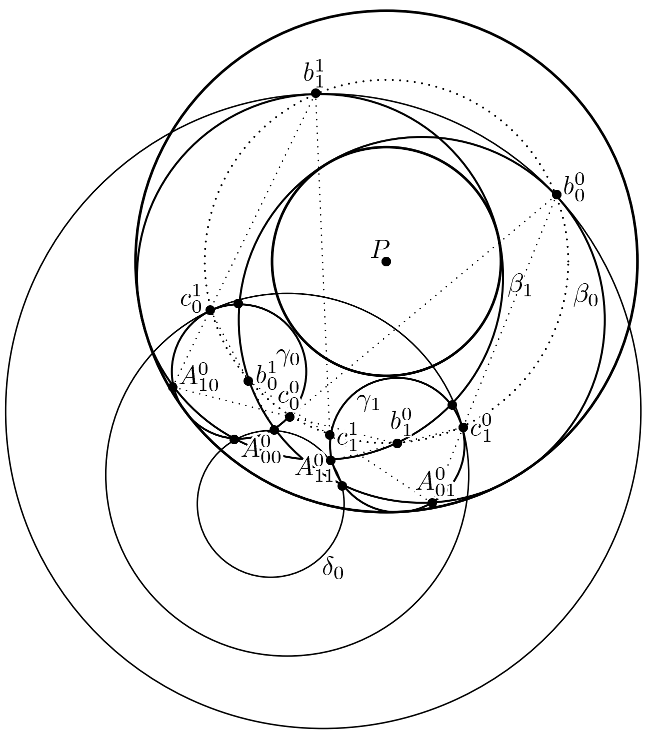


Рис.10.6.6

IV олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. 8 класс. Первый день

1. (Б.Френкин) Существует ли выпуклый четырехугольник без параллельных сторон, который можно разрезать на четыре равных треугольника?

   Ответ. Да. См., например, рис.8.1.

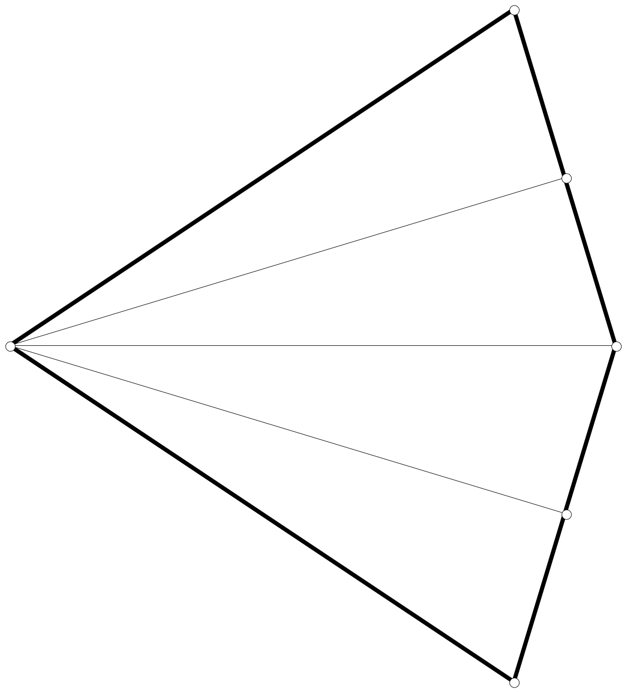


Рис.8.1.

2. (Ф.Нилов) Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC и углом $A = 50°$. Точки K и L на катете BC таковы, что $\angle KAC = \angle LAB = 10°$. Найдите CK/LB.

   Ответ. 2.

   Решение. Пусть L' — точка, симметричная L относительно AB (рис.8.2). Так как $\angle L'KA = 50° = \angle KAL'$, $L'K = L'A = LA$. С другой стороны, $\angle CAL = 40° = \angle ACL$, т.е $AL = CL$. Из этих равенств следует, что $CK = LL' = 2LB$.

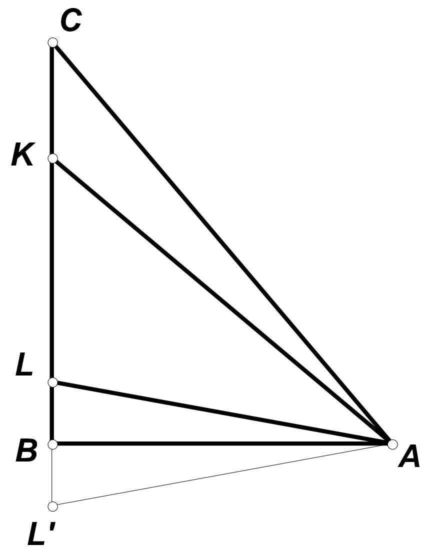


Рис.8.2.

3. (Д.Шноль) В выпуклом четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями равны два противолежащих угла. Докажите, что в него можно вписать окружность.

   Решение. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle D$, O — точка пересечения диагоналей. Предположим, что $OB > OD$. Тогда точка D', симметричная D относительно AC, лежит на отрезке OB (рис.8.3). Следовательно, по свойству внешнего угла треугольника $\angle AD'O > \angle ABO$, $\angle CD'O > \angle CBO$. Но тогда $\angle D = \angle AD'C > \angle B$ — противоречие. Таким образом, $OB = OD$, т.е диагональ AC является осью симметрии четырехугольника. Значит, биссектрисы углов B и D пересекают AC в одной и той же точке, которая равноудалена от всех сторон четырехугольника.

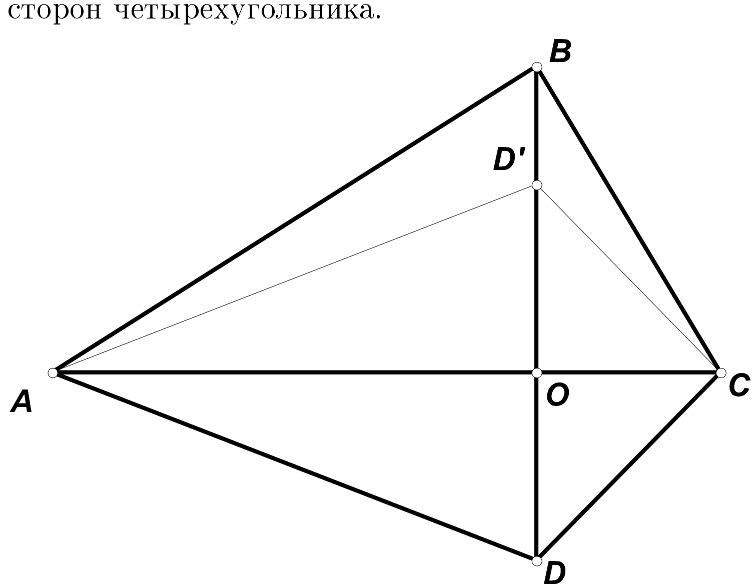


Рис.8.3.

4. (Ф.Нилов, А.Заславский) Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A', B', прямые AA' и BB' пересекаются в точке C_1. Докажите, что $\angle C_1CA = \angle C_0CB$.

   Решение. Так как треугольники CAA', CBB' — равнобедренные, $\angle CAA' = \angle C_0CA$, $\angle CBB' = \angle C_0CB$. Следовательно, расстояния от точки C до прямых AC_1 и BC_1 равны соответственно расстояниям от A и B до прямой CC_0. Но CC_0 — медиана, так что эти расстояния равны. Таким образом, точка C равноудалена от прямых C_1A и C_1B, т.е. $\angle CC_1A = \angle CC_1B$. Отсюда получаем, что $\angle C_1CA - \angle C_1CB = \angle C_1BC - \angle C_1AC = \angle C_0CB - \angle C_0CA$ (рис.8.4). Это, очевидно, равносильно утверждению задачи.

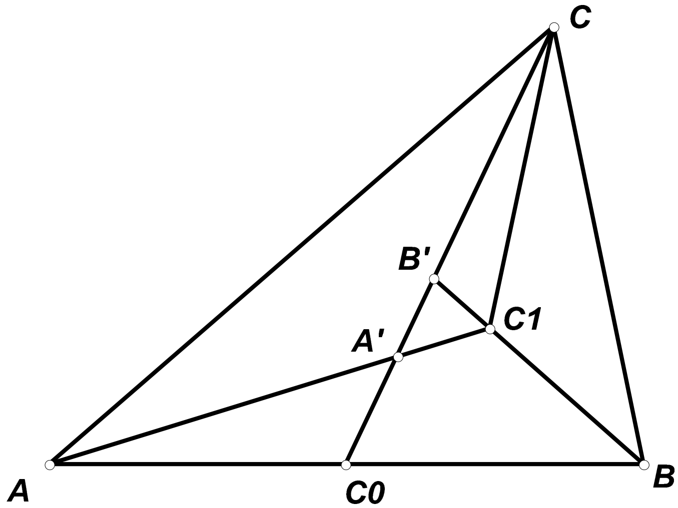


Рис.8.4.

5. (А.Заславский) Даны два треугольника ABC, $A'B'C'$. Обозначим через α угол между высотой и медианой треугольника ABC, проведенными из вершины A. Аналогично определим углы β, γ, α', β', γ'. Известно, что $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Обязательно ли треугольники подобны?

   Ответ. Нет.

   Решение. Пусть стороны треугольника $A'B'C'$ параллельны медианам треугольника ABC. Тогда стороны ABC параллельны медианам $A'B'C'$ и, значит, углы между медианами и высотами в обоих треугольниках одни и те же. При этом в общем случае треугольники не подобны.

IV олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. 8 класс. Второй день

6. (Б.Френкин) Рассматриваются треугольники, все вершины которых являются вершинами данного правильного 2008-угольника. Каких среди них больше: остроугольных или тупоугольных?

   Ответ. Тупоугольных.

   Решение. Зафиксируем две вершины A и B треугольника. Если они являются противоположными вершинами 2008-угольника, то при любой третьей вершине C треугольник ABC — прямоугольный. В противном случае пусть A', B' — вершины 2008-угольника, противоположные A, B. Треугольник ABC будет остроугольным тогда и только тогда, когда C находится на меньшей из двух ограниченных точками A', B' дуг описанной около 2008-угольника окружности. Следовательно, при любых фиксированных A, B среди треугольников, имеющих эти две вершины, остроугольных не больше, чем тупоугольных, а для некоторых пар вершин строго меньше. Значит, и всего тупоугольных треугольников больше.

7. (Ф.Нилов) Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и углом α при вершине. На отрезке AC во внешнюю сторону построена дуга с градусной мерой β. Две прямые, проходящие через вершину B, делят как отрезок, так и дугу AC на три равные части. Найдите α/β.

   Ответ. $1/3$.

   Решение. Пусть X, Y — точки, делящие отрезок AC на три равные части ($AX = XY = YC$); U, V — точки пересечения прямых BX, BY с дугой AC; Z — точка пересечения прямых BC и UV (рис.8.7). Тогда, так как $UV \parallel AC$, то $VZ = UV = VC$. Следовательно, $\angle UCZ = 90°$. С другой стороны, по теореме о вписанном угле $\angle ACU = \angle UCV = \beta/6$, а $\angle BCA = 90° - \alpha/2$. Из этих равенств вытекает, что $\beta = 3\alpha$.

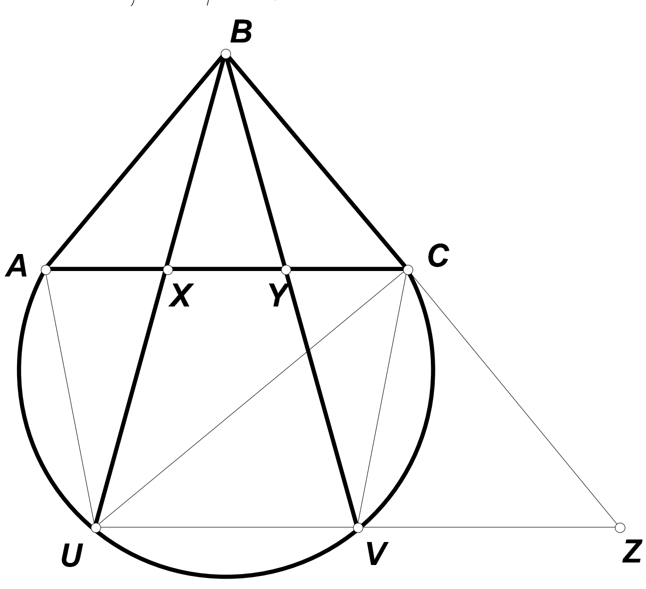


Рис.8.7.

8. (Б.Френкин, А.Заславский) На доске был нарисован выпуклый четырехугольник. Боря отметил центры четырех окружностей, каждая из которых касается одной стороны четырехугольника и продолжений двух соседних с ней. После чего Алёша стёр четырехугольник. Сможет ли Боря определить, чему равнялся периметр четырехугольника?

   Ответ. Да.

   Решение. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, образованный центрами окружностей, X — вершина исходного четырехугольника, лежащая на стороне AB. Так как его стороны являются биссектрисами внешних углов исходного четырехугольника, биллиардный шар, выпущенный из X вдоль стороны исходного четырехугольника, отражаясь от сторон $ABCD$, будет все время двигаться по сторонам. "Выпрямим"траекторию шара, построив четырехугольники: A_1BCD_1, симметричный $ABCD$ относительно BC, $A_2B_1CD_1$, симметричный A_1BCD_1 относительно CD_1, и $A_2B_2C_1D_1$, симметричный $A_2B_1CD_1$ относительно D_1A_2. Тогда траектория перейдет в отрезок XX', где X' — точка на A_2B_2, такая что $A_2X' = AX$ (рис.8.8). При этом $\angle X'XB = \angle XX'A_2$, т.е. $A_2B_2 \parallel AB$. Следовательно, взяв вместо X другую точку отрезка AB, соединив ее с соответствующей точкой отрезка A_2B_2 и произведя обратные отражения частей полученного отрезка, мы получим новый четырехугольник, удовлетворяющий условиям задачи. Таким образом, существует бесконечное множество четырехугольников, для которых A, B, C, D — центры вневписанных окружностей. Однако периметры всех этих четырехугольников равны длине отрезка $XX' = AA_2$, не зависящей от выбора точки X.

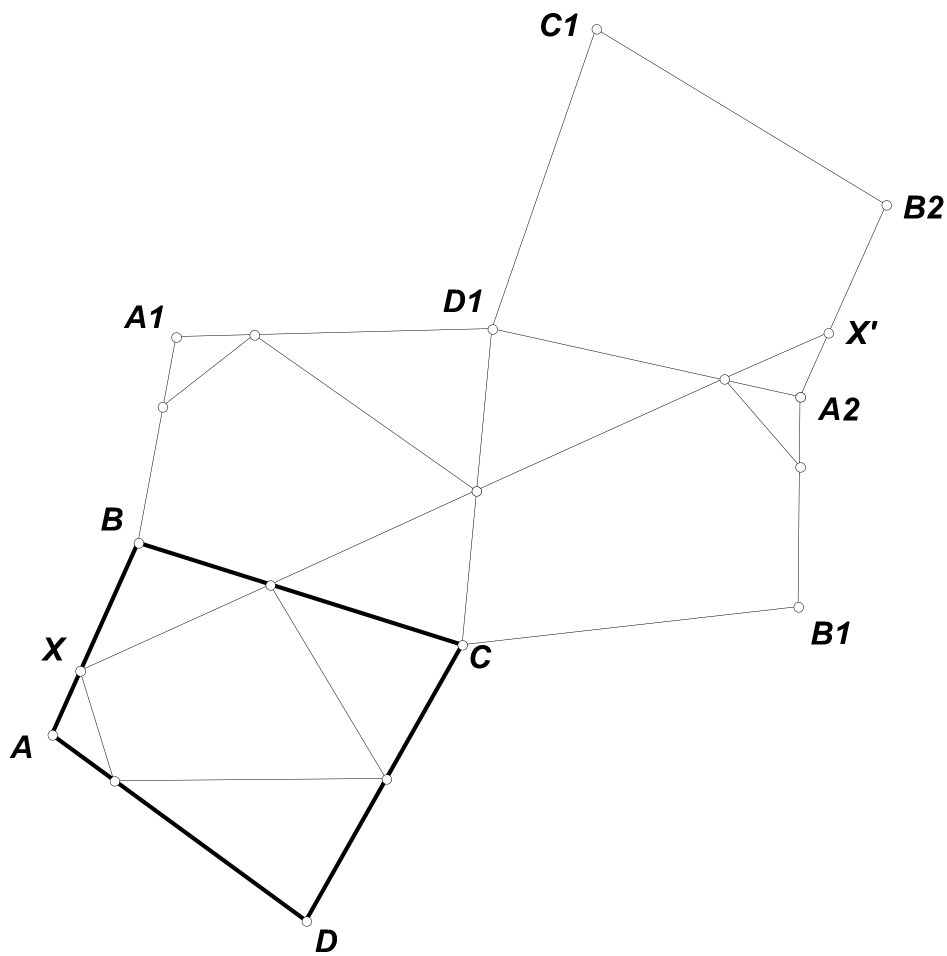


Рис.8.8.

IV олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 9 класс. Первый день

1. (А.Заславский) Выпуклый многоугольник можно разрезать на 2008 равных четырехугольников. Обязательно ли у него есть центр или ось симметрии?

   Ответ. Нет. Например, из трапеций, основания которых равны 1 и 2, а боковые стороны — 1 и $\sqrt{2}$, можно, продолжая конструкцию, изображенную на рис.9.1, составить несимметричный шестиугольник.

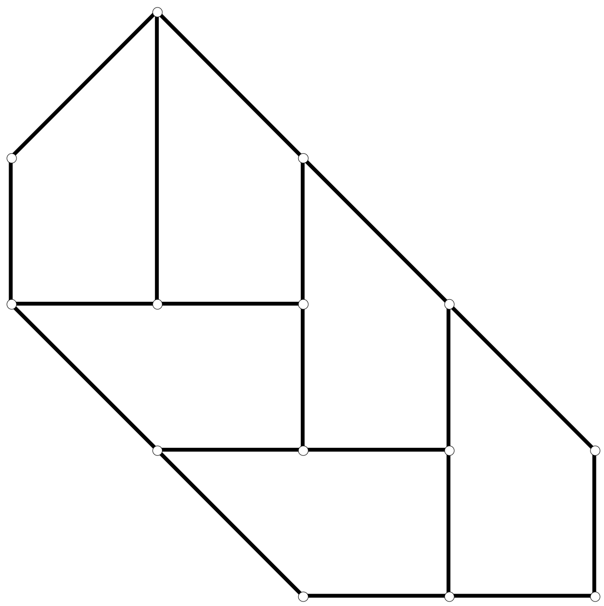


Рис.9.1.

2. (Ф.Нилов) Дан четырёхугольник $ABCD$. Найдите ГМТ, таких, что отрезки, соединяющие их проекции на прямые, содержащие противоположные стороны четырёхугольника перпендикулярны.

   Решение. Если четырехугольник — трапеция, то прямая, соединяющая проекции точки на боковые стороны, должна быть параллельна основаниям. Очевидно, что геометрическое место таких точек — прямая, проходящая через точку пересечения боковых сторон без самой этой точки. Также ясно, что для прямоугольника искомое ГМТ — вся плоскость, а для параллелограмма, отличного от прямоугольника, таких точек не существует.

   Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке X, BC и DA — в точке Y. Обозначим проекции произвольной точки P на прямые AB, BC, CD, DA через K, L, M, N, а точку пересечения KM и LN через O (рис.9.2). Так как четырехугольники $YLPN$ и $XKPM$ — вписанные, получаем, что $\angle PLN = \angle PYA$ и $\angle PMK = \angle PXA$. Следовательно, $\angle MOL = \pi - \angle C - \angle PLN - \angle PMK = \pi - \angle C - (\angle A - \angle XPY)$. Поэтому условие $\angle MOL = \pi/2$ равносильно условию $\angle XPY = \angle A + \angle C - \pi/2$. Значит, искомое ГМТ — окружность, проходящая через точки X и Y без самих этих точек.

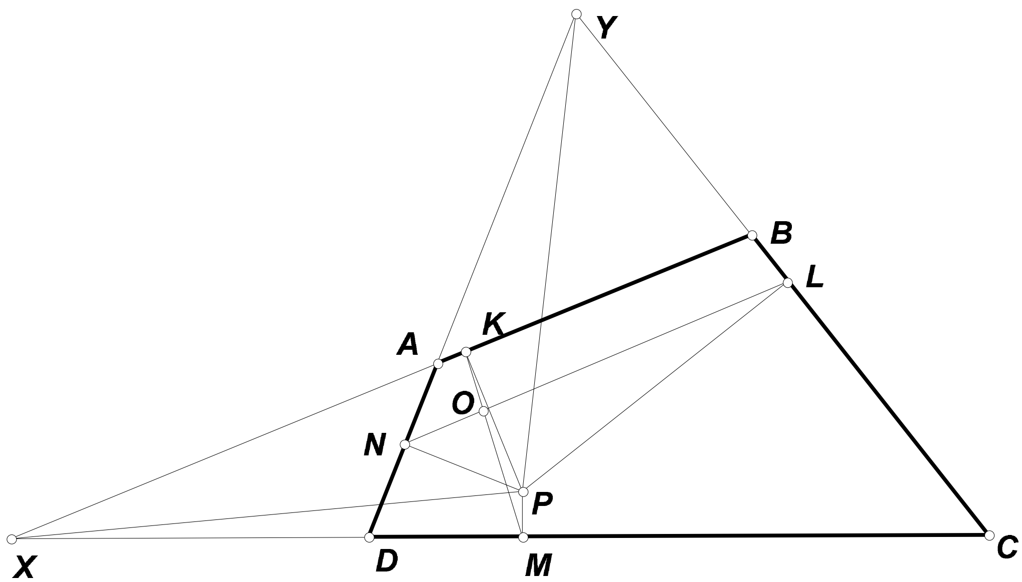


Рис.9.2.

3. (Р.Пиркулиев) Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\sin A}}+\frac{1}{\sqrt{2\sin B}}+\frac{1}{\sqrt{2\sin C}}\leq\sqrt{\frac{p}{r}},$$

где p — полупериметр, а r — радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Решение. Пусть R и S — радиус описанной окружности и площадь треугольника ABC. Используя теорему синусов и формулы $S=pr=abc/4R$, преобразуем правую часть неравенства:

$$\begin{aligned}\sqrt{\tfrac{p}{r}} &= \tfrac{p}{\sqrt{S}}=\tfrac{R(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sqrt{2R^2\sin A\sin B\sin C}}\\ &= \sqrt{\tfrac{\sin A}{2\sin B\sin C}}+\sqrt{\tfrac{\sin B}{2\sin C\sin A}}+\sqrt{\tfrac{\sin C}{2\sin A\sin B}}.\end{aligned}$$

Из неравенства о средних следует, что

$$\frac{2}{\sqrt{\sin A}}\leq\sqrt{\frac{\sin B}{\sin C\sin A}}+\sqrt{\frac{\sin C}{\sin A\sin B}}.$$

Сложив это неравенство с двумя аналогичными, получим утверждение задачи.

4. (Ф.Нилов, А.Заславский) Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A_c, B_c, прямые AA_c и BB_c пересекаются в точке C_1. Аналогично определим точки A_1, B_1. Докажите, что окружность $A_1B_1C_1$ проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

Первое решение. Из решения задачи 8.4 следует, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке L, а точка C_1 лежит на окружности, проходящей через A, B и центр O описанной около ABC окружности. Поэтому $\angle OC_1L=\angle AC_1C-\angle AC_1O=\angle AC_1C-\angle ABO=(\pi-\angle C)-(\pi/2-\angle C)=\pi/2$, т.е.

C_1 лежит на окружности с диаметром OL. Аналогично получаем, что A_1 и B_1 тоже лежат на этой окружности.

Второе решение. Рассмотрим точку C_2, изогонально сопряженную C_1. Из условия слеует, что $\angle C_2AB = \angle C_2CA$ и $\angle C_2CB = \angle C_2BA$. Значит, окружности C_2AC и C_2BC касаются прямой AB в точках A и B. Пожтому радикальная ось этих окружностей — прямая CC_2 проходит через середину AB, т.е. C_2 лежит на медиане треугольника ABC. Соответственно C_1 лежит на симедиане, а прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке Лемуана L.

Как известно, симедиана CL проходит через точку C' пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC, проведенных в точках A и B. Очевидно, что точки A, B лежат на окружности с диаметром OC'. Как показано в первом решении, C_1 лежит на этой же окружности. Следовательно, $\angle OC_1L = \pi/2$ и C_1 лежит на окружности с диаметром OL.

5. (Н.Авилов) Можно ли оклеить поверхность правильного тетраэдра одинаковыми правильными шестиугольниками?

   Решение. Да, например, склеив тетраэдр из развертки, изображенной на рис.9.5, и разрезав его поверхность по жирным линиям, получим два равных правильных шестиугольника (темный и светлый).

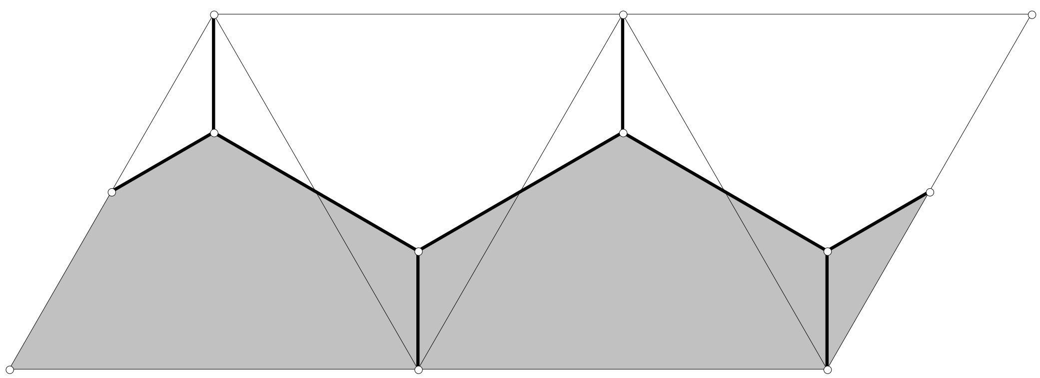


Рис.9.5.

IV олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Финал. 9 класс. Второй день

6. (Б.Френкин) Постройте треугольник, если даны его центр тяжести и основания высоты и биссектрисы, проведенных к одной стороне.

   Решение. Пусть C_1, C_2 — основания биссектрисы и высоты, проведенных из вершины C треугольника ABC, а M — его центр тяжести. Очевидно, вершина C лежит на перпендикуляре, восставленном из C_2 к прямой C_1C_2. Кроме того, проекция M на этот перпендикуляр делит высоту треугольника в отношении $2:1$, что позволяет сразу построить точку C и середину C_0 стороны AB.

   Пусть C' — точка пересечения прямой CC_1 и перпендикуляра l к прямой C_1C_2, проведенного из C_0. Точка C' лежит на описанной окружности треугольника ABC (рис.9.6), следовательно, серединный перпендикуляр к CC' пересекает l в центре O этой окружности. Построив окружность, мы найдем вершины A, B как точки ее пересечения с прямой C_1C_2.

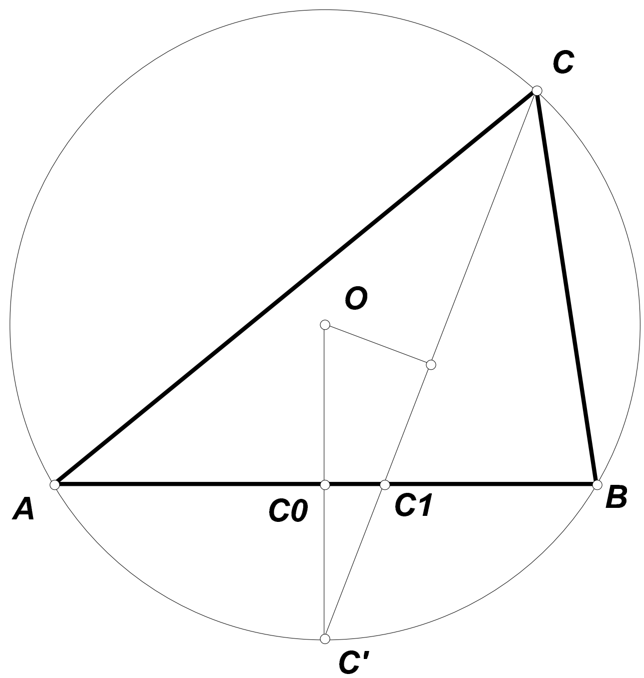


Рис.9.6.

7. (А.Заславский) Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R. Через ортоцентр H этого треугольника провели другую окружность того же радиуса, пересекающую описанную окружность в точках X, Y. Точка Z — четвертая вершина параллелограмма $CXZY$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, B, Z.

   Ответ. R.

   Первое решение. Докажем, что точка Z лежит на окружности ABH, радиус которой равен R. Пусть H' — вторая точка пересечения окружностей XYH и

ABH, C' — ортоцентр треугольника ABH' (рис.9.7). Тогда C' лежит на окружности, симметричной ABH относительно AB, т.е. на окружности ABC. Поэтому $CH = C'H' = 2R|\cos C|$ и $CHH'C'$ — параллелограмм. Так как CC' и HH' — хорды равных окружностей ABC и XHY, они симметричны относительно центра симметрии этих окружностей — середины XY. Следовательно, $XCYH'$ — параллелограмм, и H' совпадает с Z.

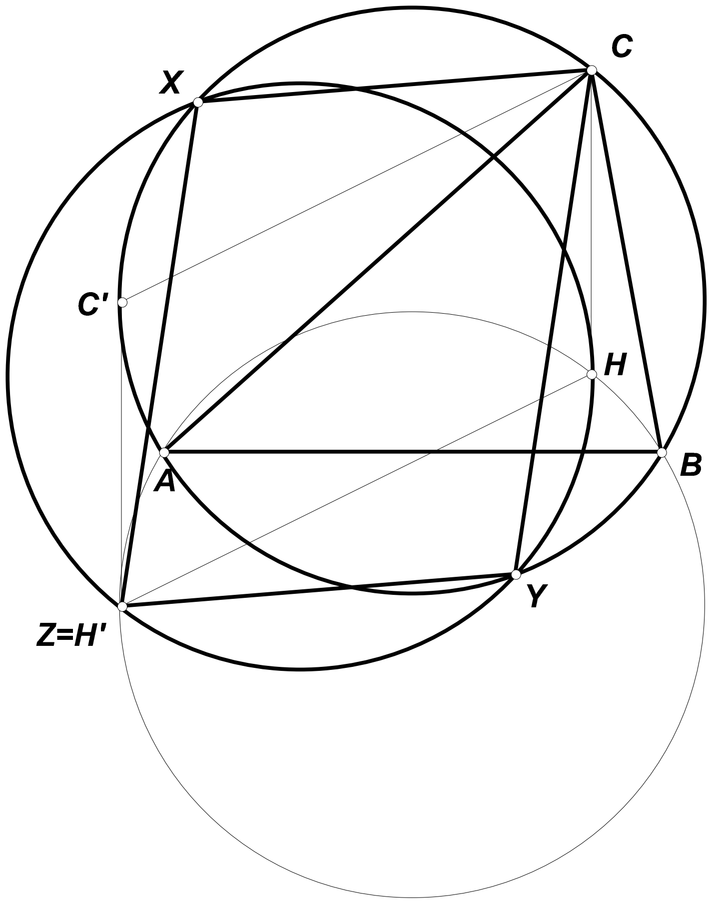


Рис.9.7.

Второе решение. Точка Z получается из C отражением относительно середины T отрезка XY. Пусть H' — отражение H относительно T. Тогда $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{H'Z}$. Заметим, что при сдвиге на $\overrightarrow{CH}$ окружность ABC переходит в окружность ABH (достаточно представить этот сдвиг как композицию симметрий относительно диаметра, параллельного AB, и относительно AB). Значит, точка H' при этом сдвиге переходит в точку Z, лежащую на окружности ABH, радиус которой равен R.

Третье решение. (А.Ефимов) Пусть O, O_1 — центры описанной окружности треугольника ABC и окружности, проходящей через H. Тогда O_1 лежит на окружности с центром H и радиусом R. Значит середина отрезка OO_1 лежит на окружности с центром в середине отрезка OH и радиусом $R/2$, т.е. окружности девяти точек треугольника ABC. Поскольку середины отрезков OO_1, XY и CZ совпадают, точка Z лежит на окружности — образе окружности девяти точек при гомотетии с центром C и коэффициентом 2, т.е. окружности радиуса R, проходящей через A и B.

8. (J.-L.Aime, France) На окружности ω, описанной около треугольника ABC, взяты две точки P и Q. Серединный перпендикуляр l к отрезку PQ пересекает прямые BC, CA, AB в точках A', B', C'. Пусть $A"$, $B"$, $C"$ — вторые точки пересечения l с окружностями, описанными около треугольников $A'PQ$, $B'PQ$, $C'PQ$. Докажите, что прямые $AA"$, $BB"$, $CC"$ пересекаются в одной точке.

   Решение. Пусть X, Y — точки пересечения ω и l. Рассмотрев центральную проекцию из ω на l с центром C, получаем равенство двойных отношений: $(AB;XY) = (B'A';XY)$. Далее, так как $\angle A'PA - \angle B'PB - \angle XPY = \pi/2$, получаем, что $(A'B';XY) = (A"B";YX)$. Следовательно $(AB;XY) = (A"B";YX)$, т.е. точка пересечения прямых $AA"$ и $BB"$ лежит на ω. Через эту же точку проходит и прямая $CC"$.

IV олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. 10 класс. Первый день

1. (Б.Френкин) Вписанно-описанный n-угольник разрезан прямой линией на два вписанно-описанных многоугольника с разным количеством сторон. При каких n это возможно?

   Ответ. При $n = 3$.

   Решение. Предположим, что $n \neq 3$. Если $n > 4$, то граница хотя бы одного из полученных при разрезании многоугольников содержит отрезки, по крайней мере, трех сторон исходного многоугольника, и значит, вписанные в эти многоугольники окружности совпадают. Это утверждение остается верным и при $n = 4$, так как многоугольники, на которые разрезан исходный, имеют разное число сторон и, следовательно, разрезающая прямая не является диагональю четырехугольника.

   Таким образом, разрезающая прямая касается окружности, вписанной в исходный n-угольник, и отрезает от него треугольник. Вершинами оставшейся части являются $n-1$ вершина исходного многоугольника и две точки, лежащие на его сторонах. Поскольку $n-1 \geq 3$, эти вершины определяют единственную окружность, которая проходит через оставшуюся вершину многоугольника и, значит, не проходит через внутренние точки его сторон. Следовательно, оставшаяся часть не вписана в окружность — противоречие.

   Примечание. Очевидно, что для любого треугольника можно провести касательную к вписанной в него окружности, разрезающую его на треугольник и вписанный четырехугольник.

2. (А.Мякишев) Пусть $A_1B_1C_1$ — треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно центра окружности, вписанной в его серединный треугольник. Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей треугольника ABC.

   Решение. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности, O — центр описанной, M — центр тяжести, I_0 — центр окружности, вписанной в серединный треугольник. Очевидно, что ортоцентр H_1 треугольника $A_1B_1C_1$ симметричен H относительно I_0. С другой стороны, для треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей, I является ортоцентром, ABC — ортотреугольником, а значит, описанная около ABC окружность — окружностью девяти точек. Следовательно, центр описанной окружности треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей, симметричен I относительно O. Рассмотрим треугольник IHH_1. Его медиана II_0 проходит через M и делится этой точкой в отношении $2:1$. Значит, M — центр тяжести этого треугольника. Но M также делит в отношении $2:1$ отрезок HO. Следовательно, O — середина отрезка IH_1 (рис.10.2)

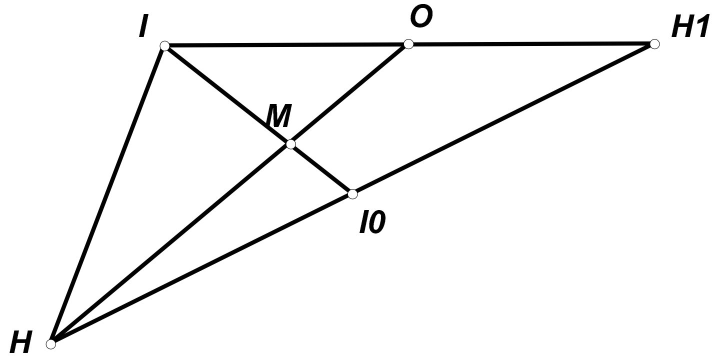


Рис.10.2.

3. (В.Ясинский, Украина) Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в двух точках X и Y, а третья окружность ω касается внутренним образом окружностей ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно. Отрезок XY пересекает окружность ω в двух точках M и N. Лучи PM и PN пересекают ω_1 в точках A и D, а лучи QM и QN пересекают ω_2 в точках B и C соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

   Решение. Точка P является центром гомотетии окружностей ω и ω_1. Следовательно, $AD \parallel MN$, т.е. отрезок AD перпендикулярен линии центров окружностей ω_1 и ω_2, а точки A и D симметричны относительно этой линии. Аналогично B и C симметричны относительно этой линии, и значит, $AB = CD$ (рис.10.3).

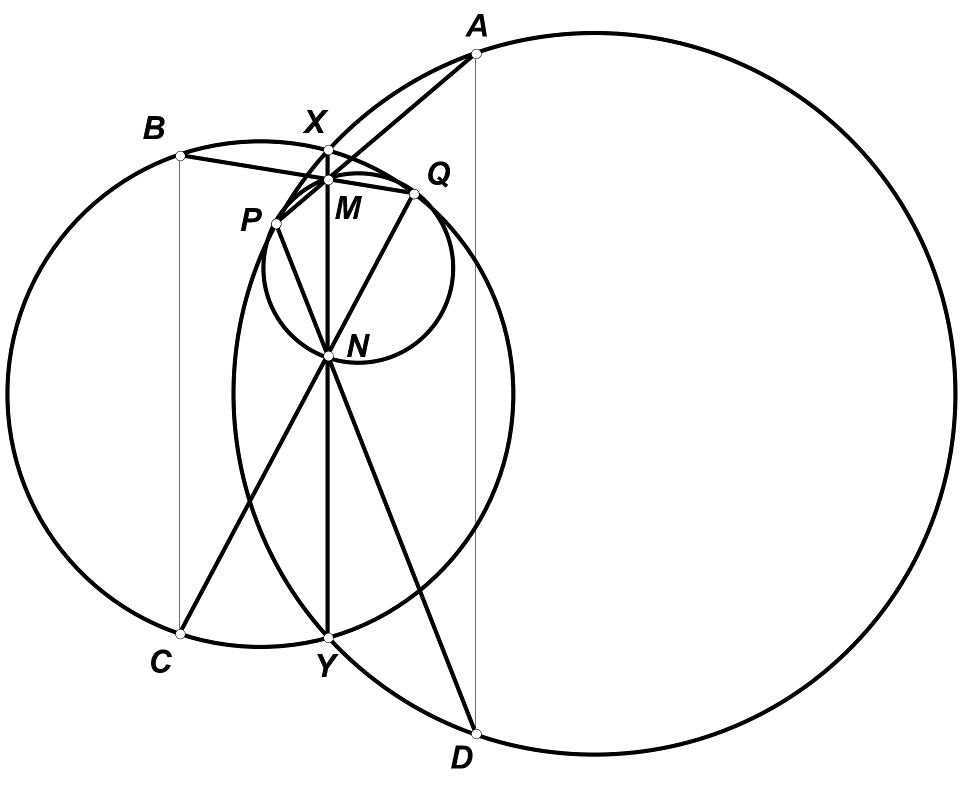


Рис.10.3.

4. (А.Заславский) На прямой l даны три точки C_0, C_1, C_2. Найдите геометрическое место центров окружностей, вписанных в треугольники ABC, у которых

сторона AB лежит на прямой l, а основания медианы, биссектрисы и высоты, проведенных из вершины C, совпадают с C_0, C_1, C_2.

Ответ. Прямая, перпендикулярная l и проходящая через точку C' на отрезке C_0C_2, такую что $C_0C'^2 = C_0C_1 \cdot C_0C_2$.

Решение. Пусть C_3, C_4 — точки касания стороны AB с вписанной и вневписанной окружностями треугольника. Тогда C_0 — середина отрезка C_3C_4. С другой стороны, точки C_3, C_4 являются проекциями на прямую AB центров I, I_c вписанной и вневписанной окружности (рис.10.4). Так как эти центры лежат на прямой CC_1, выполняются равенства:

$$\frac{C_2C_3}{C_2C_4} = \frac{CI}{CI_c} = \frac{r}{r_c} = \frac{C_1I}{C_1I_c} = \frac{C_1C_3}{C_1C_4}.$$

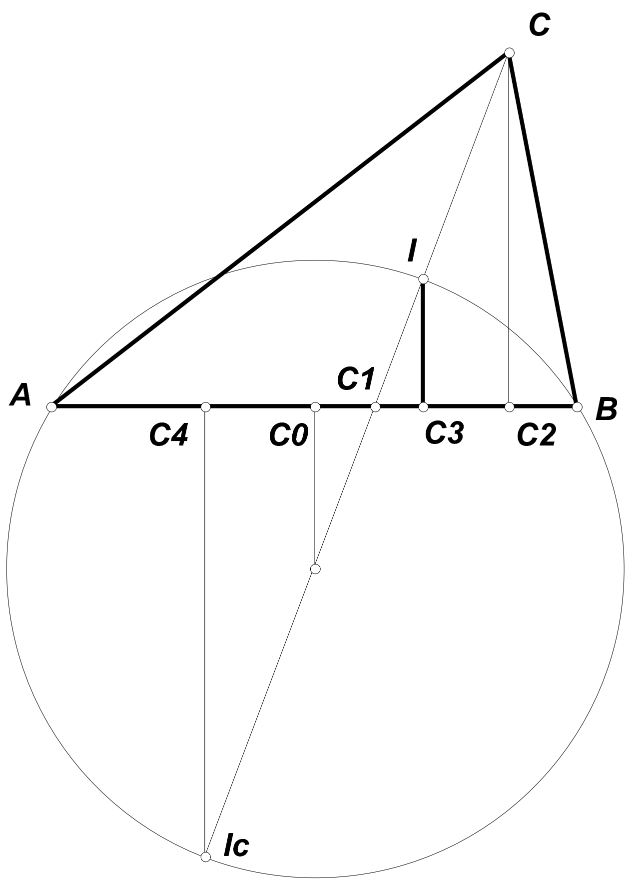


Рис.10.4.

Из этих равенств следует, что точка C_3 совпадает с определенной выше точкой C'. Возьмем теперь любую точку I, проекция которой на l совпадает с C_3. Прямая C_1I пересекает перпендикуляры к l, восставленные из C_2 и C_0, в точке C и центре описанной окружности треугольника IAB. Проведя эту окружность и найдя точки ее пересечения с l, мы получим искомый треугольник.

5. (И.Богданов) Сечение правильной четырехугольной пирамиды является правильным пятиугольником. Найдите отношение его стороны к стороне основания пирамиды.

Ответ. $\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

Решение. Пусть X, Y — точки, в которых плоскость сечения пересекает стороны CD и DA основания $ABCD$ пирамиды. Тогда пятиугольник $ABCXY$ является центральной проекцией правильного пятиугольника. Следовательно, двойное отношение A, Y, D и бесконечно удаленной точки прямой AD равно двойному отношению четырех точек, в которых четыре прямые, содержащие стороны правильного пятиугольника, пересекают пятую (рис.10.5), т.е.:

$$\frac{DY}{AD} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

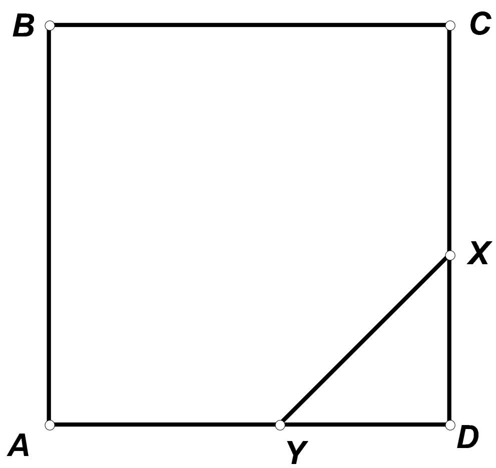


Рис.10.5.

Точка X делит отрезок CD в таком же отношении, следовательно, искомое отношение равно

$$\frac{XY}{AB} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$

Примечание. Так как отношение стороны пятиугольника к стороне основания определяется однозначно, отношение стороны основания к боковой стороне пирамиды также определяется однозначно. С другой стороны, известно, что плоскости 8 граней правильного икосаэдра ограничивают правильный октаэдр. Поэтому пирамида, удовлетворяющая условиям задачи, является половиной октаэдра, т.е. ее боковое ребро равно стороне основания.

IV олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Финал. 10 класс. Второй день

6. (Б.Френкин) В треугольнике произведение двух сторон равно $8Rr$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей. Докажите, что угол между ними меньше $60°$.

   Решение. Пусть произведение сторон $AC = b$ и $BC = a$ треугольника ABC равно $8Rr$. Так как площадь треугольника $S = pr = abc/4R$, где p — полупериметр, получаем, что $4prR = abc = 8Rrc$, т.е $p = 2c$ или $a + b = 3c$. Поскольку $b < a+c$, отсюда следует, что $2a > 2c$ и $c < a$. Аналогично $c < b$. Таким образом, C как строго наименьший угол треугольника меньше $60°$.

7. (Ф.Нилов) На медианах AA' и BB' треугольника ABC построены в сторону вершины C дуги с одинаковой градусной мерой. Докажите, что общая хорда окружностей, содержащих эти дуги, проходит через C.

   Решение. Пусть окружность, построенная на AA', пересекает AC в точке X, а окружность, построенная на BB' пересекает BC в точке Y (рис.10.7). Так как $\angle AXA' = \angle BYB'$, треугольники CXA' и CYB' подобны, т.е. $CX/CA' = CY/CB'$. Тогда

$$CX \cdot CA = 2CX \cdot CB' = 2CY \cdot CA' = CY \cdot CB.$$

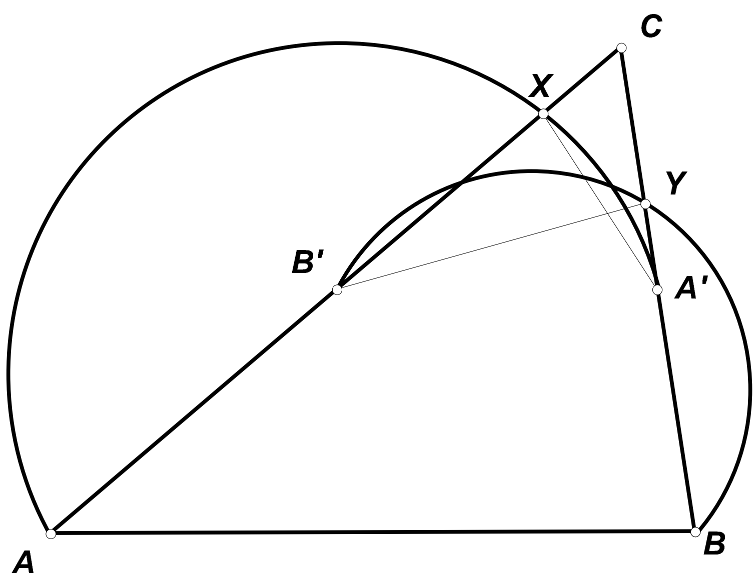


Рис.10.7.

   Следовательно, степени точки C относительно обеих окружностей равны, т.е. C лежит на их радикальной оси.

8. (А.Акопян, В.Дольников) Множество точек на плоскости таково, что из любых трех его точек найдутся две, расстояние между которыми не превосходит 1. Докажите, что это множество можно разбить на три части, диаметр каждой из которых не превоходит 1.

Решение. Назовем 1-близкими точки, расстояние между которыми не превосходит 1.

Если диаметр данного множества V не превосходит $\sqrt{3}$, то V можно покрыть кругом радиуса 1. Этот круг можно выбрать так, что на его границе будут лежат точки из V. Обозначим центр этого круга через X, а точку на границе через Y.

Заметим, что точки множества $V \setminus B(Y,1)$ попарно 1-близки, а значит, диаметр этого множества не превосходит 1. Кроме того, отрезок $[X,Y]$ разбивает множество $V \bigcap B(Y,1)$ на две части, диаметр каждой из которых не превосходит 1. Так мы получаем нужное нам разбиение.

Если же найдутся такие две точки $X, Y \in V$, что $d(X,Y) > \sqrt{3}d$, тогда легко понять, что множества $V \setminus B(X,1)$, $V \setminus B(Y,1)$ и $V \bigcap B(X,1) \bigcap B(Y,1)$ в объединении дают всё V, и диаметр каждой из этих частей не превосходит 1. Действительно, точки каждого из множеств $V \setminus B(X,1)$ и $V \setminus B(Y,1)$ попарно 1-близки. А множество $V \bigcap B(X,1) \bigcap B(Y,1)$ целиком лежит внутри $B(X,1) \bigcap B(Y,1)$, диаметр которого не больше 1 (и достигается на отрезке, соединяющим точки пересечения окружностей $S(X,1)$ и $S(Y,1)$).

V Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 8 класс. Решения.

1. (А.Блинков, Ю.Блинков) В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна меньшему основанию BC, а диагональ AC равна основанию AD. Прямая, проходящая через вершину B параллельно AC, пересекает прямую DC в точке M. Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

   Первое решение. Из условия следует, что $\angle BMC = \angle ACD = \angle CDA = \angle BCM$ (первое и третье равенство следуют из параллельности прямых BM и AC, BC и AD; второе из равенства $AC = AD$). Значит, $BM = BC = AB$, и $\angle BAM = \angle BMA = \angle MAC$ (рис.8.1).

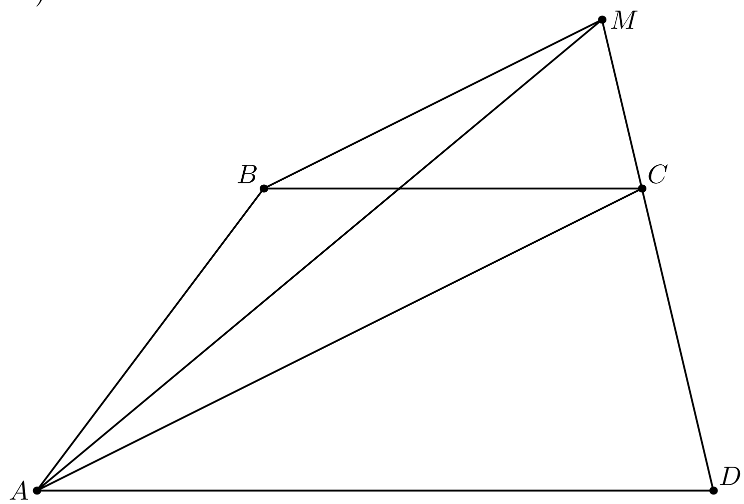


Рис.8.1

   Второе решение. На продолжении стороны AB (за точку B) отметим точку P, а на продолжении диагонали AC (за точку C) — точку K. Тогда $\angle MCK = \angle ACD = \angle ADC = \angle BCM$, то есть CM — биссектриса угла BCK. Так как AC — биссектриса угла BAD и $BM \parallel AC$, то BM — биссектриса угла PBC. Таким образом, M — точка пересечения биссектрис двух внешних углов треугольника ABC, следовательно, AM — биссектриса угла BAC.

2. (А.Блинков) Через точку внутри вписанного четырехугольника провели две прямые, делящие его на четыре четырехугольника. Три из этих четырехугольников — вписанные, причем радиусы описанных вокруг них окружностей равны. Докажите, что четвертая часть — четырехугольник, вписанный в окружность того же радиуса.

   Решение. Пусть части, прилегающие к вершинам A, B, C вписанного четырехугольника $ABCD$, — вписанные четырехугольники. Так как углы A и C четырехугольника противолежат равным углам в точке разреза L, то они равны, а значит $\angle A = \angle C = 90^\circ$. Поэтому прямые, разрезающие четырехугольник, перпендикулярны. Но тогда угол B тоже прямой, т.е. $ABCD$ — прямоугольник, а четвертая часть тоже является вписанным четырехугольником. Кроме того, углы, опирающиеся на хорды AL, BL, CL, равны, а так как радиусы этих окружностей тоже равны, то равны и сами хорды. Следовательно, L — центр прямоугольника, и четвертая окружность имеет тот же радиус.

3. (А.Акопян, К.Савенков) Пусть AH_a и BH_b — высоты треугольника ABC, P и Q — проекции точки H_a на стороны AB и AC. Докажите, что прямая PQ делит отрезок H_aH_b пополам.

Решение. Пусть CH_c — третья высота треугольника. Тогда $\angle H_aH_cB = \angle H_bH_cA = \angle C$, так как четырехугольники CBH_cH_b и CAH_cH_a вписаны в окружности с диаметрами BC и AC. Следовательно, точка, симметричная H_a относительно AB, лежит на прямой H_bH_c. Аналогично, на этой же прямой лежит точка, симметричная H_a относительно AC. Соответственно, точки P, Q лежат на средней линии треугольника $H_aH_bH_c$ (рис.8.3).

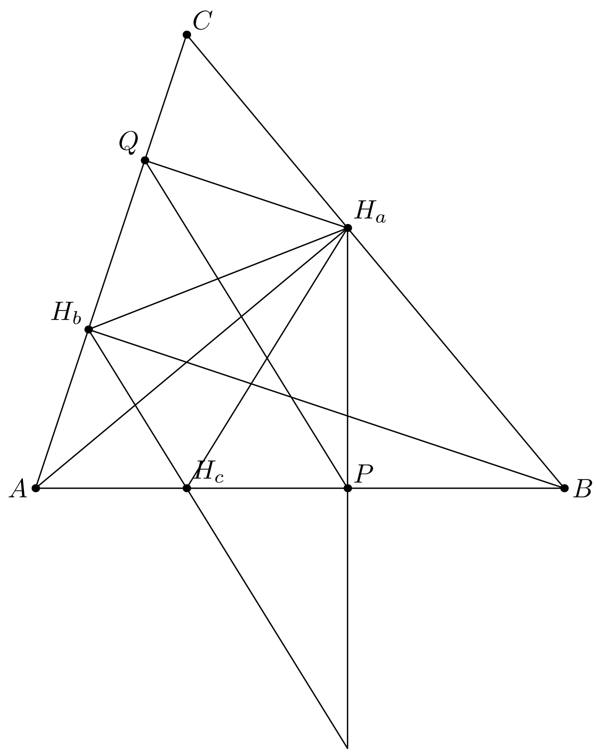


Рис.8.3

4. (Н.Белухов, Болгария) В треугольнике ABC $\angle A = 57°$, $\angle B = 61°$, $\angle C = 62°$. Какой из двух отрезков длиннее: биссектриса угла A или медиана, проведенная из вершины B?

Первое решение. Пусть K — середина дуги ABC описанной окружности треугольника ABC, O — центр этой окружности; AL и BM — биссектриса и медиана. Пусть также N — точка пересечения AL и CK, а AH — высота треугольника AKC (рис.8.4.). Так как $\angle A < \angle C$, то B лежит внутри дуги KC, значит, N лежит на отрезке AL, и $AL > AN > AH$. Но $AH > KM$, так как это высоты меньшего и большего углов треугольника AKC. Следовательно, $KM = MO + OK = MO + OB > MB$, т.е. биссектриса угла A длиннее медианы из B.

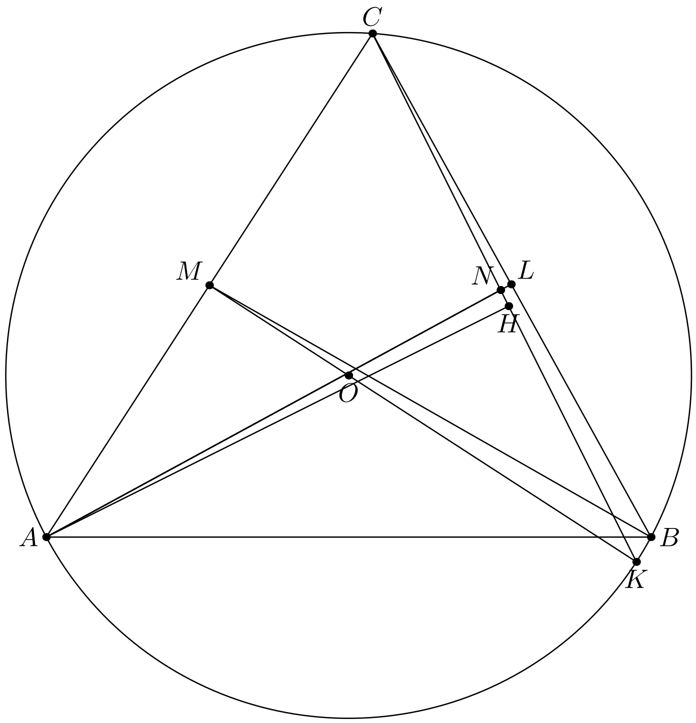


Рис.8.4

Второе решение. Так как $AB > BC$, то $\angle MBC > 30°$. Проведем из вершины A высоту AH, а из точки M перпендикуляр MK к стороне BC. Тогда $AL > AH = 2MK > BM$, так как $\sin\angle BMK = \frac{MK}{BM} > \frac{1}{2}$.

Третье решение. (К.Иванов, Москва). Построим правильный треугольник ABC'. Из условия задачи следует, что луч BC' лежит внутри угла ABC, следовательно, биссектриса угла A длиннее высоты правильного треугольника. Сдругой стороны, пусть M, N — середины AC и AC' соответственно. Так как луч AC лежит внутри угла $C'AB$, то $\angle BMN > \angle BMA$. Но $\angle BMA > 90°$, поскольку $AB > BC$. Значит, $BN > BM$, т.е. биссектриса угла A длиннее медианы из B.

V Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Финал. Второй день. 8 класс. Решения.

5. (В.Протасов) Из вершины B треугольника ABC опущен перпендикуляр BM на биссектрису угла C. Пусть K — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Найдите угол MKB, если известно, что $\angle BAC = \alpha$

   Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Тогда четырехугольник $BMIK$ — вписанный, так как $\angle BMI = \angle BKI = 90^\circ$ (рис.8.5). Значит, $\angle MKB = \angle MIB = \angle IBC + \angle ICB = \frac{\angle B+\angle C}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

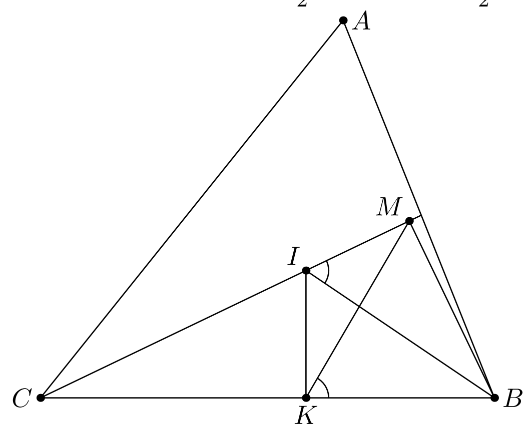


Рис.8.5

6. (С.Маркелов) Можно ли расположить на плоскости четыре равных многоугольника так, чтобы любые два из них не имели общих внутренних точек, но имели общий отрезок границы?

   Решение. Да, см. рис.8.6.

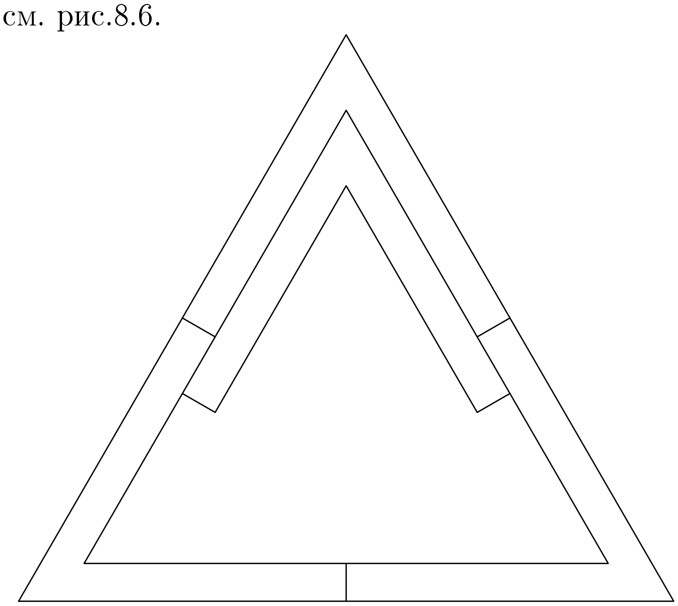


Рис.8.6

7. (Д.Прокопенко) Вокруг треугольника ABC описали окружность s. Пусть L и W — точки пересечения биссектрисы угла A со стороной BC и окружностью s соответственно. Точка O — центр описанной окружности треугольника ACL. Восстановите треугольник ABC, если даны окружность s и точки W и O.

Решение. Пусть O' — центр описанной окружности треугольника ABC. Тогда прямые $O'O$ и $O'W$ перпендикулярны сторонам AC и BC, т.е. направления этих сторон известны. Кроме того, $\angle COL = 2\angle CAL = 2\angle LCW$ и, значит, $\angle OCW = 90°$ (рис.8.7). Следовательно, C — точка пересечения окружности s и окружности с диаметром OW.

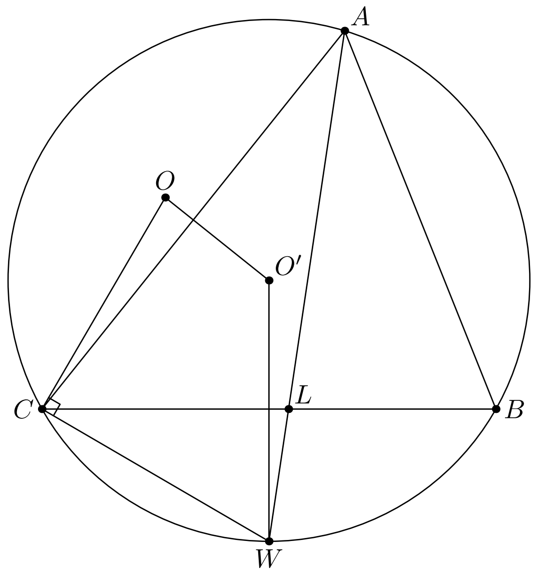


Рис.8.7

8. (Н.Белухов, Болгария) Вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC касаются стороны BC в точках M и N. Известно, что $\angle BAC = 2\angle MAN$. Докажите, что $BC = 2MN$.

Решение. Будем считать, что $AB > AC$ и, значит, точки B, N, M, C располагаются на прямой именно в таком порядке. Заметим, что верна

Лемма. Пусть K — середина BC, а I и J — центры вписанной и вневписанной окружностей. Тогда $AN \parallel IK$ и $AM \parallel JK$.

Для доказательства, например, первого утверждения леммы достаточно заметить, что точка вписанной окружности, диаметрально противоположная M, лежит на прямой AN, а K является также серединой MN.

Пользуясь леммой, получаем, что условие задачи равносильно равенству $\angle IKJ = 180° - \frac{\angle A}{2}$. Покажем, что при $BC = 2MN$ это выполнено. Действительно, в этом случае M и N будут серединами отрезков KC и KB, соответственно, IM и NJ являются серединными перпендикулярами к этим отрезкам. Значит треугольники IKC и JKB равнобедренные (рис.8.8), и $\angle JKB = 90° - \frac{\angle B}{2}$, $\angle IKC = \frac{\angle C}{2}$, ч.т.д.

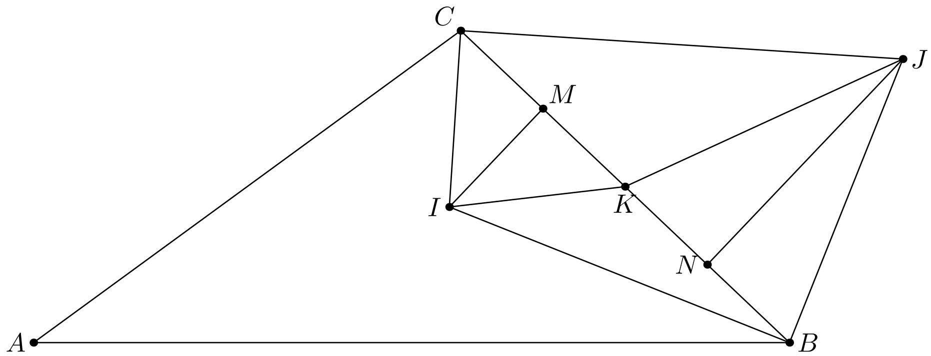


Рис.8.8

Рассмотрим теперь окружность $BICJ$. При фиксированном угле A отрезок IJ является ее диаметром, а дуга BC соответствует углу $90^\circ + A/2$. Когда хорда BC вращается внутри окружности, ее середина K описывает концентрическую окружность меньшего радиуса. С другой стороны, геометрическое место точек K', таких, что $\angle IKJ = 180^\circ - A/2$, состоит из двух дуг с концами I и J. Эти два ГМТ пересекаются в четырех точках, расположенных симметрично относительно отрезка IJ и серединного перпендикуляра к нему. Четыре четырехугольника $BICJ$, соответствующие этим точкам, равны, т.е. условие $\angle IKJ = 180^\circ - A/2$ определяет четырехугольник однозначно. Следовательно, оно равносильно равенству $BC = 2MN$.

V Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс. Решения.

1. (А.Блинков, Ю.Блинков) Середина стороны треугольника и основание высоты, проведенной к этой стороне, симметричны относительно точки касания этой стороны с вписанной окружностью. Докажите, что эта сторона составляет треть периметра треугольника.

   Первое решение. Пусть a, b — длины двух сторон треугольника, x, y — длины отрезков, на которые высота делит третью сторону (если основание высоты лежит вне стороны, длину одного из отрезков считаем отрицательной). Тогда по теореме Пифагора $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$. С другой стороны, точка касания вписанной окружности делит сторону на отрезки $p-a$ и $p-b$. Поэтому условие задачи равносильно равенству $x - y = 2(a - b)$. Разделив первое равенство на второе, получим, что длина третьей стороны $x + y = (a + b)/2 = 2p/3$.

   Второе решение. Пусть c — искомая сторона, тогда $r/r_c = (p-c)/p$. Пусть K и P — точки касания со стороной вписанной и вневписанной окружностей соответственно, I и Q — центры этих окружностей. Воспользуемся тем, что середина высоты CH лежит на прямой IP. Тогда из подобия двух пар треугольников получим, что $r = h/3$, $r_c = h$ (рис.9.1). Подставим в первое равенство и получим требуемое.

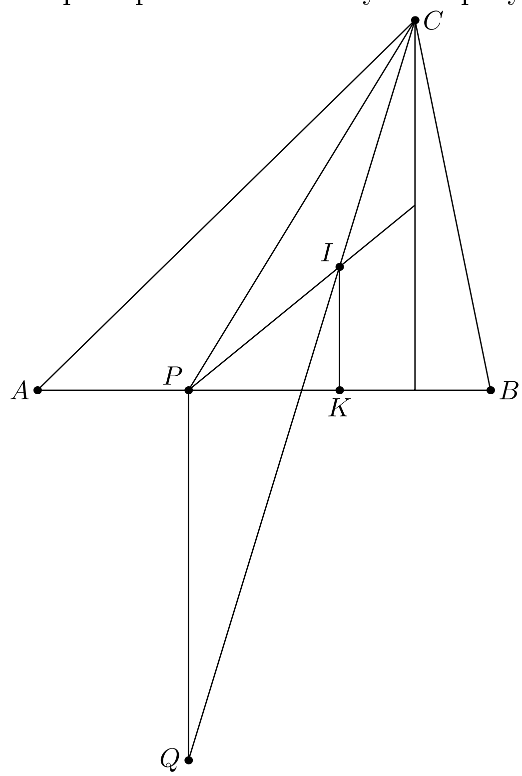


Рис.9.1

2. (О.Р.Мусин) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Обозначим через R_a, R_b, R_c и R_d радиусы описанных окружностей треугольников DAB, ABC, BCD, CDA. Докажите, что неравенство $R_a < R_b < R_c < R_d$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$180^\circ - \angle CDB < \angle CAB < \angle CDB.$$

Решение. Пусть углы четырехугольника удовлетворяют указанному неравенству. Тогда $\sin\angle CAB > \sin\angle CDB$ и, значит, $R_b < R_c$. Поскольку угол CDB тупой, отсюда следует, что точка A лежит вне окружности CDB, т.е. $\angle CAD < \angle CBD$. Так как оба эти угла острые, то $\sin\angle CAD < \sin\angle CBD$ и, значит, $R_c < R_d$. Кроме того, поскольку $\angle ACB + \angle CBD = \angle CAD + \angle ADB < 90^\circ$, то $\angle ACB < \angle ADB < 90^\circ$, т.е. $R_a < R_b$.

Обратно, из неравенства $R_b < R_c$ следует, что угол CAB лежит между углами CDB и $180^\circ - \angle CDB$. Тогда, если угол CDB острый, то $\angle ABD < \angle ACD$, а так как $R_a < R_d$, то $\angle ABD > 180^\circ - \angle ACD$. Но тогда, повторяя приведенное выше рассуждение, получаем, что $R_b < R_a < R_d < R_c$.

3. (И.Богданов) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, лучи BA и CD пересекаются в точке E, лучи BC и AD — в точке F. Вписанная окружность треугольника, образованного прямыми AB, CD и биссектрисой угла B, касается прямой AB в точке K, а вписанная окружность треугольника, образованного прямыми AD, BC и биссектрисой угла B, касается прямой BC в точке L. Докажите, что прямые KL, AC и EF пересекаются в одной точке.

Решение. Обозначим точки касания вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности со сторонами AB и BC через U и V. Имеем равенство двойных отношений:

$$(EB; KU) = \frac{EK}{BK} : \frac{EU}{BU} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\angle BEC}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\angle B}{4}} : \frac{\operatorname{ctg}\frac{\angle BEC}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\angle B}{2}} = (FB; LV).$$

Отсюда следует, что прямые KL, EF, UV пересекаются в одной точке. Аналогично доказывается, что AC, EF, UV пересекаются в одной точке (рис.9.3).

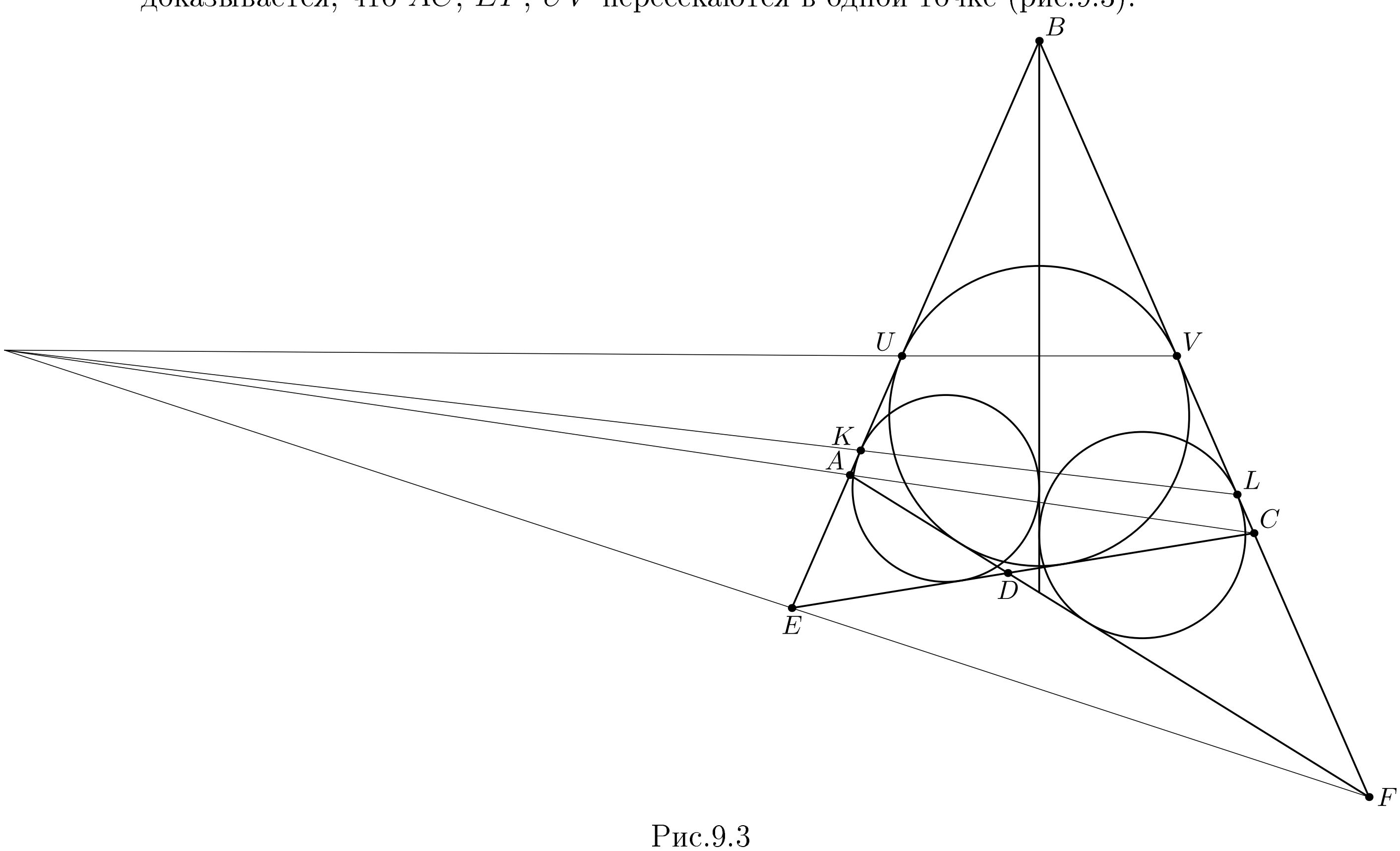


Рис.9.3

4. (Н.Белухов, Болгария) Дан правильный 17-угольник $A_1 \ldots A_{17}$. Докажите, что треугольники, образованные прямыми A_1A_4, A_2A_{10}, $A_{13}A_{14}$ и A_2A_3, A_4A_6 $A_{14}A_{15}$, равны.

Решение. Прежде всего отметим, что $A_1A_4 \parallel A_2A_3$, $A_2A_{10} \parallel A_{14}A_{15}$, $A_{13}A_{14} \parallel A_4A_6$. Поэтому надо доказать, что данные треугольники центрально симметричны.

Пусть A, B, C, D, E, F — середины хорд A_1A_2, A_3A_4, A_4A_{13}, A_6A_{14}, $A_{10}A_{14}$, $A_{15}A_2$ соответственно. Прямые BC, DE, FA как средние линии трех треугольников параллельны прямым $A_3A_{13} \parallel A_6A_{10} \parallel A_1A_{15}$. Прямые AD, BE, CF как оси симметрии трех равнобедренных трапеций пересекаются в центре семнадцатиугольника. По двойственной теореме Паппа прямые AB, CD, EF пересекаются в некоторой точке P (рис.9.4). Но эти прямые являются средними линиями трех полос, образованных парами параллельных сторон данных треугольников. Следовательно, эти треугольники симметричны относительно P.

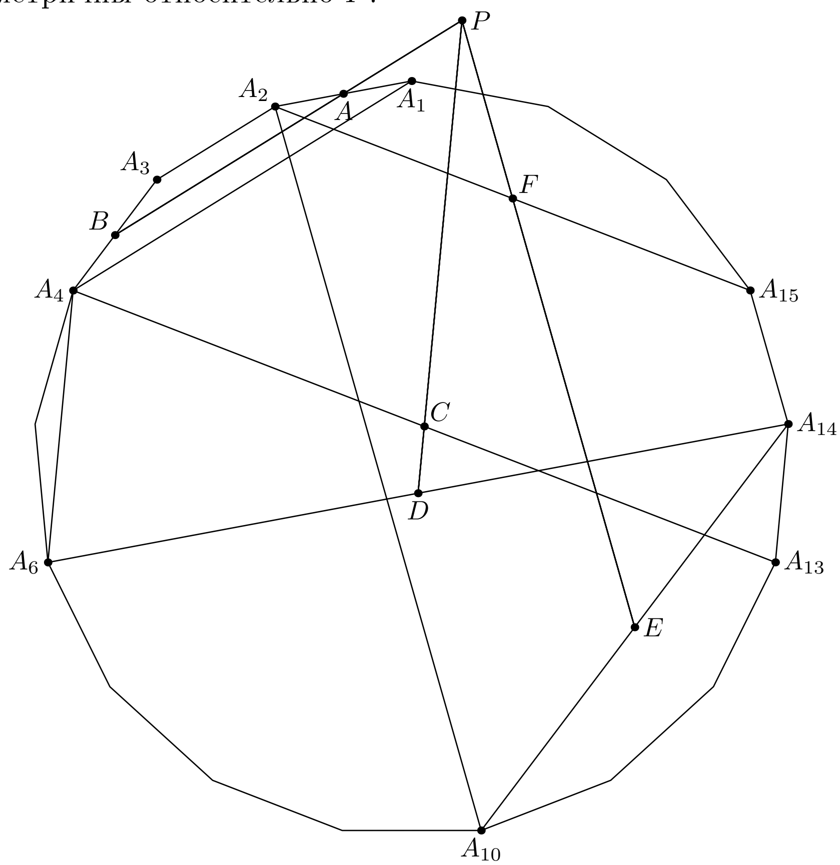


Рис.9.4

V Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс. Решения.

5. (Б.Френкин) На окружности отметили n точек. Оказалось, что среди треугольников с вершинами в этих точках ровно половина остроугольных. Найдите все значения n, при которых это возможно.

   Ответ. $n = 4$ или $n = 5$.

   Решение. Очевидно, что $n > 3$. Рассмотрим произвольный четырехугольник с вершинами в данных точках. Если центр окружности лежит внутри четырехугольника и не на его диагонали (назовем такой четырехугольник хорошим), то из четырех треугольников, образованных вершинами четырехугольника, остроугольных ровно два. Во всех остальных случаях остроугольных треугольников меньше двух. Следовательно, условие задачи выполняется только тогда, когда все четырехугольники, образованные данными точками, хорошие. Очевидно, что при $n = 4$ и $n = 5$ это возможно (например, можно взять вершины правильного пятиугольника).

   Пусть $n > 5$. Рассмотрим какую-нибудь из данных точек A и проведем через нее диаметр AA'. Если точка A' отмечена, то четырехугольник, образованный A, A' и любыми двумя из остальных точек, не будет хорошим. В противном случае найдутся три отмеченные точки, лежащие по одну сторону от AA'. Четырехугольник, образованный этими точками и точкой A, не является хорошим.

6. (А.Акопян) Дан треугольник ABC такой, что $AB - BC = \frac{AC}{\sqrt{2}}$. Пусть M — середина стороны AC, а N — основание биссектрисы угла B. Докажите, что

$$\angle BMC + \angle BNC = 90^\circ.$$

   Решение. Пусть C' — точка, симметричная C относительно BN. Тогда $AC' = AB - BC$, и по условию $AM/AC' = AC'/AC$. Значит, треугольники $AC'M$ и ACC' подобны, и $\angle AC'M = \angle C'CA = 90^\circ - \angle BNC$. Кроме того, применяя формулу для медианы, получаем, что $BM^2 = AB \cdot BC$, т.е. $BC'/BM = BM/BA$. Поэтому треугольники $BC'M$ и BMA также подобны, и $\angle BMC' = \angle BAM$. Следовательно, $\angle BMC = 180^\circ - \angle BMC - \angle C'MA = \angle MC'A$, откуда и получаем требуемое равенство (рис.9.6).

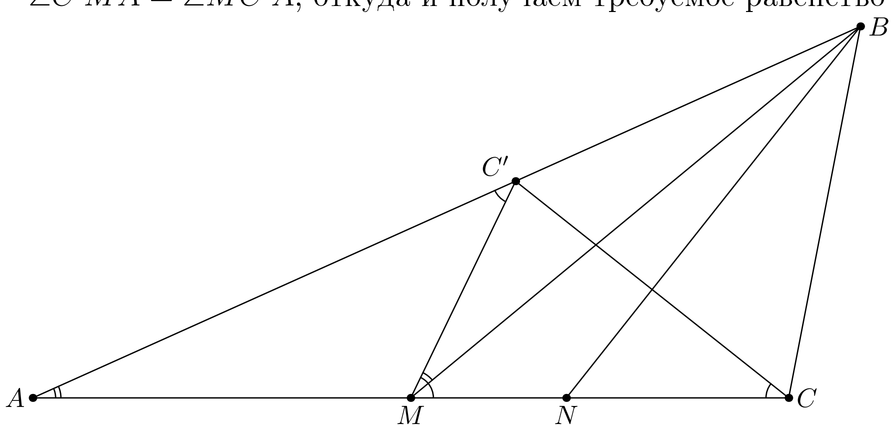


Рис.9.6

7. (М.Волчкевич) Даны две пересекающиеся окружности с центрами O_1, O_2. Постройте окружность, касающуюся одной из них внешним, а другой внутренним образом, центр которой удален от прямой O_1O_2 на наибольшее расстояние.

   Решение. Пусть O, r — центр и радиус некоторой окружности, касающейся данных; r_1, r_2 — радиусы данных окружностей. Тогда либо $OO_1 = r_1 - r$, $OO_2 = r_2 + r$, либо $OO_1 = r_1+r$, $OO_2 = r_2-r$, и в обоих случаях $OO_1+OO_2 = r_1+r_2$. Следовательно, среди всех точек, удовлетворяющих этому условию, надо найти наиболее удаленную от прямой O_1O_2. Известно, что из всех треугольников с данными основанием и высотой наименьший периметр имеет равнобедренный. Следовательно, наибольшую высоту среди всех треугольников с данными одной стороной и суммой двух других также имеет равнобедренный. Отсюда получаем, что центр искомой окружности лежит на равных расстояниях $(r_1 + r_2)/2$ от точек O_1 и O_2, а ее радиус равен $|r_1 - r_2|/2$.

8. (C.Pohoata, Румыния; А.Заславский) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Известно, что четыре окружности, каждая из которых касается его диагоналей и описанной окружности изнутри, равны. Верно ли, что $ABCD$ квадрат?

   Ответ. Да.

   Первое решение. Пусть $AC \cap BD = P$, а окружности, вписанные в криволинейные треугольники ABP, BCP, CDP, DAP, касаются описанной окружности $ABCD$ в точках K, L, M, N.

   Рассмотрим сегмент ABC. Когда точка X движется по дуге ABC от A к C, радиус окружности, вписанной в сегмент и касающейся дуги в точке X, возрастает, пока X не достигнет середины дуги, и убывает после этого. Следовательно, равным радиусам соответствуют симметричные относительно середины дуги положения X.

   Таким образом, $\smile AK =\smile LC$. Аналогично, $\smile AN =\smile MC$. Значит, $\smile NK =\smile LM$, и $\smile KL =\smile MN$. Тогда $\smile NL =\smile NK+ \smile KL = 180^\circ$ т.е. NL — диаметр окружности. Аналогично, KM тоже является диаметром.

   Симметрия относительно центра описанной окружности O переводит пару окружностей, касающихся ее в точках M и N, в пару окружностей, касающихся в точках K и L. Следовательно, общая внешняя касательная первой пары AC перейдет в CA. Поэтому AC и, аналогично, BD — диаметры окружности, т.е. $ABCD$ — прямоугольник. Его диагонали делят описанную окружность на четыре сектора, и радиусы окружностей, вписанных в эти секторы, равны. Значит равны и сами секторы, т.е. $ABCD$ — квадрат.

   Второе решение. Воспользуемся **теоремой Тебо**: пусть на стороне AC треугольника ABC взята точка M. Две окружности касаются луча MB, прямой AC и (изнутри) описанной окружности треугольника ABC. Тогда прямая, соединяющая центры этих окружностей, проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

   Доказательство теоремы Тебо можно прочитать в статье В.Ю.Протасова в "Кванте" №4, 2008.

   Применяя теорему Тебо к треугольникам ABC, BCD, CDA, DAB и точке пересечения диагоналей, получаем, что радиусы вписанных окружностей всех четырех треугольников равны. Вычислив площадь каждого из этих треугольников как произведение полупериметра на радиус вписанной окружности, и приравняв суммы площадей двух пар треугольников, получим, что $AC = BD$, т.е $ABCD$ — равнобедренная трапеция. Предположим, что AD, BC — ее основания и $AD > BC$. Тогда $S_{ABD}/S_{ABC} = AD/BC > (AD + BD + AB)/(BC + AB + AC)$, и радиусы вписанных окружностей этих треугольников не могут быть равными. Следовательно, $ABCD$ — прямоугольник. Аналогично предыдущему решению получаем, что $ABCD$ — квадрат.

V Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс. Решения.

1. (Д.Швецов) Пусть a, b, c — длины сторон произвольного треугольника; p — полупериметр; r — радиус вписанной окружности. Докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}}+\sqrt{\frac{ca(p-b)}{p}}+\sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}\geq 6r.$$

Решение. Применив неравенство о средних, получаем, что левая часть не меньше, чем

$$3\sqrt[3]{\frac{abc}{p}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}=3\sqrt[3]{4r^2R}.$$

Поскольку $R\geq 2r$, отсюда следует искомое неравенство.

2. (Ф.Нилов) Дан четырёхугольник $ABCD$. Его противоположные стороны AB и CD пересекаются в точке K. Его диагонали пересекаются в точке L. Известно, что прямая KL проходит через центр тяжести четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $ABCD$ - трапеция.

Решение. Предположим, что прямые AD и BC пересекаются в точке M. Пусть X, Y — точки пересечения этих прямых с прямой KL. Тогда двойные отношения $(AD;MX)$ и $(BC;MY)$ равны единице. Следовательно, оба отношения AX/XD и BY/YC либо больше, либо меньше 1, и отрезок XY не пересекается с отрезком, соединяющим середины сторон AD и BC, на котором лежит центр тяжести четырехугольника. Поэтому условие задачи выполняется только при $AD\parallel BC$.

3. (А.Заславский, А.Акопян) Радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC равны R и r; O, I — центры этих окружностей. Внешняя биссектриса угла C пересекает AB в точке P. Точка Q — проекция точки P на прямую OI. Найдите расстояние OQ.

Решение. Пусть A', B', C' — центры вневписанных окружностей треугольника ABC. Тогда I — ортоцентр треугольника $A'B'C'$, A, B, C — основания его высот и, значит, описанная окружность ABC является окружностью Эйлера треугольника $A'B'C'$. Следовательно, радиус описанной окружности $A'B'C'$ равен $2R$, а ее центром является точка O', симметричная I относительно O. Кроме того, точки A, B, A', B' лежат на одной окружности. Прямая AB является общей хордой этой окружности и окружности ABC, а внешняя биссектриса угла C — общей хордой этой окружности и окружности $A'B'C'$. Поэтому точка P является радикальным центром трех окружностей, а прямая PQ — радикальной осью окружностей ABC и $A'B'C'$ (рис.10.3). Следовательно, $OQ^2-R^2=(OQ+OO')^2-4R^2$. Поскольку $OO'=OI=\sqrt{R^2-2Rr}$ как расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей, получаем, что $OQ=R(R+r)/\sqrt{R^2-2Rr}$.

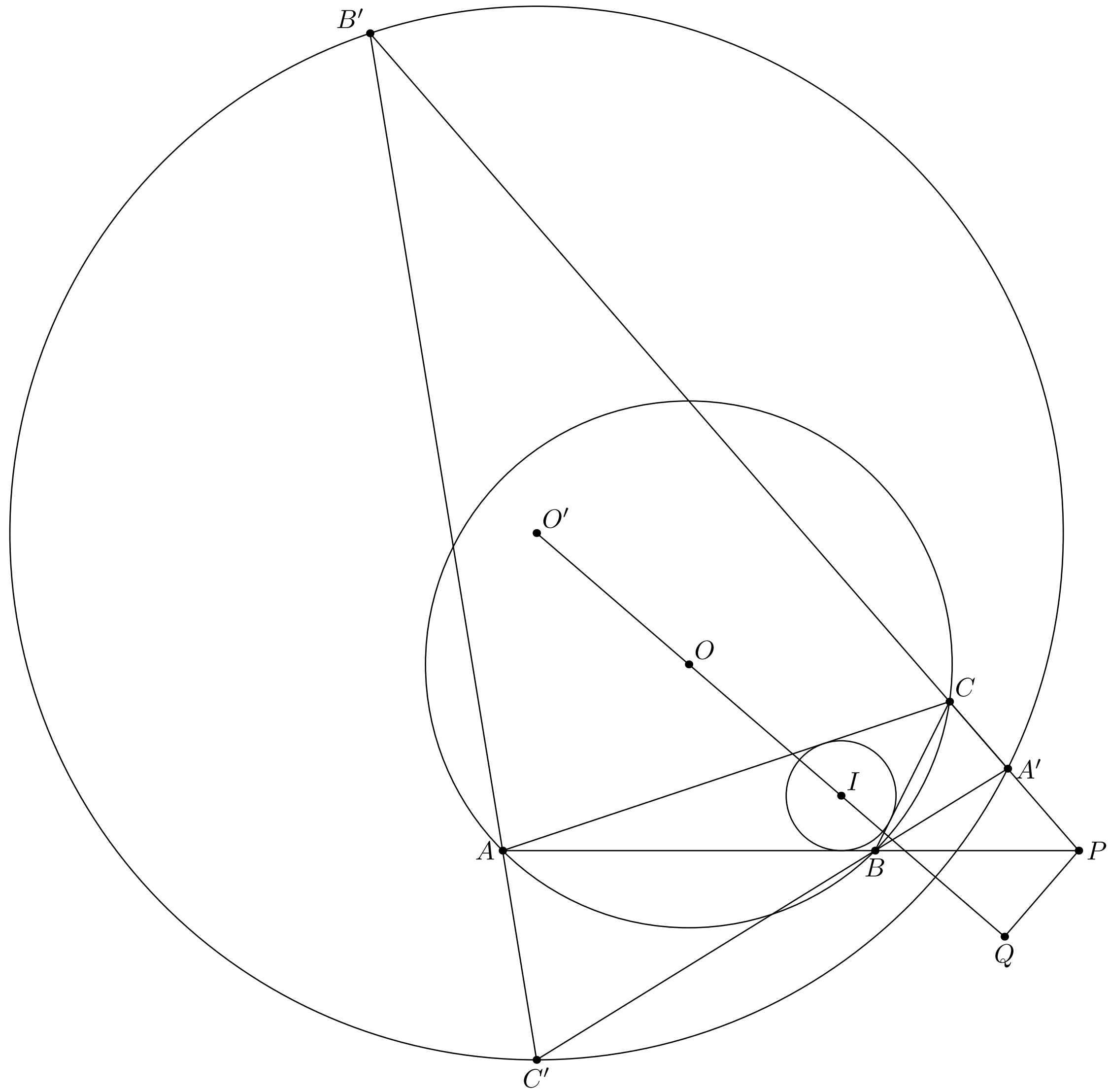


Рис.10.3

4. (C.Pohoata, Румыния) Через вершины треугольника ABC проводятся три произвольные параллельные прямые d_a, d_b, d_c. Прямые, симметричные d_a, d_b, d_c относительно BC, CA, AB соответственно, образуют треугольник XYZ. Найдите геометрическое место центров вписанных окружностей таких треугольников.

   Первое решение. Когда прямые d_a, d_b, d_c вращаются вокруг вершин треугольника, симметричные прямые вращаются с той же скоростью вокруг точек, симметричных вершинам относительно противоположных сторон. Поэтому, во-первых, углы треугольника XYZ не зависят от выбора прямых d_a, d_b, d_c, так что все эти треугольники подобны, во-вторых, точки X, Y, Z движутся с одинаковыми угловыми скоростями по трем окружностям. Значит, центр вписанной окружности тоже движется по некоторой окружности, и достаточно найти три ее точки.

   Возьмем прямые d_a, d_b совпадающими с прямой AB. Пусть A', B' — точки, симметричные A, B относительно противоположных сторон треугольника. Тогда Z — точка пересечения прямых AB' и BA', а Y и X — точки пересечения этих прямых с прямой, параллельной AB и лежащей вдвое дальше от точки C. Заметим, что C и центр O описанной окружности треугольника ABC равноудалены от прямых AB' и BA', т.е.

биссектриса угла XZY совпадает с прямой CO. Кроме того, нетрудно видеть, что биссектрисы углов ZXY и ZYX перпендикулярны AC и BC соответственно.

Рассмотрим проекции точки O и центра вписанной в треугольник XYZ окружности на прямую AC. Точка O проецируется в середину AC. Туда же проецируется точка пересечения прямых AB' и d_c, поскольку углы, образованные этими прямыми с AC, равны. Значит, X и центр вписанной окружности проецируются в точку, симметричную середине AC относительно A (рис.10.4). Следовательно, расстояние от O до центра вписанной окружности равно удвоенному радиусу описанной окружности треугольника ABC. Взяв прямые d_a, d_b, d_c параллельными другим сторонам ABC, получим тот же результат. Следовательно, искомое ГМТ — окружность, концентричная описанной окружности ABC, но вдвое большего радиуса.

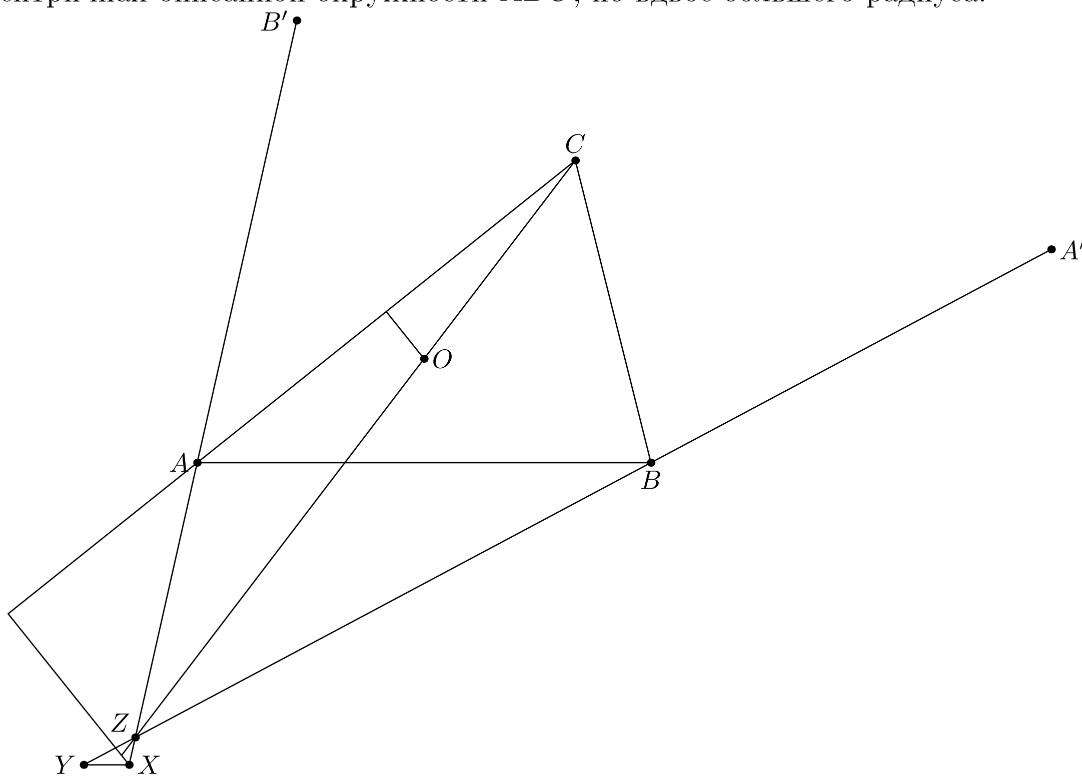


Рис.10.4

Второе решение. Рассуждая как в предыдущем решении, получаем, что когда прямые d вращаются с постоянной скоростью, прямые XY, YZ, ZX также вращаются спостоянной скоростью. Следовательно, вершина X треугольника XYZ описывает окружность с хордой $B'C'$, а биссектриса $\angle YXZ$ вращается вокруг середины W_a дуги $\smile B'C'$ также с постоянной скоростью. Аналогично биссектрисы углов $\angle Y$ и $\angle Z$ вращаются вокруг середин W_b, W_c соответствующих дуг $\smile A'C'$ и $\smile A'B'$.

Таким образом, центр вписанной окружности I одновременно движется по описанным окружностям треугольников IW_aW_b, IW_bW_c и IW_cW_a. Значит, эти окружности совпадают, и искомым ГМТ будет описанная окружность треугольника $W_aW_bW_c$.

Покажем, что каждая из точек W_a, W_b, W_c лежит на расстоянии $2R$ от O. Рассмотрим, например, точку W_a. Пусть BH_b, CH_c — высоты треугольника ABC, O_a — центр описанной окружности треугольника AH_bH_c, O' — точка, симметричная O относительно BC, M_a — середина BC. Треугольники BCO', $H_bH_cO_a$ и $B'C'W_a$ подобны (они все равнобедренные с углом при вершине $2C$), вырожденные треугольники BH_bB_1

и CH_cC_1 также подобны, следовательно, они подобны и "треугольнику"$O'O_aW_a$, т.е M_aO_a — средняя линия треугольника $O'OW_a$. Так как отрезок M_aO_a — диаметр окружности Эйлера, то его длина равна R.

V Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Финал. Второй день. 10 класс. Решения.

5. (Д.Прокопенко) В треугольник ABC вписан ромб $CKLN$ так, что точка L лежит на стороне AB, точка N — на стороне AC, точка K — на стороне BC. Пусть O_1, O_2 и O — центры описанных окружностей треугольников ACL, BCL и ABC соответственно. Пусть P — точка пересечения описанных окружностей треугольников ANL и BKL, отличная от L. Докажите, что точки O_1, O_2, O и P лежат на одной окружности.

   Решение. Очевидно, что L — основание биссектрисы угла C, а прямые LN, LK параллельны сторонам BC, AC. Поэтому $\angle AO_1L = 2\angle ACL = \angle C = \angle ANL$, т.е. точка O_1 лежит на описанной окружности треугольника ANL и является серединой дуги ANL этой окружности. Следовательно, $\angle O_1PL = \angle APL + \angle O_1PA = \angle C + \frac{\angle A+\angle B}{2} = \frac{\pi+\angle C}{2}$. Аналогично $\angle O_2Pl = \frac{\pi+\angle C}{2}$. Значит, $\angle O_1PO_2 = \pi - \angle C$. Но угол O_1OO_2 также равен $\pi - \angle C$, потому что прямые OO_1, OO_2 являются серединными перпендикулярами к AC и BC (рис.10.5).

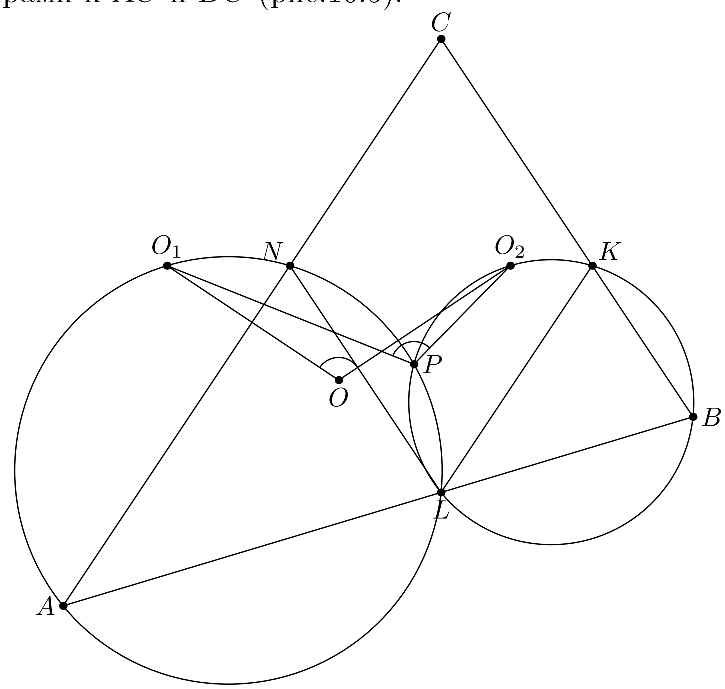


Рис.10.5

6. (А.Заславский) В треугольнике ABC M — точка пересечения медиан, I — центр вписанной окружности, A_1 и B_1 — точки касания этой окружности со сторонами BC и AC, G — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1. Докажите, что угол CGI прямой тогда и только тогда, когда $GM \parallel AB$.

   Решение. Пусть C_1 — точка касания вписанной окружности со стороной AB, C_2 — вторая точка пересечения этой окружности с прямой CC_1. Тогда G лежит на отрезке CC_1. Кроме того, существует центральная проекция, переводящая вписанную окружность в окружность, а G — в ее центр. Треугольник ABC при этой проекции перейдет в правильный, так что двойное отношение $(CG; C_1C_2)$ для любого треугольника такое же, как для правильного, т.е. равно 3. Следовательно, получаем цепочку равносильных утверждений:

$\angle CGI = 90°$;

G — середина C_1C_2;

$CC_1 = 3CC_2$;

$CC_1 = 3GC_1$;

$GM \parallel AB$.

Второе решение. Пусть $AC_1 = x, BA_1 = y, CB_1 = z$. По теореме Менелая

$$\frac{y+x}{x} . \frac{GC_1}{GC} . \frac{z}{y} = 1 \Rightarrow \frac{GC_1}{GC} = k = \frac{xy}{z(x+y)} = \frac{m}{z},$$

где $m = \frac{xy}{x+y}$.

Теперь,

$$\angle IGC = 90° \Leftrightarrow CI^2 - r^2 = GC^2 - GC_1^2 \Leftrightarrow z^2 =$$

$$= CC_1^2 (\frac{1}{(1+k)^2} - \frac{k^2}{(1+k)^2}) = CC_1^2 (\frac{1-k}{1+k}) = CC_1^2 (\frac{z-m}{z+m}).$$

Но по теореме Стюарта

$$CC_1^2 = \frac{x}{x+y}(z+y)^2 + \frac{y}{x+y}(z+x)^2 - xy = z(z+4m).$$

Из этих двух равенств получаем, что

$$z^2 = z(z+4m)(\frac{z-m}{z+m}) \Leftrightarrow z(z+m) = (z+4m)(z-m) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2zm = 4m^2 \Leftrightarrow z = 2m \Leftrightarrow k = \frac{1}{2},$$

ч.т.д.

7. (А.Глазырин) Дано множество точек O, A_1, A_2 ... A_n на плоскости. Расстояние между любыми двумя из этих точек является квадратным корнем из натурального числа. Докажите, что существуют такие векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$, что для любой точки A_i выполняется равенство $\vec{OA_i} = k\vec{x} + l\vec{y}$, где k и l — некоторые целые числа.

   Решение. Из условия задачи следует, что для любых i, j скалярное произведение $(\vec{OA_i}, \vec{OA_j})$ является половиной целого числа. Значит, для любых целых чисел $m_1, \ldots, m_n$ длина вектора $m_1\vec{OA_1} + \cdots + m_n\vec{OA_n}$ — корень из натурального числа. Отметим на плоскости точки, являющиеся концами всех таких векторов. Пусть X — ближайшая к O из отмеченных точек, Y — ближайшая к O из отмеченных точек, не лежащих на прямой OX. Разобьем плоскость на параллелограммы, образованные векторами $\vec{x} = \vec{OX}$ и $\vec{y} = \vec{OY}$. В силу выбора точек X, Y все отмеченные точки будут вершинами параллелограммов разбиения, следовательно, векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ — искомые.

8. (Б.Френкин) Можно ли вписать правильный октаэдр в правильный додекаэдр так, чтобы каждая вершина октаэдра была вершиной додекаэдра?

   Ответ. Нет.

Решение. Если правильный октаэдр вписан в правильный додекаэдр, то описанная сфера у них одна и та же. Две противоположные вершины октаэдра являются концами диаметра этой сферы и, следовательно, противоположными вершинами додекаэдра, а остальные вершины октаэдра равноудалены от этих двух. Но у додекаэдра нет вершин, равноудаленных от двух противоположных.

VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 8 класс. Решения.

1. (М. Рожкова, Украина) В неравнобедренном треугольнике ABC проведены высота из вершины A и биссектрисы из двух других вершин. Докажите, что описанная окружность треугольника, образованного этими тремя прямыми, касается биссектрисы, проведенной из вершины A.

   Решение. Обозначим через I точку пересечения биссектрис, а через X и Y — точки пересечения высоты с биссектрисами углов B и C соответственно. Пусть для определённости $AB > AC$; тогда точки I и Y лежат на отрезках BY и AX, соответственно. Значит, $\angle AIY = \angle A/2 + \angle B/2 = 90^\circ - \angle C/2 = \angle IXY$, откуда (по теореме об угле между касательной и хордой) сразу следует утверждение задачи.

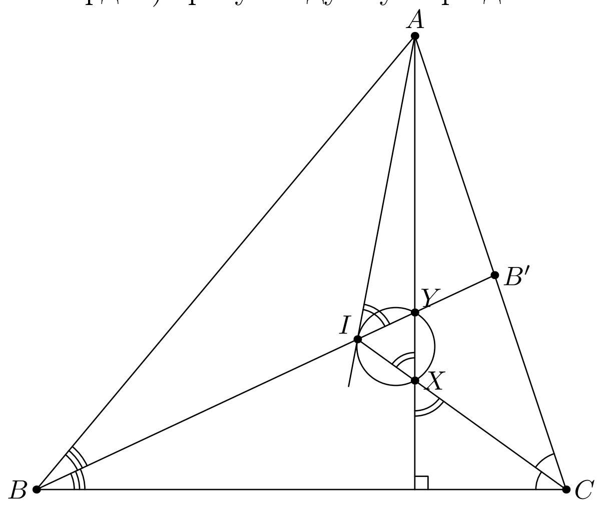


Рис. 8.1

2. (А. Акопян) Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек C таких, что точки A, B и C можно накрыть кругом единичного радиуса.

   Решение. Обозначим искомое ГМТ через Φ. Очевидно, что Φ пусто при $AB > 2$, а при $AB = 2$ является кругом с диаметром AB. Пусть $AB < 2$, а окружности ω_A, ω_B с центрами A, B и радиусами, равными 1, пересекаются в точках P и Q. Рассмотрим круги единичного радиуса, покрывающие точки A и B; ГМТ их центров есть «линза», образованная дугами PQ окружностей ω_A и ω_B. Значит, Φ есть объединение кругов единичного радиуса с центрами в этой линзе.

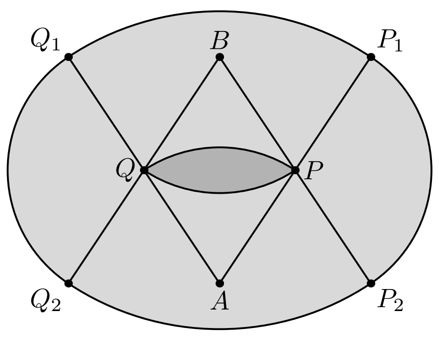


Рис. 8.2.1

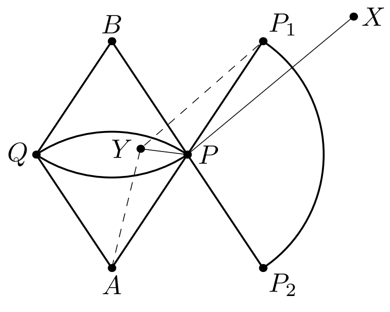


Рис 8.2.2

Построим точки P_1, P_2, Q_1, Q_2 такие, что P — середина отрезков AP_1, BP_2, а Q — середина отрезков AQ_1, BQ_2, и проведем четыре дуги окружностей: P_1Q_1 с центром A и радиусом 2, P_2Q_2 с центром B и радиусом 2, P_1P_2 с центром P и радиусом 1, Q_1Q_2 с центром Q и радиусом 1 (рис. 8.2.1). Докажем, что Φ есть фигура, ограниченная этими дугами. Ясно, что любая точка X этой фигуры принадлежат Φ. В самом деле, если X лежит в секторе P_1PP_2, то она лежит в круге с центром P; если же она лежит в секторе P_1AQ_1, то она лежит в круге с центром Y, где Y — точка пересечения луча AX и дуги PQ окружности ω_1. Остальные случаи аналогичны.

Осталось показать, что любая точка X вне нашей фигуры не принадлежат Φ. Если X лежит в угле P_1AQ_1, то $AX > 2$, и точки A и X не накрываются единичным кругом. Пусть теперь X лежит в угле P_1PP_2; нам надо доказать, что расстояние от X до любой точки Y, лежащей в линзе, больше 1. Для этого покажем, что $\angle XPY \geqslant 90°$ (и, следовательно, $XY \geqslant XP > 1$). Пусть для определённости в угле XPY лежит точка P_1 (рис. 8.2.2); тогда $\angle XPY \geqslant \angle P_1PY$. С другой стороны, $AY \leqslant 1$, а $AP_1 = 2$, откуда $P_1Y \geqslant 1 \geqslant AY$. Это и означает, что точки A и Y лежат по одну сторону от серединного перпендикуляра к AP_1, т.е. $90° \leqslant \angle P_1PY \leqslant \angle XPY$.

3. (С. Берлов, Д. Прокопенко) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке K. На биссектрисе угла AKD нашлась точка P такая, что прямые BP и CP делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

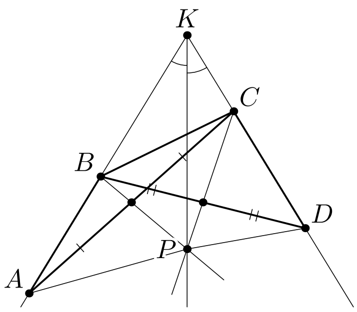


Рис. 8.3

Решение. Поскольку прямые BP и CP являются медианами треугольников ABC и BCD, то точки A и C равноудалены от BP, а B и D — от CP. Это значит, что $S_{PAB} = S_{PBC} = S_{PCD}$. С другой стороны, высоты треугольников PAB и PCD из точки P равны, так как P лежит на биссектрисе; значит, равны и их основания, что и требовалось доказать.

4. (И. Богданов) В равные углы X_1OY и YOX_2 вписаны окружности ω_1 и ω_2, касающиеся сторон OX_1 и OX_2 в точках A_1 и A_2 соответственно, а стороны OY — в точках B_1 и B_2. Точка C_1 — вторая точка пересечения A_1B_2 и ω_1, а точка C_2 — вторая точка пересечения A_2B_1 и ω_2. Докажите, что C_1C_2 — общая касательная к окружностям.

Решение. Можно считать, что $OA_2 > OA_1$. Треугольники OA_1B_2 и OB_1A_2 равны по двум сторонам и углу между ними, значит, $\angle OB_2A_1 = \angle OA_2B_1$ и $\angle OA_1B_2 = \angle OB_1A_2$. Далее, из равенства $\angle A_1OB_1 = \angle B_2OA_2 = \varphi$ следует, что $\angle A_1C_1B_1 = 90° - \varphi/2 = 180° - (90° + \varphi/2) = 180° - \angle A_2C_2B_2$. Следовательно, четырехугольник $B_2C_2B_1C_1$ вписан, поэтому $\angle B_1C_2C_1 = \angle B_1B_2C_1 = \angle OA_2B_1$. Наконец, поскольку прямые C_1C_2 и OA_2 образуют равные углы с хордой A_2C_2 окружности ω_2, а OA_2 —

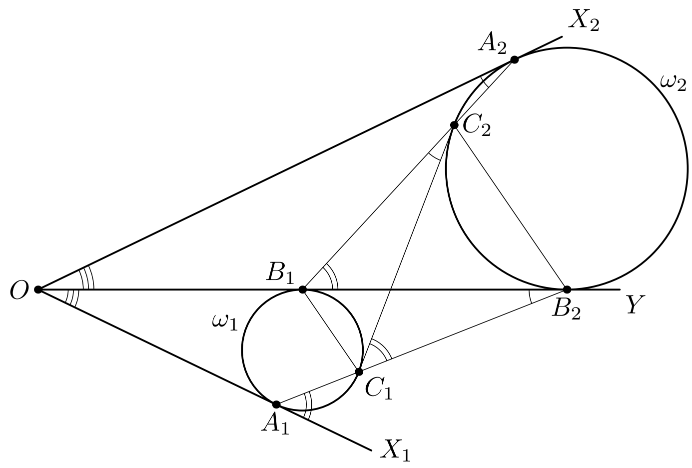


Рис. 8.4

касательная, то и C_1C_2 — также касательная. Касание C_1C_2 и ω_1 доказывается аналогично.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что из равенства треугольников OA_1B_2 и OA_2B_1 следует $A_1B_2 = A_2B_1$, а затем применив теорему о секущей и касательной: $B_1C_2 \cdot B_1A_2 = B_1B_2^2 = B_2C_1 \cdot B_2A_1$, откуда $B_2C_1 = B_1C_2$. Теперь, поскольку четырёхугольник $B_1C_2B_2C_1$ вписан, он является равнобокой трапецией и, следовательно, симметричен относительно линии центров наших окружностей.

VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 8 класс. Решения.

5. (Б. Френкин) В треугольнике ABC проведены высота AH, биссектриса BL и медиана CM. Известно, что в треугольнике HLM прямая AH является высотой, а BL — биссектрисой. Докажите, что CM является в этом треугольнике медианой.

   Решение. Так как $AH \perp LM$, то $LM \parallel BC$, т.е. LM — средняя линия треугольника. Значит, BL — биссектриса и медиана треугольника ABC, т.е $AB = BC$. Поскольку BL является биссектрисой углов ABC и HLM, точки H и M симметричны относительно нее; значит, $\frac{1}{2}AB = BM = BH = \frac{1}{2}BC$, и высота AH является медианой треугольника ABC. Таким образом, $AC = AB = BC$, треугольник ABC — равносторонний, и из симметрии CM делит HL пополам, что и требовалось доказать.

6. (Д. Прокопенко) Точки E, F — середины сторон BC, CD квадрата $ABCD$. Прямые AE и BF пересекаются в точке P. Докажите, что $\angle PDA = \angle AED$.

   Первое решение. Заметим, что прямые AE и BF перпендикулярны, поскольку получаются друг из друга поворотом на $90°$ вокруг центра квадрата. Пусть прямая, проходящая через A и параллельная BF, пересекает прямую CD в точке G. Так как $ABFG$ — параллелограмм, то $FG{=}AB$ и, значит, $FD = DG$. По теореме Фалеса прямая, проходящая через D и параллельная BF, является медианой треугольника ADP. Поскольку $AE \perp BF$, эта прямая является и высотой (рис. 8.6). Следовательно, треугольник ADP — равнобедренный, как и треугольник AED. Угол EAD в обоих треугольниках является углом при основании, поэтому углы при вершинах также равны.

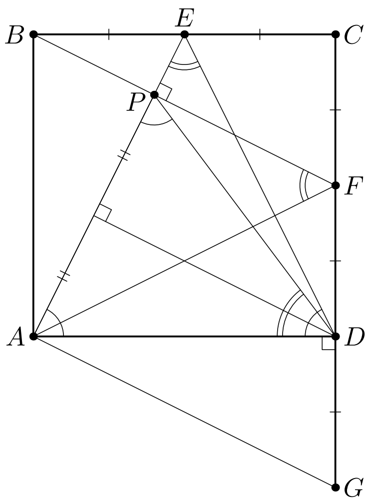


Рис. 8.6

   Второе решение. Опять же заметим, что $\angle APF = 90° = \angle ADF$. Значит, четырехугольник $APFD$ вписан, откуда $\angle ADP = \angle AFP = \angle AFB$. С другой стороны, $\angle AFB = \angle AED$, поскольку треугольники ABF и ADE равны.

   Третье решение. Пусть $AB = 1$. Поскольку BP — высота прямоугольного треугольника с катетами 1 и $\frac{1}{2}$, получаем $AP : PE = 4 : 1$. Тогда по теореме Фалеса проекция отрезка DP на CD равна $\frac{4}{5}$. Аналогично получаем, что его проекция на AD равна $\frac{3}{5}$. Значит, по теореме Пифагора $DP = 1 = AD$. Дальнейшие рассуждения такие же, как в первом решении.

7. (Б. Френкин) Каждый из двух правильных многоугольников P и Q разрезали прямой на две части. Одну из частей P и одну из частей Q сложили друг с другом по линии разреза. Может ли получиться правильный многоугольник, не равный ни одному из исходных, и если да, то сколько у него может быть сторон?

Ответ. Да, может; 3 или 4 стороны.

Рис. 8.7

Решение. Примеры, как может получиться правильный треугольник или квадрат, приведены на рисунке 8.7. Предположим, что у полученного многоугольника M хотя бы 5 сторон. Разрез пересекает его по двум точкам, каждая из которых принадлежит максимум двум сторонам. Значит, у M есть сторона AB, не имеющая общих точек (даже вершин) с разрезом. Пусть она лежит в куске, полученном из P; тогда сторона P равна AB, и углы при ней равны углам многоугольника M. Поскольку правильный многоугольник однозначно задается стороной и углом при ней, то $P = M$, что невозможно.

8. (А. Заславский) Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. На отрезках A_1I и B_1I построены как на основаниях равнобедренные треугольники с вершинами A_2 и B_2, лежащими на прямой AB. Известно, что прямая CI делит отрезок A_2B_2 пополам. Верно ли, что треугольник ABC — равнобедренный?

Ответ. Нет, не обязательно.

Решение. Покажем, что условию задачи удовлетворяет любой треугольник с $\angle C = 120°$. Пусть CC_1 — биссектриса угла C. Тогда CA_1 — внешняя биссектриса угла ACC_1, т.е. точка A_1 равноудалена от прямых AC и CC_1. Но она также равноудалена от прямых AC и AB, поэтому C_1A_1 — биссектриса угла CC_1B.

Значит, точка J, симметричная I относительно C_1A_1, лежит на прямой AB (рис. 8.8). Заметим, что $\angle AA_1C_1 = \angle A_1C_1B - \angle A_1AB = \frac{1}{2}(\angle CC_1B - \angle CAB) = \frac{1}{2}\angle ACC_1 = 30°$, откуда $\angle IA_1J = 2\angle AA_1C_1 = 60°$. Итого, в равнобедренном треугольнике IA_1J ($IA_1 = A_1J$) угол равен $60°$; значит, он равносторонний, $IJ = JA_1$, и потому $A_2 = J$. Таким образом, мы получили, что $A_2C_1 = JC_1 = IC_1$. Аналогично получаем $B_2C_1 = IC_1 = A_2C_1$, что и требовалось доказать.

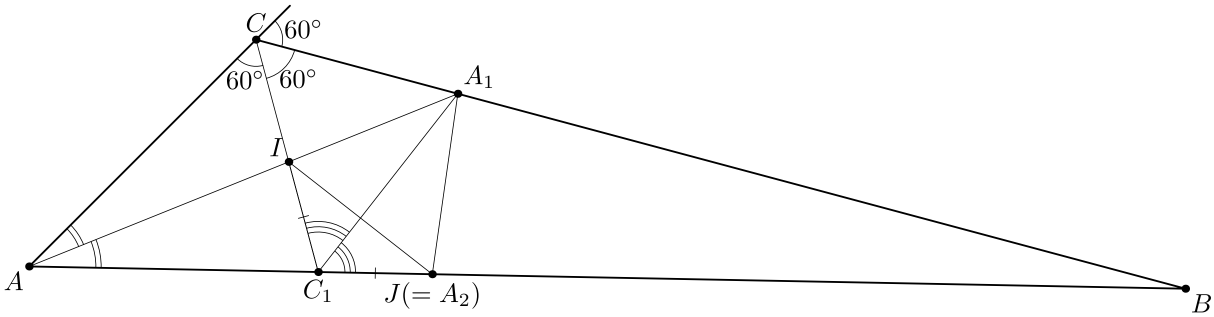


Рис. 8.8

Замечание. Можно показать, что в треугольнике, удовлетворяющем условию задачи, обязательно либо $AC = BC$, либо $\angle C = 120°$.

VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс. Решения.

1. (Б. Френкин) Для каждой вершины треугольника ABC нашли угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из этой вершины. Оказалось, что эти углы в вершинах A и B равны друг другу и меньше, чем угол в вершине C. Чему равен угол C треугольника?

   Ответ. 60°.

   Решение. Нетрудно посчитать, что угол между биссектрисой и высотой в вершине X треугольника XYZ равен $\frac{1}{2}|\angle Y - \angle Z|$. Следовательно, если эти углы в вершинах A и B треугольника ABC равны, то $\angle A - \angle C = \angle B - \angle C$ или $\angle A - \angle C = \angle C - \angle B$. В первом случае треугольник равнобедренный, т.е. высота и биссектриса из вершины C совпадают, что противоречит условию. Во втором случае $\angle C = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle C) = 60^\circ$.

   Замечание. Условие задачи выполняется в любом неравностороннем треугольнике с $\angle C = 60^\circ$.

2. (А. Акопян) Два треугольника пересекаются. Докажите, что внутри описанной окружности одного из них лежит хотя бы одна вершина другого. (Здесь треугольником считается часть плоскости, ограниченная замкнутой трёхзвенной ломаной; точка, лежащая на окружности, считается лежащей внутри нее.)

   Решение. Очевидно, что, если одна из описанных окружностей лежит внутри другой, то утверждение задачи выполнено, а если каждая из окружностей лежит вне другой, то треугольники не могут пересекаться. Поэтому будем считать, что описанные окружности треугольников пересекаются в точках P и Q (возможно, совпадающих), и предположим, что утверждение задачи не выполняется. Тогда вершины каждого из треугольников лежат на дуге PQ соответствующей окружности, расположенной вне другой окружности. Но эти дуги лежат по разные стороны от прямой PQ. Значит, сами треугольники тоже лежат по разные стороны от этой прямой и не могут пересекаться. (В случае, если $P = Q$, в качестве прямой PQ рассматривается общая касательная к окружностям.)

3. (В. Ясинский, Украина) На прямой лежат точки X, Y, Z (именно в таком порядке). Треугольники XAB, YBC, ZCD — правильные, причем вершины первого и третьего ориентированы против часовой стрелки, а второго по часовой стрелке. Докажите, что прямые AC, BD и XY пересекаются в одной точке.

   Решение. Через $\angle(k, \ell)$ будем обозначать направленный угол между прямыми k и ℓ (считающийся против часовой стрелки).

   При повороте на 60° по часовой стрелке вокруг B точки A и C переходят соответственно в X и Y. Следовательно, $\angle(XY, AC) = 60^\circ$. Пусть P — точка пересечения прямых XY и AC. Тогда $\angle(XP, AP) = 60^\circ = \angle(XB, AB)$, т.е. точки A, X, P, B лежат на одной окружности. Отсюда $\angle(CP, PB) = \angle(AX, XB) = 60^\circ = \angle(CY, YB)$, т.е. точки B, C, P, Y также лежат на одной окружности. Таким образом, точка P является второй точкой пересечения прямой XZ и описанной окружности треугольника BCY. Аналогично показывается, что прямая BD также проходит через эту

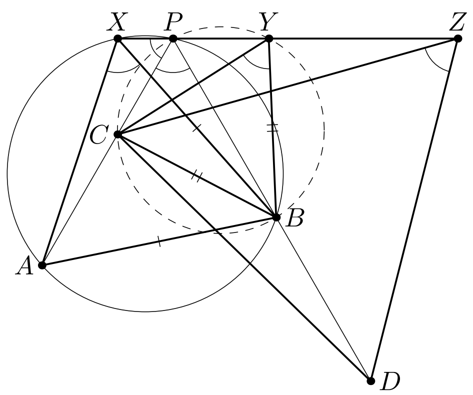


Рис. 9.3

точку. (В случае, если эти окружность и прямая касаются, получаем $P = Y$, и все три прямые проходят через Y.)

4. (А. Заславский) В треугольнике ABC отметили точки A', B' касания сторон BC, AC с вписанной окружностью и точку G пересечения отрезков AA' и BB'. После этого сам треугольник стерли. Восстановите его с помощью циркуля и линейки.

Первое решение. Обозначим через C' точку касания вписанной окружности со стороной AB. Сделаем инверсию с центром в точке B'. Будем обозначать образы точек индексами «1», т.е. образом точки A' будет A'_1 и т.п. Тогда образами прямых AB и BC будут окружности A_1B_1B' и C_1B_1B', а образом вписанной окружности — прямая $A'_1C'_1$, касающаяся обеих окружностей (рис. 9.4.1). Далее, радикальная ось $B'B_1$ этих окружностей, содержащая точку G_1, делит отрезок $A'_1C'_1$ пополам.

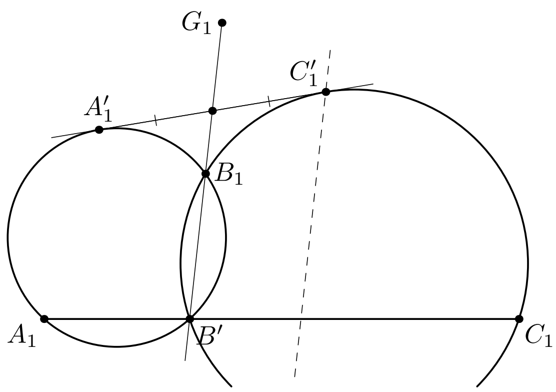


Рис. 9.4.1

Отсюда вытекает построение. Построим ℓ_1 — образ прямой $B'G$ (на которой лежит B_1) при гомотетии с центром A'_1 и коэффициентом 2; эта прямая содержит C'_1. Значит, её инверсный образ содержит точку C'. Проведя аналогичное построение, начиная с инверсии в точке A', получим вторую окружность, содержащую C' и, значит, сможем восстановить точку C' (вообще говоря, двумя способами). После этого восстанавливается описанная окружность треугольника $A'B'C'$ и стороны исходного треугольника, являющиеся касательными к ней.

Второе решение. Пусть C' — точка касания вписанной окружности со стороной AB, A_1, B_1, C_1 — проекции G на стороны треугольника $A'B'C'$ (рис. 9.4.2).

Заметим, что

$$\frac{GB_1}{GA_1}=\frac{\rho(C,A'C')}{\rho(C,B'C')}=\frac{CA'\sin\angle CA'C'}{CB'\sin\angle CB'C'}=\frac{\sin\angle A'B'C'}{\sin\angle B'A'C'},$$

то есть $GB_1\sin\angle B'A'C'=GA_1\sin\angle A'B'C'$. Это означает, что проекции отрезков GA_1 и GB_1 на прямую $A'B'$ равны, и C_1G является медианой в треугольнике $A_1B_1C_1$. Аналогично, A_1G также является медианой в этом треугольнике, т.е. G — его центр тяжести.

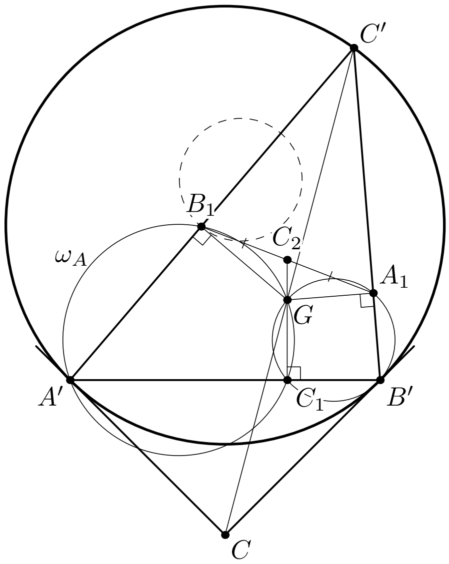


Рис. 9.4.2

Отсюда получаем искомое построение. Построим точку C_1 и ее образ C_2 при гомотетии с центром G и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ (таким образом, C_2 — середина A_1B_1). Далее построим окружности ω_A, ω_B с диаметрами GA', GB', и найдем точку пересечения окружности ω_A с окружностью, симметричной ω_B относительно C_2; мы получили точку B_1 (опять же, вообще говоря, двумя способами). Точка A_1 симметрична ей относительно C_2. Теперь можно восстановить прямые $A'C'$ и $B'C'$ как перпендикуляры к GA_1 и GB_1 в точках A_1 и B_1; дальнейшее ясно.

Замечание. В первом абзаце по сути доказывается, что точка Лемуана G (треугольника $A'B'C'$) является центром тяжести своего педального треугольника $A_1B_1C_1$.

VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс. Решения.

5. (Д. Швецов) Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($\angle ABC = 90^\circ$), касается сторон AB, BC, AC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Вневписанная окружность касается стороны BC в точке A_2. A_0 — центр окружности, описанной около треугольника $A_1A_2B_1$; аналогично определяется точка C_0. Найдите угол A_0BC_0.

   Решение. Поскольку точки A_1 и A_2 симметричны относительно середины отрезка BC, то $A_0B = A_0C$. С другой стороны, A_0 лежит на серединном перпендикуляре к отрезку A_1B_1, который совпадает с биссектрисой угла C. Следовательно, $\angle CBA_0 = \angle A_0CB = \frac{1}{2}\angle C$. Аналогично $ABC_0 = \frac{1}{2}\angle A$, и, значит, $\angle A_0BC_0 = \angle C - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 45^\circ$.

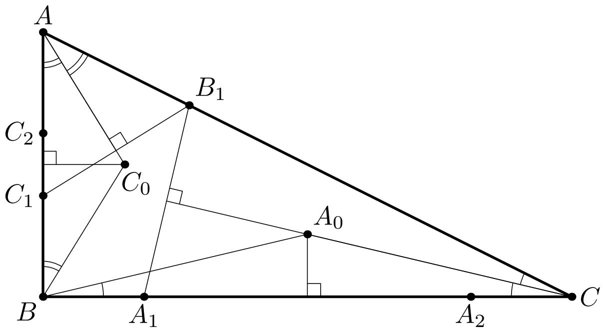


Рис. 9.5.

6. (Ю. Блинков) Произвольная прямая, проходящая через вершину B треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке K, а описанную окружность в точке M. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников AMK.

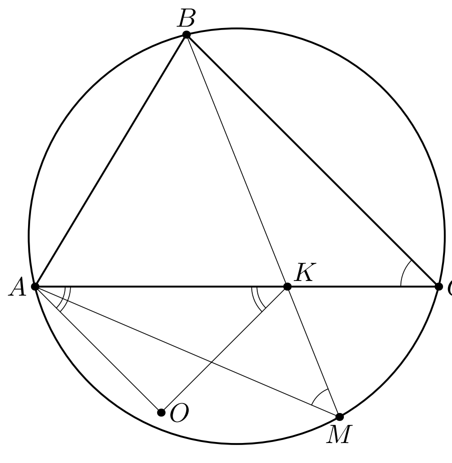


Рис. 9.6

   Решение. Пусть угол C — острый. Пусть O — центр описанной окружности треугольника AMK. Так как $\angle AMK = \angle AMB = \angle C$, то $\angle AOK = 2\angle C$ и $\angle OKA = \angle OAC = 90^\circ - \angle C$, т.е. этот угол не зависит от положения точек K, M (рис. 9.6). Следовательно, все центры лежат на одной прямой. Более того, поскольку все прямые KO при различных положениях точки K параллельны друг другу, то, когда точка K пробегает отрезок AC, точка O пробегает боковую сторону равнобедренного треугольника с основанием AC и углом при основании $90^\circ - \angle C$ (этот треугольник и точка B лежат в разных полуплоскостях относительно AC).

Если угол C тупой, то рассуждения аналогичны; получается боковая сторона равнобедренного треугольника с углом при основании $\angle C - 90^\circ$, лежащего по ту же сторону от AC, что и B.

7. (Н. Белухов, Болгария) В треугольнике ABC AL_a и AM_a — внутренняя и внешняя биссектрисы угла A. Пусть ω_a — окружность, симметричная описанной окружности треугольника AL_aM_a относительно середины BC. Окружность ω_b определена аналогично. Докажите, что ω_a и ω_b касаются тогда и только тогда, когда треугольник ABC прямоугольный.

   Первое решение. Известно, что описанная окружность треугольника AL_aM_a перпендикулярна описанной окружности Ω треугольника ABC и является геометрическим местом точек X, для которых $BX : CX = BA : CA$. Окружность ω_a симметрична её относительно серединного перпендикуляра к BC; поэтому ω_a также перпендикулярна Ω и является геометрическим местом точек X, для которых $BX : CX = CA : BA$. Аналогичный факт верен и для ω_b. Значит, множество общих точек ω_a и ω_b переходит в себя при инверсии относительно Ω; поэтому они касаются тогда и только тогда, когда некоторая их общая точка X лежит на Ω; при этом $AX : BX : CX = BC : CA : AB$.

   Итак, если окружности касаются, то по теореме Птолемея одно из произведений $AX \cdot BC$, $BX \cdot CA$, $CX \cdot AB$ равно сумме двух других. Так как эти произведения пропорциональны квадратам сторон треугольника ABC, он должен быть прямоугольным.

   Наоборот, пусть треугольник ABC прямоугольный, и точки A, B, C, X (в некотором порядке) образуют прямоугольник. Тогда эти точки лежат на одной окружности, и нетрудно убедиться, что $AX : BX : CX = BC : CA : AB$; это значит, что X — общая точка ω_a и ω_b, а это равносильно тому, что они касаются.

   Второе решение. Опять же напомним, что описанная окружность треугольника AL_aM_a является геометрическим местом точек X, для которых $BX : CX = BA : CA$, а её центр O_a лежит на касательной к Ω в точке A. Кроме того, известно, что точки O_a, O_b, O_c лежат на одной прямой. Получаем, что центр O'_a окружности ω_a симметричен O_a относительно середины BC, а её радиус равен длине касательной O'_aA', проведённой из O'_a к Ω (точка A' симметрична к A относительно серединного перпендикуляра к BC).

   Далее, точка X пересечения двух из окружностей ω_a, ω_b, ω_c удовлетворяет соотношениям $AX : BX : CX = BC : CA : AB$, то есть лежит и на третьей окружности. Значит, если две из окружностей ω_a, ω_b, ω_c касаются в точке X, то третья также проходит через эту точку и касается их обеих (ибо больше не имеет с ними общих точек).

   Это замечание позволяет ограничиться случаем, когда C — наибольший угол треугольника ABC. Если $\angle C = 90^\circ$, то касательные из точек O'_a и O'_b к Ω касаются её в одной и той же точке $A' = B'$, диаметрально противоположной C (рис. 9.7.1).

Значит, точки O'_a, O'_b, A' лежат на одной прямой и, следовательно, окружности с центрами O'_a, O'_b, проходящие через A', касаются в ней.

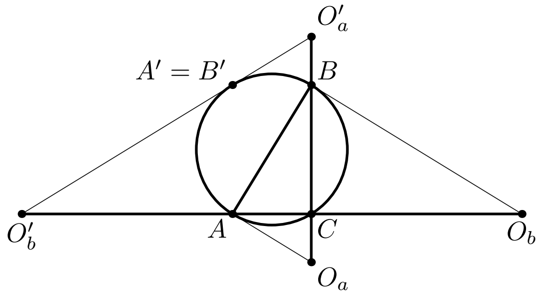


Рис. 9.7.1

Пусть угол C острый; проведём вторые касательные из точек O'_a и O'_b к Ω; тогда точки касания будут расположены так, как на рис. 9.7.2, и, следовательно, дуги $B'B''$ и $C'C''$ окружностей ω_a и ω_b пересекутся. Наконец, если угол C тупой (рис. 9.7.3), то отрезок $O'_aO'_b$ пересекает Ω в двух точках K и L; тогда $O_aA' + O_bB' = \sqrt{O_aK \cdot O_aL} + \sqrt{O_bK \cdot O_bL} < \dfrac{O_aK + O_aL}{2} + \dfrac{O_bK + O_bL}{2} = O_aO_b$; значит, сумма радиусов меньше расстояния между центрами, и окружности не имеют общих точек.

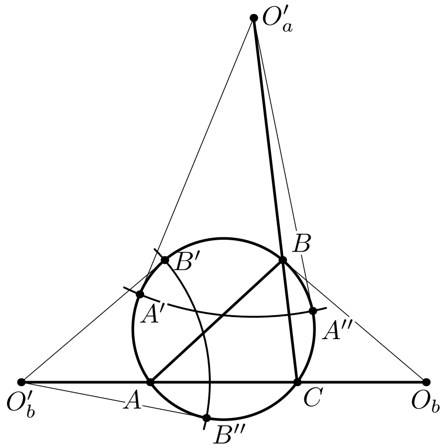


Рис. 9.7.2

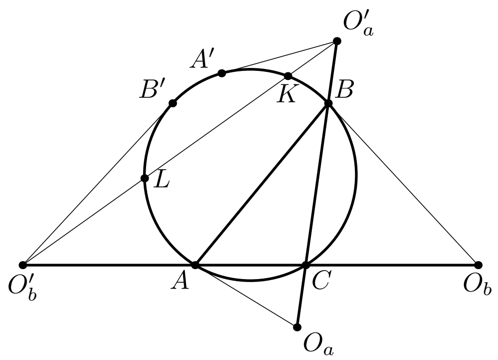


Рис. 9.7.3

8. (В. Гуровиц) На доске нарисован правильный многоугольник. Володя хочет отметить k точек на его периметре так, чтобы не существовало другого правильного многоугольника (не обязательно с тем же числом сторон), также содержащего отмеченные точки на своем периметре. Найдите наименьшее k, достаточное для любого исходного многоугольника.

Ответ. $k = 5$.

Решение. 1. Докажем сначала, что пяти точек достаточно. Пусть A, B, C, D — четыре последовательные вершины многоугольника (возможно, $A = D$). Отметим точки A, B, произвольную точку X на стороне AB, точку Y на стороне BC, достаточно близкую к B, и точку Z на стороне CD, достаточно близкую к C.

Пусть P — исходный многоугольник, Q — некоторый правильный многоугольник, содержащий на периметре наши пять точек, α и β — углы этих многоугольников. Прямая AB должна содержать сторону многоугольника Q, так как на ней лежат три отмеченных точки. Пусть эта сторона — $A'B'$ (рис. 9.8.1). Далее, пусть сторона Q, содержащая Y, лежит на прямой ℓ; тогда точки B и Z должны лежать по одну сторону от неё. Поскольку Z близка к C, это означает, что угол между прямыми ℓ и BC мал. С другой стороны, $\alpha = \angle ABY \geqslant \angle A'B'Y \geqslant \beta$, т.е. количество сторон у Q не больше, чем у P. Значит, угол между ℓ и BC может быть достаточно мал лишь тогда, когда эти прямые совпадают. Итак, прямая BC также содержит сторону Q, а точка B тогда является его вершиной. Отсюда следует, что P и Q гомотетичны с центром в точке B, и контур Q может содержать Z только тогда, когда $P = Q$. Итак, многоугольник восстановился однозначно.

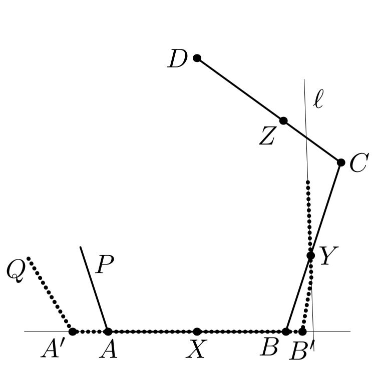


Рис. 9.8.1

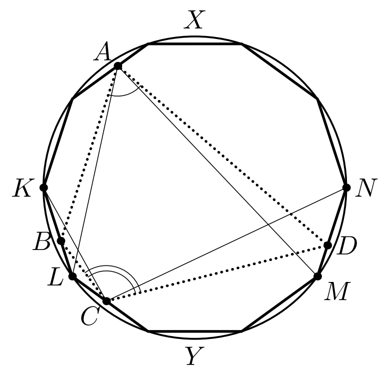


Рис. 9.8.2

2. Докажем теперь, что при достаточно большом числе сторон n правильного многоугольника P четырех точек не хватит для его задания. Предположим, что три из этих точек лежат на одной стороне AB многоугольника P. Правильный треугольник, построенный на AB, лежит целиком внутри P, т.е. четвертая из отмеченных точек лежит вне его. Поэтому, применив к нашему треугольнику гомотетию с центром в середине AB и подходящим коэффициентом, большим 1, можно добиться того, что и четвёртая отмеченная точка окажется на его контуре. Значит, в этом случае многоугольник однозначно не восстанавливается.

Если же наше предположение неверно, то отмеченные точки образуют выпуклый четырехугольник $ABCD$, «достаточно близкий» ко вписанному. Именно, покажем, что $\angle A + \angle C \geqslant 180^\circ - 360^\circ/n$. Пусть точки B и C лежат на сторонах KL и MN многоугольника P, причём точки A, K и N лежат по одну сторону от BD (рис. 9.8.2). Опишем вокруг P окружность ω с центром O. Тогда $\angle A + \angle C \geqslant \angle LAM + \angle KCN = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{LYM} + \overset{\frown}{KXN}) = 180^\circ - 360^\circ/n$. Аналогично, $\angle B + \angle D \geqslant 180^\circ - 360^\circ/n$, то есть $\angle A + \angle C \leqslant 180^\circ + 360^\circ/n$.

Мы покажем, что $ABCD$ можно вписать либо в квадрат, либо в правильный треугольник. Пусть $\angle A$ — наибольший угол 4-угольника $ABCD$, а $\angle B \geqslant \angle D$. Возможны несколько случаев.

Случай 1. Пусть $\angle B \geqslant 90^\circ$. Тогда ясно, что $ABCD$ можно вписать в квадрат так, чтобы точки A, B попали на одну из сторон (одним из способов на рис. 9.8.3, в

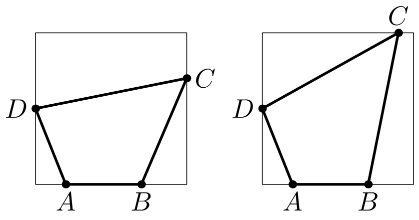


Рис. 9.8.3

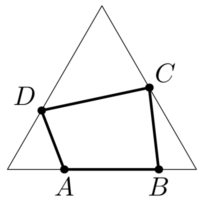


Рис. 9.8.4

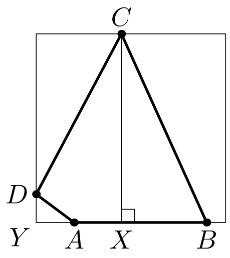


Рис. 9.8.5

зависимости от того, что больше: проекция CD на AB или проекция $ABCD$ на прямую, перпендикулярную AB).

Случай 2. Пусть теперь $\angle D \leqslant \angle B < 90^\circ$, но при этом обе суммы $\angle A + \angle D$ и $\angle B + \angle C$ не превосходят 240°. Проведём через C и D прямые, составляющие с AB углы 60° (рис. 9.8.4). Тогда из наших неравенств следует, что все точки A, B, C, D лежат на сторонах этого треугольника.

Случай 3. Нам остался случай, когда $\angle D \leqslant \angle B < 90^\circ$ (а значит, оба этих угла близки к 90°), но одна из сумм $\angle A + \angle D$ и $\angle B + \angle C$ больше 240° (поскольку $\angle A$ — наибольший, это может быть лишь сумма $\angle A + \angle D$). Покажем, что в этом случае можно вписать $ABCD$ в квадрат так, как показано на рис. 9.8.5. Пусть X и Y — проекции точек C и D на AB; тогда нам достаточно проверить, что $YB \leqslant CX$. Но $\angle DCX = 270^\circ - (\angle A + \angle D) \leqslant 30^\circ$, поэтому $XY \leqslant CX \operatorname{tg} 30^\circ \leqslant CX/\sqrt{3}$; с другой стороны, $\angle B \geqslant \frac{1}{2}(\angle B + \angle D) \geqslant 90^\circ - 180^\circ/n$, т.е. при большом n имеем $\operatorname{tg} \angle B \geqslant 10$; значит, $XB = CX \operatorname{ctg} \angle B \leqslant CX/10$, и $YB \leqslant CX/\sqrt{3} + CX/10 < CX$, что и требовалось.

Замечание. Пять точек требуются не для любого правильного многоугольника. Так, например, правильный треугольник можно восстановить и по четырём точкам: трём вершинам и внутренней точке одной из сторон.

VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс. Решения.

1. (А. Заславский) Пусть O, I — центры описанной и вписанной окружностей прямоугольного треугольника; R, r — радиусы этих окружностей; J — точка, симметричная вершине прямого угла относительно I. Найдите OJ.

   Ответ. $R - 2r$.

   Решение. Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник, $\angle C = 90°$. Очевидно, что окружность с центром J и радиусом $2r$ касается AC и BC. Докажем, что она касается также описанной около треугольника ABC окружности Ω; отсюда как раз будет следовать, что $OJ = R - 2r$.

   Рассмотрим окружность ω, касающуюся AC, BC в точках P, Q соответственно, и касающуюся Ω изнутри в точке T; нам надо доказать, что J — центр ω. Так как T — центр гомотетии ω и Ω, прямые TP, TQ вторично пересекают описанную окружность в точках, касательные в которых параллельны AC и BC, т.е. в серединах B', A' дуг AC, BC. Поэтому прямые AA' и BB' пересекаются в точке I. Применяя теорему Паскаля к ломаной $CAA'TB'B$, получаем, что точки P, I, Q лежат на одной прямой. Наконец, поскольку прямая PQ перпендикулярна биссектрисе угла C, получаем, что P, Q — проекции J на AC и BC (рис. 10.1), что и означает, что J — центр ω.

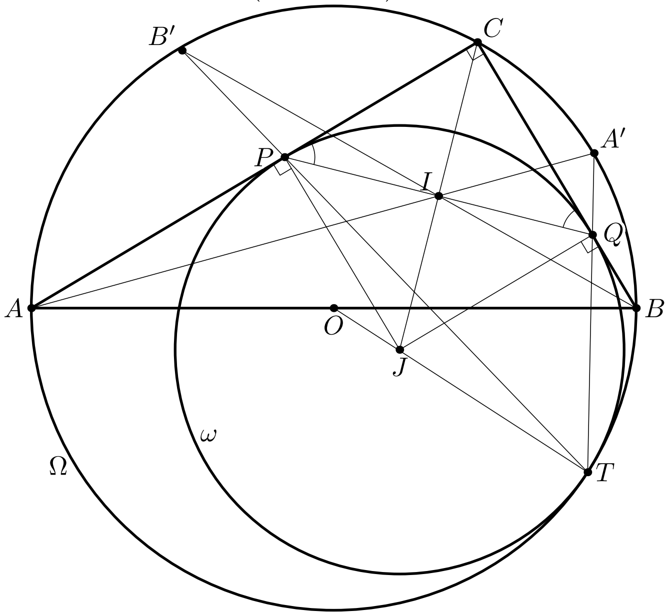


Рис. 10.1

   Второе решение. По формуле Эйлера, $OI = \sqrt{R(R-2r)}$. Поскольку OI — медиана в треугольнике OCJ, получаем $4OI^2 = 2(OC^2 + OJ^2) - CJ^2$, или $4R(R-2r) = 2R^2 + 2OJ^2 - 8r^2$, откуда и следует $OJ^2 = (R-2r)^2$.

2. (П. Кожевников) Каждая из двух равных окружностей ω_1 и ω_2 проходит через центр другой. Треугольник ABC вписан в ω_1, а прямые AC, BC касаются ω_2. Докажите, что $\cos\angle A + \cos\angle B = 1$.

   Решение. Пусть R — радиус окружностей, O — центр ω_2, P — точка на ω_1, диаметрально противоположная к O, а A' — точка касания AC и ω_2. Так как CO — биссектриса угла ACB, точки A и B симметричны относительно прямой OP.

Заменим сумму косинусов произведением: $\cos\angle A + \cos\angle B = 2\sin\frac{\angle C}{2}\cos\frac{\angle A-\angle B}{2}$. Из отмеченной выше симметрии следует, что $\frac{|\angle A-\angle B|}{2} = \angle COP$, т.е. $OP\cos\frac{\angle A-\angle B}{2} = CO$. Наконец, поскольку $\frac{\angle C}{2} = \angle OCA = \angle OCA'$, то $CO\sin\frac{\angle C}{2} = OA' = R = \frac{OP}{2}$ (рис. 10.2). Итого, $\cos\angle A + \cos\angle B = 2\cdot\dfrac{CO}{OP}\cdot\dfrac{OP}{2CO} = 1$, что и требовалось.

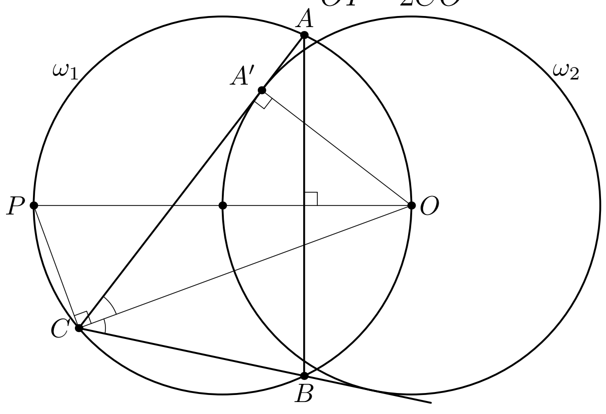


Рис. 10.2

3. (А. Акопян) Два выпуклых многоугольника $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$ ($n \geqslant 4$) таковы, что любая сторона первого больше соответствующей стороны второго. Может ли оказаться, что любая диагональ второго больше соответствующей диагонали первого?

Ответ. Нет.

Решение. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. Пусть ABC, ABC' — два таких треугольника, что $AC > AC'$, $BC > BC'$. Тогда для любой точки K отрезка AB имеем $CK > C'K$.

Доказательство. Из условия следует, что точки A, B, C' лежат по одну сторону от серединного перпендикуляра к отрезку CC'. Значит, и точка K лежит по ту же сторону, что равносильно искомому неравенству. $\square$

Докажем сначала утверждение задачи при $n = 4$. Предположим противное. Можно считать, что $\frac{A_1A_3}{B_1B_3} \geqslant \frac{A_2A_4}{B_2B_4}$. Применив гомотетию (с коэффициентом $\frac{A_1A_3}{B_1B_3}$) ко второму четырёхугольнику, можно считать, что $B_1B_3 = A_1A_3$, $B_2B_4 \geqslant A_2A_4$. Теперь, передвинув второй четырёхугольник, можно также считать, что $B_1 = A_1$, $B_3 = A_3$; при этом $A_1A_2 > A_1B_2$, $A_2A_3 > B_2A_3$, $A_3A_4 > A_3B_4$, $A_4A_1 > B_4A_1$. Пусть E — точка пересечения диагоналей A_1A_3 и A_2A_4; тогда по Лемме имеем $A_2E > B_2E$, $A_4E > B_4E$ и, следовательно, $A_2A_4 = A_2E + A_4E > B_2E + B_4E \geqslant B_2B_4$. Противоречие.

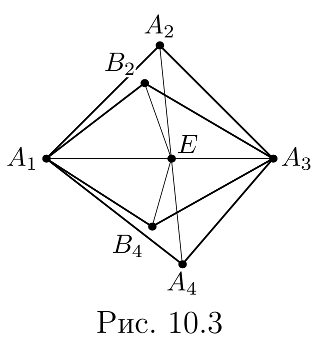


Рис. 10.3

Теперь докажем утверждение задачи индукцией по n. База при $n = 4$ уже доказана. Пусть $n \geqslant 5$. Немного подвигав вершины второго многоугольника, можно добиться того, что все неравенства из задачи сохранятся, но при этом все отношения длин соответствующих диагоналей станут различными. Пусть $\frac{A_1A_i}{B_1B_i}$ — максимальное такое отношение. Тогда, применив соответствующую гомотетию (с коэффициентом, меньшим 1) ко второму многоугольнику, мы получим, что $A_1A_i > B_1B_i$, но любая другая диагональ первого многоугольника меньше соответствующей диагонали второго. Теперь осталось применить предположение индукции к многоугольникам $A_1A_2 \ldots A_i$ и $B_1B_2 \ldots B_i$ (если $i > 3$) или $A_iA_{i+1} \ldots A_n$ и $B_iB_{i+1} \ldots B_n$ (если $i < n - 1$).

4. (Ф. Нилов) Проекции двух точек на стороны четырёхугольника лежат на двух различных концентрических окружностях (проекции каждой точки образуют вписанный четырехугольник, а радиусы соответствующих окружностей различны). Докажите, что четырёхугольник — параллелограмм.

   Решение. Пусть проекции точки P на стороны лежат на окружности с центром O, а P' — точка, симметричная P относительно O. Тогда проекции P' на стороны лежат на той же окружности. При этом P и P' являются фокусами некоторой коники, касающейся прямых, содержащих стороны четырехугольника. Поэтому, если выполнены условия задачи, то стороны четырехугольника являются общими касательными к двум коникам с общим центром. Таких касательных может быть не больше четырёх, и они разбиваются на две пары симметричных (а, значит, параллельных). Значит, стороны четырёхугольника и являются этими четырьмя касательными, а следовательно, образуют параллелограмм.

VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Финал. Второй день. 10 класс. Решения.

5. (Д. Швецов) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle B = 90°$) проведена высота BH. Окружность, вписанная в треугольник ABH, касается сторон AB, AH в точках H_1, B_1 соответственно; окружность, вписанная в треугольник CBH, касается сторон CB, CH в точках H_2, B_2 соответственно. Пусть O — центр описанной окружности треугольника H_1BH_2. Докажите, что $OB_1 = OB_2$.

Решение. Обозначим $\alpha = \angle ACB$. Пусть I_1, I_2 — центры вписанных окружностей треугольников ABH, CBH. Из подобия этих треугольников следует, что $I_1H_1 : I_2H_2 = AB : BC = \operatorname{tg}\alpha$. Так как отрезки I_1H_1, I_2H_2 перпендикулярны соответственно AB и BC, то проекции этих отрезков на AC равны $I_1H_1\cos\alpha$ и $I_2H_2\sin\alpha$, то есть равны друг другу. Тогда, поскольку O — середина H_1H_2, то проекция O на AC совпадает с серединой B_1B_2, что равносильно утверждению задачи (рис. 10.5).

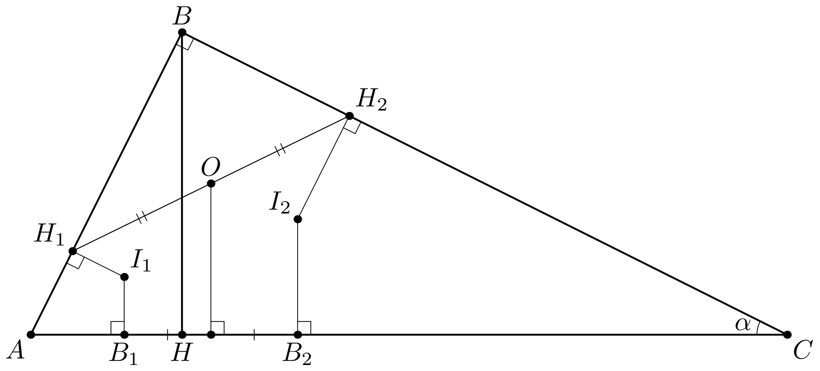


Рис. 10.5

6. (Ф. Нилов) Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон в точках A', B' и C'. Известно, что ортоцентры треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают. Верно ли, что ABC — правильный?

Ответ. Да.

Первое решение. Предположим противное. Пусть O, I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, H — совпадающий ортоцентр треугольников ABC и $A'B'C'$, A'', B'', C'' — вторые точки пересечения прямых $A'H'$, $B'H'$, $C'H'$ со вписанной окружностью ω. Тогда $\angle A''C''C' = \angle A''A'C' = 90° - \angle A'C'B' = \angle B''B'C' = \angle B''C''C'$; это значит, что $A''B''$ параллельна касательной к ω в точке C', то есть $A''B'' \parallel AB$. Значит, стороны треугольников ABC и $A''B''C''$ параллельны друг другу, а H — центр вписанной окружности треугольника $A''B''C''$. Следовательно, существует гомотетия, переводящая треугольник ABC в $A''B''C''$. При этой гомотетии центр описанной окружности O переходит в I, а точка пересечения биссектрис I — в H. Таким образом, точка H лежит на прямой OI, причем $OI : IH = R : r$ (рис. 10.6).

Какие-то две вершины треугольника ABC (например, A и B) не лежат на прямой OI. Так как AI, BI — биссектрисы углов OAH, OBH соответственно, то $OI : IH = AO : AH = BO : BH$. Следовательно, $AH = BH = r$, что невозможно, ибо $AH + BH \geqslant AB > 2r$. Полученное противоречие показывает, что треугольник ABC — правильный.

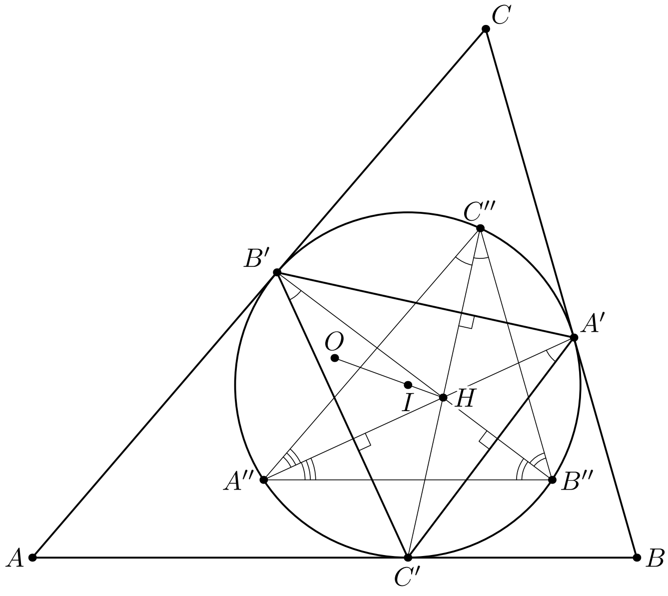


Рис. 10.6

Второе решение. Опять же предположим противное и обозначим через H совпадающий ортоцентр. Имеем $IC' \parallel HC \perp AB$ и $CI \parallel C'H \perp A'B'$. Значит, либо точки C, I, C', H лежат на одной прямой (и тогда $AC = BC$), либо четырёхугольник $CIC'H$ — параллелограмм; аналогичное утверждение верно про остальные вершины. У треугольника ABC найдётся сторона (скажем, AB), не равная ни одной другой его стороне. Тогда четырёхугольники $AIA'H$ и $BIB'H$ — параллелограммы, и $AH = A'I = r = B'I = BH = r$, что опять же невозможно, ибо $AH + BH \geqslant AB > 2r$.

7. (Б. Френкин) Каждый из двух правильных многогранников P и Q разрезали плоскостью на две части. Одну из частей P и одну из частей Q приложили друг к другу по плоскости разреза. Может ли получиться правильный многогранник, не равный ни одному из исходных, и если да, то сколько у него может быть граней?

Ответ. Да, может; 4 или 8 граней.

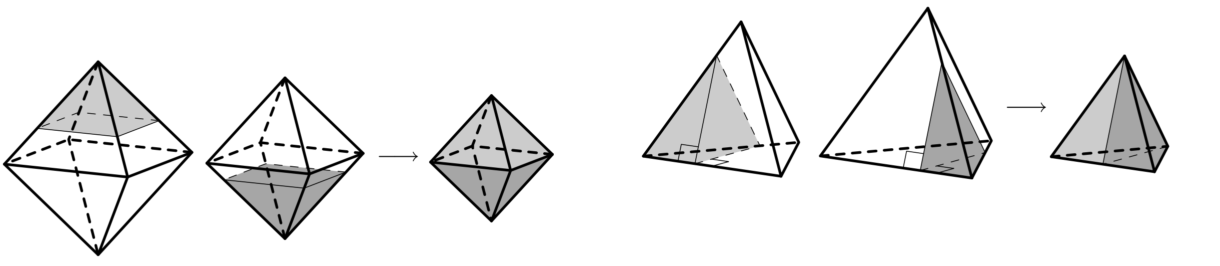


Рис. 10.7

Решение. Пусть R — полученный многогранник. Ясно, что часть многогранника P содержит хотя бы одну его вершину A, не лежащую в плоскости разреза. Многогранный угол многогранника P при ней будет также многогранным углом при вершине многогранника R; это означает, что все многогранники P и Q подобны. Аналогично, Q также подобен им. Более того, если хотя бы одно ребро многогранника P, выходящее из A, не имеет общих точек (даже другой вершины!) с плоскостью разреза, то оно также будет являться ребром в R. Тогда в подобных многогранниках P и R рёбра равны, а следовательно, равны и многогранники, что невозможно.

Итак, часть P, вошедшая в R — это пирамида с вершиной A. Аналогично, часть Q, вошедшая в R — это пирамида с вершиной B. Следовательно, не менее половины граней в R примыкает к одной и той же вершине. Это исключает додекаэдр и икосаэдр. Если наши многогранники — кубы, то от P и Q отрезаются треугольные пирамиды, и в итоговом многограннике не больше 5 вершин, что неверно.

Оставшиеся случаи октаэдра и тетраэдра возможны, как показано на рис. 10.7.

8. (Н. Белухов, Болгария) Вокруг треугольника ABC описали окружность k. На сторонах треугольника отметили три точки A_1, B_1 и C_1, после чего сам треугольник стерли. Докажите, что его можно однозначно восстановить тогда и только тогда, когда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Решение. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. Рассмотрим треугольники ABC и $A'B'C'$, вписанные в окружность k; пусть их соответствующие стороны пересекаются в точках A_1, B_1, C_1 (рис. 10.8.1). Тогда

$$\left(\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\right)\cdot\left(\frac{A'C_1}{C_1B'}\cdot\frac{B'A_1}{A_1C'}\cdot\frac{C'B_1}{B_1A'}\right)=1.$$

Доказательство. Из подобных треугольников AC_1A' и $B'C_1B$ имеем $\dfrac{AC_1}{B'C_1}=\dfrac{AA'}{BB'}$ и $\dfrac{A'C_1}{BC_1}=\dfrac{AA'}{BB'}$. Перемножая эти равенства с четырьмя аналогичными, получаем требуемое. $\square$

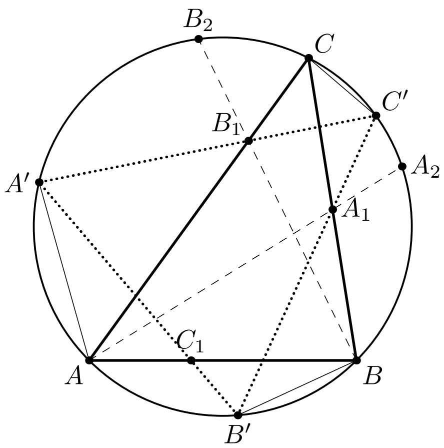


Рис. 10.8.1

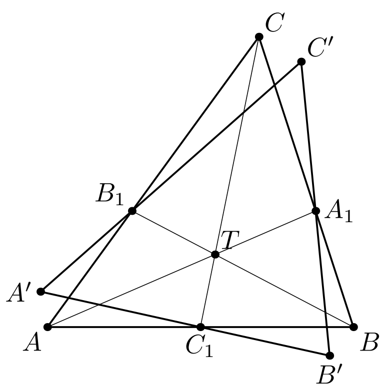


Рис. 10.8.2

Перейдём к решению задачи. Докажем сначала, что для любых точек A_1, B_1 на сторонах BC и AC найдётся не более одной точки C_1 на стороне AB такой, что треугольник ABC восстанавливается однозначно. Зафиксируем треугольник ABC и точки A_1, B_1. Пусть A_2, B_2 — вторые точки пересечения прямых AA_1, BB_1 с окружностью k; C' — произвольная точка дуги A_2CB_2; A', B' — вторые точки пересечения прямых $C'A_1$, $C'B_1$ с k; C_1 — точка пересечения AB и $A'B'$. Когда точка C' близка к A_2 или к B_2, точка C_1 близка к A или B, соответственно. Далее, при движении точки C' от A_2 до B_2 точка C_1 непрерывно движется от A до B (в случае, когда

$C = C'$, рассматривается предельное положение точки C_2; то, что оно существует, гарантируется Леммой). Значит, для любой точки C_1, кроме, возможно, вышеупомянутого предельного положения, треугольник ABC однозначно не восстанавливается, ибо существует второй треугольник $A'B'C'$.

Осталось доказать, что, если AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке T, то треугольник восстанавливается однозначно (тогда из вышедоказанного следует, что других случаев нет). Пусть это не так; тогда из Леммы мы получаем

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{A'C_1}{C_1B'} \cdot \frac{B'A_1}{A_1C'} \cdot \frac{C'B_1}{B_1A'} = 1,$$

то есть отрезки $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ также пересекаются в одной точке T'. Но это невозможно. Действительно, пусть, например, точка A' лежит на дуге AC (рис. 10.8.2); тогда T' не может лежать в угле ATB, так как его не пересекает отрезок $A'A_1$. Остальные случаи разбираются аналогично.

VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Решения. Финал. Первый день. 8 класс

1. (А.Блинков) В трапеции с перпендикулярными диагоналями высота равна средней линии. Докажите, что трапеция равнобокая.

   Первое решение. Проведем через вершину C прямую, параллельную диагонали BD. Пусть E — точка пересечения этой прямой с продолжением основания AD. Тогда треугольник ACE — прямоугольный и, значит, его медиана из вершины C равна половине гипотенузы, т.е. средней линии трапеции. Из условия задачи, что высота этого треугольника совпадает с медианой, поэтому диагонали трапеции равны.

   Второе решение. Пусть AD, BC — основания трапеции, O — точка пересечения ее диагоналей. Тогда медианы прямоугольных треугольников OAD, OBC равны половинам их гипотенуз, т.е. сумма этих медиан равна средней линии трапеции. С другой стороны, высота трапеции равна сумме высот этих же треугольников. Поэтому из условия задачи следует, что медианы совпадают с высотами, т.е треугольники OAD, OBC — равнобедренные, откуда, очевидно, вытекает, что $AB = CD$.

2. (Т.Голенищева-Кутузова) Петя вырезал из бумаги прямоугольник, положил на него такой же прямоугольник и склеил их по периметру. В верхнем прямоугольнике он провёл диагональ, опустил на неё перпендикуляры из двух оставшихся вершин, разрезал верхний прямоугольник по этим линиям и отогнул полученные треугольники во внешнюю сторону, так что вместе с нижним прямоугольником они образовали прямоугольник.

   Как по полученному прямоугольнику восстановить исходный с помощью циркуля и линейки?

   Решение. Пусть $ABCD$ — полученный прямоугольник; O — его центр; K, M — середины его коротких сторон AB, CD; L, N — точки пересечения окружности с диаметром KM соответственно с BC и AD (рис.8.2). Тогда прямоугольник $KLMN$ — искомый. Действительно, пусть P — проекция M на LN. Так как $\angle CLM = \angle OML = \angle MLO$, то треугольники MCL и MPL равны и при перегибании по ML они совместятся. Аналогично при перегибании по MN совместятся треугольники MDN и MPN. Наконец, поскольку конструкция симметрична относительно точки O, то при перегибании по KL и KN треугольники BKL и AKN наложатся на треугольник NKL.

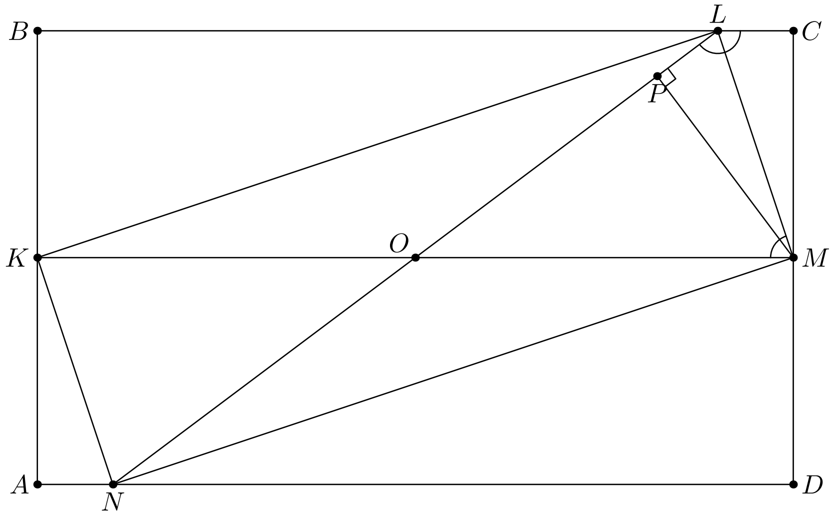


Рис.8.2

3. (А.Мякишев, Д.Мавло) Около треугольника ABC описали окружность. A_1 — точка пересечения с нею прямой, параллельной BC и проходящей через A. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Из точек A_1, B_1, C_1 опустили перпендикуляры на BC, CA, AB соответственно. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке.

Первое решение. Так как точка A_1 симметрична A относительно серединного перпендикуляра к BC, то перпендикуляр из A_1 симметричен высоте из A. По теореме Фалеса, он пересекает прямую OH, где O и H — центр описанной окружности и точка пересечения высот треугольника, в точке, симметричной H относительно O. Через эту же точку проходят два других перпендикуляра.

Второе решение. Пусть K, L и M — точки попарного пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1 (рис.8.3). Докажем, что KC_1 — высота треугольника KLM. Поскольку $KBCA$ — параллелограмм, а AC_1CB — равнобокая трапеция, то $KA = BC = AC_1$, $\angle KAB = \angle ABC = \angle BAC_1$. Таким образом, в равнобедренном треугольнике KAC_1 AB является биссектрисой, а, следовательно, и высотой. То есть, $AB \perp KC_1$, откуда $CC_1 \perp KC_1$. Аналогично доказывается, что LA_1 и MB_1 — также являются высотами треугольника KLM. Поскольку высоты пересекаются в одной точке, то утверждение задачи доказано.

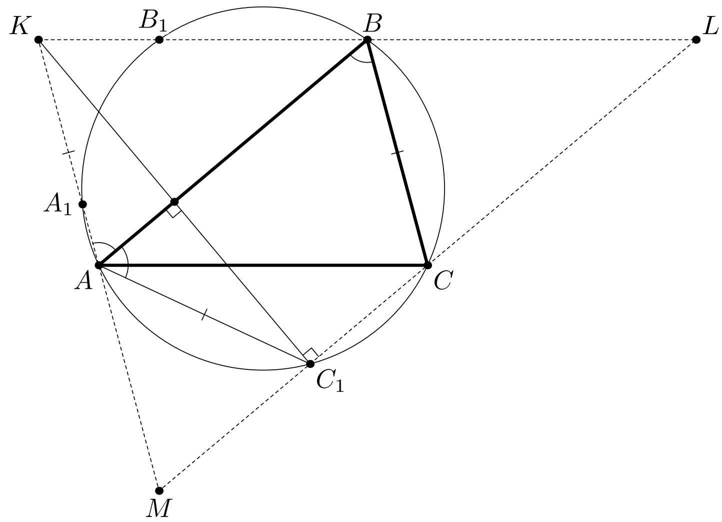


Рис.8.3.

4. (А.Шаповалов) В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд, суммарная длина которых тоже равна 1. Докажите, что в окружность можно вписать правильный шестиугольник, стороны которого не пересекают этих хорд.

Решение. Закрасим меньшие из дуг, стягиваемых проведенными хордами. Если сдвинуть закрашенные дуги так, чтобы соответствующие хорды образовали ломаную, то расстояние между концами этой ломаной будет меньше 1, а, поскольку хорда длины 1 стягивает дугу, равную $1/6$ круга, то сумма закрашенных дуг будет меньше, чем $1/6$ круга.

Теперь впишем в окружность правильный шестиугольник и отметим одну из его вершин. Будем вращать этот шестиугольник и каждый раз, когда отмеченная вершина попадает в закрашенную точку, закрашивать точки, в которые попадут остальные вершины. Тогда общая длина закрашенных дуг увеличится не более, чем в 6 раз, следовательно, найдется положение шестиугольника, при котором все его вершины попадут в незакрашенные точки. Очевидно, что в этом положении стороны шестиугольника не будут пересекать проведенных хорд.

VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Решения. Финал. Второй день. 8 класс

5. (С.Маркелов) Через вершину A равностороннего треугольника ABC проведена прямая, не пересекающая отрезок BC. По разные стороны от точки A на этой прямой взяты точки M и N так, что $AM = AN = AB$ (точка B внутри угла MAC). Докажите, что прямые AB, AC, BN, CM образуют вписанный четырехугольник.

   Решение. Так как треугольник BAN — равнобедренный, то $\angle ANB = \frac{\angle MAB}{2}$ (рис.8.5). Аналогично $\angle AMC = \frac{\angle NAC}{2}$. Значит, сумма этих углов равна $60°$, а угол между прямыми BN и CM равен $120°$, что равносильно утверждению задачи.

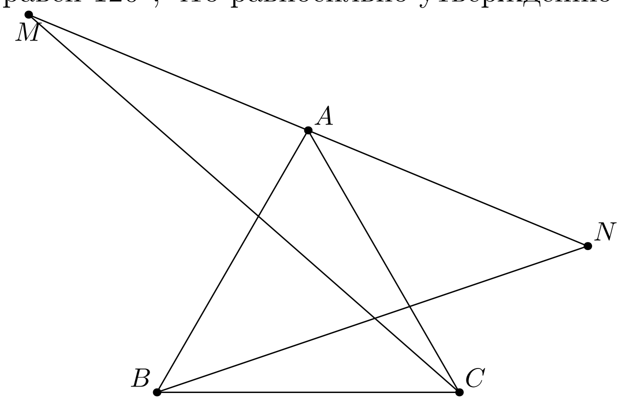


Рис.8.5

6. (Д.Прокопенко) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. A_0 - середина стороны BC. Прямые A_0B_1 и A_0C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно прямой BC, в точках P и Q. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника PA_0Q лежит на высоте треугольника ABC.

   Первое решение. Так как треугольники BCB_1 и BCC_1 — прямоугольные, то их медианы B_1A_0, C_1A_0 равны половине гипотенузы, т.е. $B_1A_0 = A_0C = A_0B = C_1A_0$. Далее, $\angle PB_1A = \angle CB_1A_0 = \angle B_1CA_0 = \angle PAC$, и, значит, $PA = PB_1$ (рис.8.6.1). Аналогично, $QA = QC_1$. Следовательно, вписанная окружность треугольника A_0PQ касается его сторон в точках A, B_1, C_1, откуда и следует утверждение задачи.

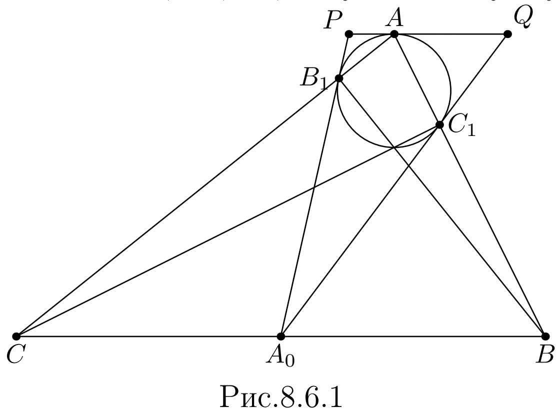


Рис.8.6.1

   Второе решение. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, O — середина AH. Тогда точки A_0, B_1, C_1, O лежат на окружности девяти точек треугольника ABC, причем A_0O — диаметр этой окружности. С другой стороны, точки

B_1, C_1 лежат на окружности с диаметром AH, которая, следовательно, и является вписанной окружностью треугольника APQ (рис.8.6.2).

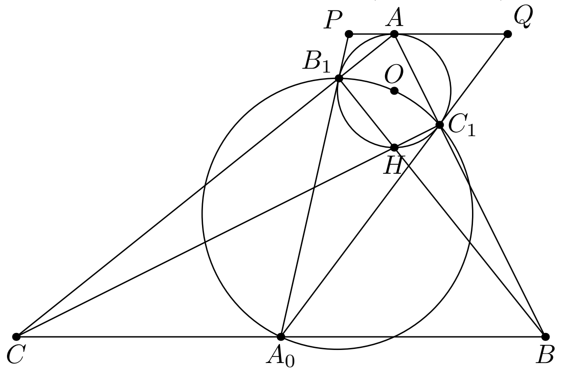


Рис.8.6.2

7. (А.Акопян) На плоскости отмечена точка M, не лежащая на осях координат. По оси ординат движется точка Q, а по оси абсцисс точка P так, что угол PMQ всегда остается прямым. Найдите геометрическое место точек, симметричных M относительно PQ.

   Решение. Из условия задачи следует, что точки P, Q, M и начало координат O лежат на окружности с диаметром PQ. Значит, точка N, симметричная M относительно PQ, тоже лежит на этой окружности и $\angle PON = \angle PMN = \angle PNM = \angle POM$ (рис.8.7). Таким образом, N лежит на прямой, симметричной OM относительно осей координат. С другой стороны, если N — произвольная точка этой прямой, а P, Q — точки пересечения осей координат с окружностью OMN, то $\angle PMN = \angle PON = \angle POM = \angle PNM$ и $\angle PMQ = \angle POQ = \angle PNQ = 90°$, поэтому точки M и N симметричны относительно PQ.

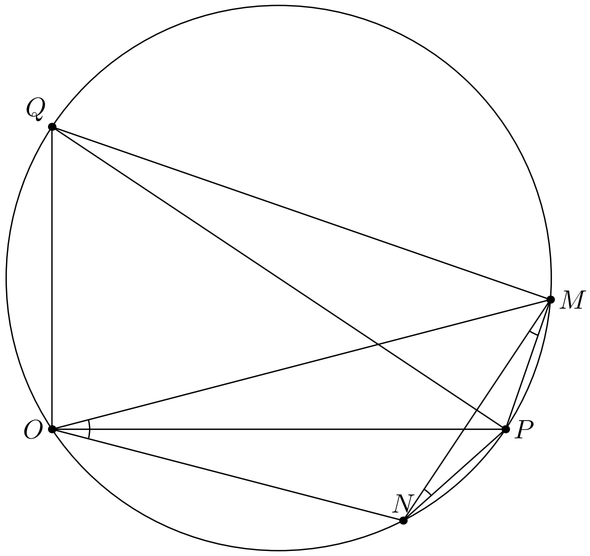


Рис.8.7

8. (А.Заславский) Пользуясь только линейкой, разделите сторону квадратного стола на n равных частей. Линии можно проводить только на поверхности стола.

   Решение. Сначала разделим сторону пополам. Проведя диагонали, найдем центр O квадрата $ABCD$. Теперь пусть X — точка на стороне BC, Y — точка пересечения XO и AD, U — точка пересечения AX и BY, V — точка пересечения прямых UC и XY

(рис.8.8.1). Тогда прямая BV делит основания трапеции $CYUX$ пополам. Соединив O с серединой CY, разделим пополам стороны AB и CD.

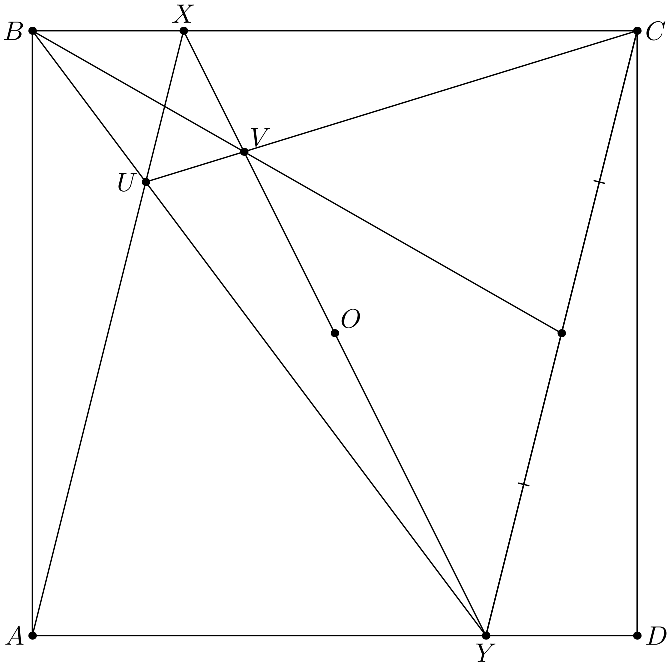


Рис.8.8.1

Покажем теперь, что, если две противоположные стороны разделены на k равных частей, то их можно разделить на $k+1$ равных частей. Пусть $AX_1 = X_1X_2 = \cdots = X_{k-1}B$, $DY_1 = Y_1Y_2 = \cdots Y_{k-1}C$. Тогда по теореме Фалеса прямые $AY_1, X_1Y_2, \ldots, X_{k-1}C$ делят диагональ BD на $k+1$ равных частей (рис.8.8.2). Аналогично разделив вторую диагональ и проведя через соответствующие точки прямые, параллельные BC, разделим на $k+1$ равных частей сторону AB.

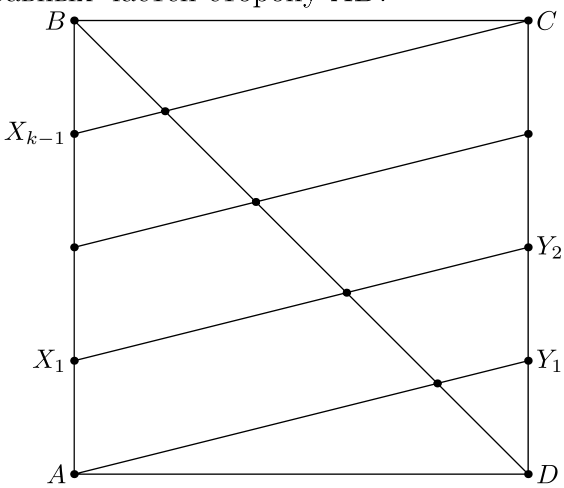


Рис.8.8.2

VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс

1. (М.Кунгожин, Казахстан) Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямая CH пересекает полуокружность с диаметром AB, проходящую через A_1, B_1 в точке D. Отрезки AD и BB_1 пересекаются в точке M, BD и AA_1 — в точке N. Докажите, что описанные окружности треугольников B_1DM и A_1DN касаются.

   Решение. Угол между касательной к окружности B_1DM в точке D и прямой AD равен углу MB_1D, который, в свою очередь, равен углу BAD (рис.9.1). Аналогично угол между касательной к окружности A_1DN и BD равен углу ABD. Поскольку $\angle BAD + \angle ABD = 90° = \angle ADB$, касательные к обеим окружностям совпадают.

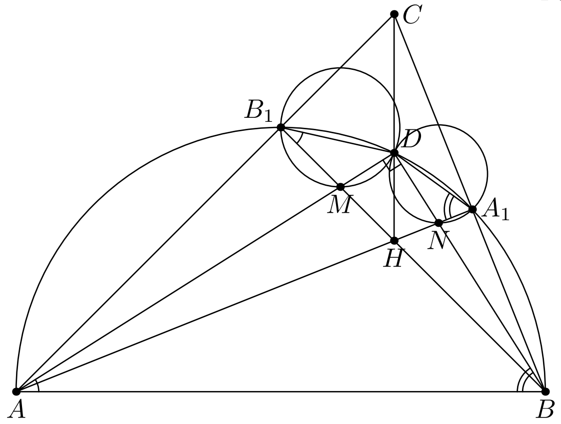


Рис.9.1

2. (Д.Кеян, Молдова) В треугольнике ABC $\angle B = 2\angle C$. Точки P и Q на серединном перпендикуляре к CB таковы, что $\angle CAP = \angle PAQ = \angle QAB = \frac{\angle A}{3}$. Докажите, что Q — центр описанной окружности треугольника CPB.

   Решение. Пусть точка D симметрична A относительно серединного перпендикуляра к BC. Тогда $ABCD$ — равнобокая трапеция, а диагональ BD — биссектриса угла B. Следовательно, $CD = DA = AB$. Далее $\angle DAP = \angle C + \angle A/3 = (\angle A + \angle B + \angle C)/3 = 60°$. Поэтому треугольник ADP — равносторонний и $AP = AB$. Поскольку AQ — биссектриса угла PAB, то $QP = QB = QC$ (рис.9.2).

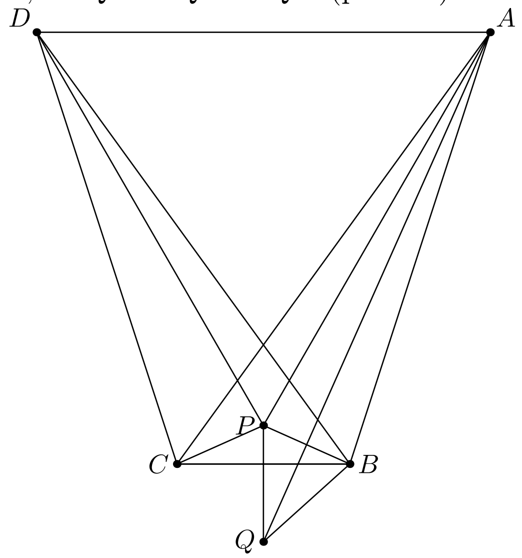


Рис.9.2

3. (А.Карлюченко, Украина) Восстановите равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) по точкам I, M, H пересечения биссектрис, медиан и высот соответственно.

   Решение. Центр O описанной окружности треугольника лежит на продолжении HM за точку M, и $MO = HM/2$. Кроме того, прямые BI, CI являются биссектрисами углов OBH, OCH ($\angle CBH = \angle ABO = \pi/2 - \angle C$). Следовательно, $BO/BH = CO/CH = IO/IH$, т.е. точки B, C лежат на окружности Аполлония точек O и H, проходящей через I. Но центр окружности BIC лежит на описанной окружности треугольника ABC. Таким образом, получаем следующее построение.

   Построим точку O и окружность Аполлония. Затем построим окружность с центром O, проходящую через центр этой окружности. Две окружности пересекутся в точках B, C, а прямая OH вторично пересечет описанную окружность в точке A.

4. (А.Заславский) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Биссектрисы его углов образуют четырехугольник, вписанный в окружность с центром I, а биссектрисы внешних углов — четырехугольник, вписанный в окружность с центром J. Докажите, что O — середина IJ.

   Решение. Пусть биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, B и C — в точке L, C и D — в точке M, D и A — в точке N (рис.9.4). Тогда прямая KM — биссектриса угла между AD и BC. Обозначив этот угол через ϕ, по теореме о внешнем угле получаем, что $\angle LKM = \angle B/2 - \phi/2 = (\pi - \angle A)/2 = \angle C/2$ и, значит, $\angle LIM = \angle C$. С другой стороны, перпендикуляры из L на BC и из M на CD образуют с ML углы, равные $(\pi - \angle C)/2$, т.е. треугольник, образованный этими перпендикулярами и ML, — равнобедренный с углом при вершине, равным углу C. Поэтому вершина этого треугольника совпадает с I. Таким образом, перпендикуляры, опущенные из вершин четырехугольника $KLMN$ на соответствующие стороны $ABCD$, проходят через I. Аналогично получаем, что перпендикуляры из вершин четырехугольника, образованного внешними биссектрисами, проходят через J.

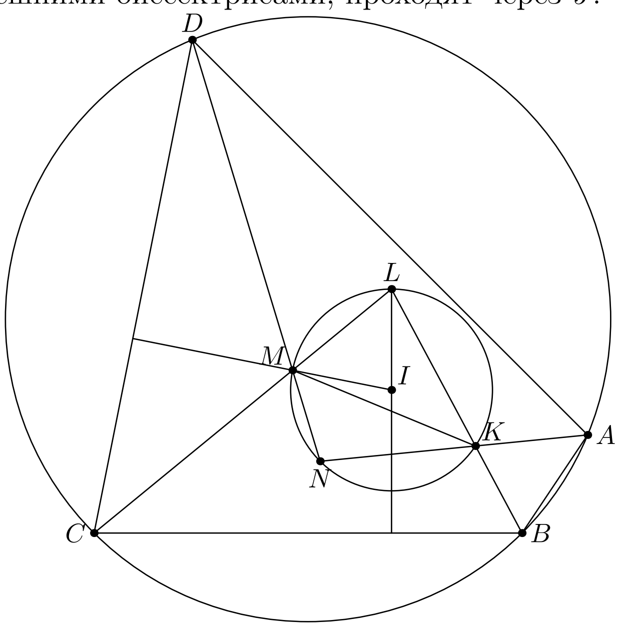


Рис.9.4

Пусть теперь K' — точка пересечения биссектрис внешних углов A и B. Так как четырехугольник $AKBK'$ вписан в окружность с диаметром KK', то проекции K и K' на AB симметричны относительно середины AB. Отсюда и из утверждения, доказанного выше, следует, что проекции I и J на каждую из сторон $ABCD$ симметричны относительно середины этой стороны, что равносильно утверждению задачи.

Примечание. Известно аналогичное утверждение для треугольника: центр описанной окружности является серединой отрезка между центром вписанной окружности и центром описанной окружности треугольника, образованного биссектрисами внешних углов.

VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс

5. (Б.Френкин) Из высот треугольника можно составить треугольник. Верно ли, что из его биссектрис также можно составить треугольник?

Решение. Нет. Возьмем треугольник, две стороны которого равны 2 и 3, и будем увеличивать угол между этими сторонами. При стремлении угла к 180° отношение высот треугольника будет стремиться к $1/2 : 1/3 : 1/5$, так что из них при любом значении угла можно будет составить треугольник. С другой стороны, наименьшая из биссектрис стремится к нулю, а две другие — к неравным величинам. Значит, при больших значениях угла треугольник из биссектрис составить нельзя.

Приведем точные оценки. Прежде всего отметим, что, если две стороны треугольника равны a и b, угол между ними — C, а биссектриса этого угла — l_c, то площадь треугольника равна $S = ab\sin C/2 = (a+b)l_c \sin\frac{C}{2}/2$, откуда $l_c = 2ab\cos\frac{C}{2}/(a+b)$. Аналогично находятся длины биссектрис l_a, l_b.

Пусть теперь $a = 2$, $b = 3$. Тогда $\cos\frac{A}{2} > \cos\frac{B}{2}$. Поэтому

$$l_a - l_b > 2c\cos\frac{A}{2}\left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{a+c}\right) = \frac{2c^2\cos\frac{A}{2}}{(c+2)(c+3)}.$$

Возьмем угол C достаточно большим, чтобы выполнялись неравенства $c > 4$, $\cos\frac{A}{2} > 0,9$, $\cos\frac{C}{2} < 0,1$. Тогда $l_a - l_b > l_c$ и треугольник из биссектрис составить нельзя. С другой стороны, для отношений высот имеем $h_b/h_a = 2/3$, $2/5 < h_c/h_a < 1/2$. Следовательно, $h_b + h_c > h_a > h_b > h_c$ и из высот можно составить треугольник.

6. (П.Долгирев) В треугольнике ABC AA_0 и BB_0 — медианы, AA_1 и BB_1 — высоты. Описанные окружности треугольников CA_0B_0 и CA_1B_1 вторично пересекаются в точке M_c. Аналогично определяются точки M_a, M_b. Докажите, что точки M_a, M_b, M_c лежат на одной прямой, а прямые AM_a, BM_b, CM_c параллельны.

Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, а H — точка пересечения его высот. Так как $\angle CA_0O = \angle CB_0O = \angle CA_1H = \angle CB_1H = 90^\circ$, то CO и CH — диаметры окружностей CA_0B_0 и CA_1B_1 соответственно. Поэтому проекция C на прямую OH лежит на обеих окружностях, т.е. совпадает с M_c (рис.9.6). Отсюда, очевидно, следует утверждение задачи.

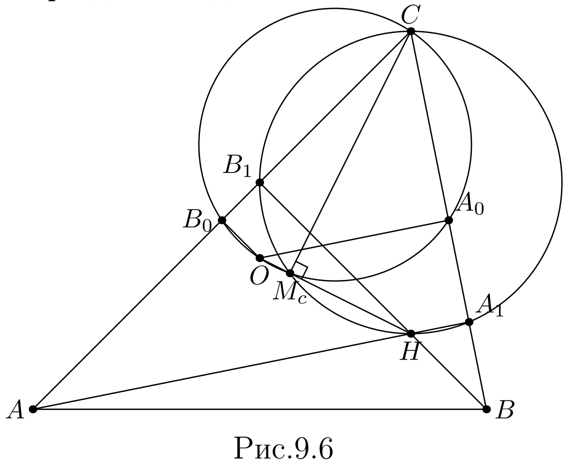


Рис.9.6

7. (И.Богданов) В угол вписаны две окружности ω и Ω. Прямая ℓ пересекает стороны угла в точках A и F, окружность ω в точках B и C, окружность Ω в точках D и E (порядок точек на прямой — A, B, C, D, E, F). Пусть $BC = DE$. Докажите, что $AB = EF$.

   Первое решение. Пусть одна сторона угла касается ω и Ω в точках X_1, Y_1, а другая — в точках X_2, Y_2; U, V — точки пересечения X_1X_2 и Y_1Y_2 с AF. Середина отрезка CD лежит на радикальной оси окружностей, т.е. средней линии трапеции $X_1Y_1Y_2X_2$, поэтому $BU = EV$ и $CU = DV$ (рис.9.7). Следовательно, $X_1U \cdot X_2U = Y_1V \cdot Y_2V$. Отсюда получаем, что $FY_2/FX_2 = Y_2V/X_2U = X_1U/Y_1V = AX_1/AY_1$, т.е. $AX_1 = FY_2$. Теперь утверждение задачи вытекает из равенств $AB \cdot AC = AX_1^2 = FY_2^2 = FE \cdot FD$.

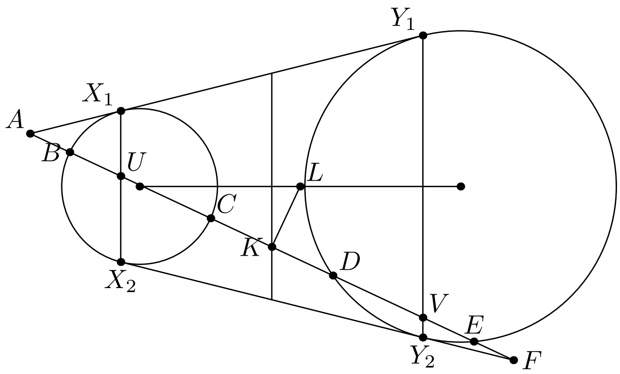


Рис.9.7

   Второе решение. Зафиксируем точку A на стороне угла и покажем, что через нее проходит ровно одна прямая, удовлетворяющая условиям задачи. Действительно, середина K отрезка CD равноудалена от проекций центров окружностей на искомую прямую и, значит, совпадает с проекцией середины L отрезка между центрами. Следовательно, K — точка пересечения окружности с диаметром AL и радикальной оси окружностей, отличная от середины отрезка X_1Y_1. С другой стороны, если взять точку F так, что $AX_1 = Y_2F$, то $AB \cdot AC = FE \cdot FD$ и $AD \cdot AE = FC \cdot FB$, откуда следует, что прямая AF — искомая.

8. (Б.Френкин) Выпуклый n-угольник P, где $n > 3$, разрезан на равные треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри него. Каковы возможные значения n, если n-угольник описанный?

   Решение. Докажем, что $n = 4$.

   Лемма. Пусть выпуклый n-угольник разрезан на равные треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри него. Тогда у каждого из треугольников разбиения хотя бы одна сторона является стороной (а не диагональю) n-угольника.

   Доказательство леммы. Пусть треугольник разбиения имеет углы $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ с вершинами A, B, C соответственно, причём AC и BC — диагонали n-угольника. К C примыкают ещё хотя бы два угла треугольников разбиения. Если хотя бы один из них больше α, то сумма углов при C не меньше $\gamma + \beta + \alpha = \pi$, но она не больше угла выпуклого многоугольника — противоречие. Значит, все углы при C, кроме $\angle ACB$, равны α, причём α строго меньше β.

   Рассмотрим второй треугольник разбиения, примыкающий к BC. Так как он равен $\triangle ABC$, то против стороны BC в нём лежит угол, равный α. Но угол при C в этом треугольнике также равен α, тогда как он должен равняться β или γ — противоречие. Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи.

Так как сумма углов многоугольника P равна $\pi(n-2)$ и они складываются из всех углов треугольников разбиения, то количество этих треугольников равно $n-2$. По лемме, в каждом из этих треугольников хотя бы одна сторона является стороной P. Отсюда вытекает, что у двух треугольников разбиения по две стороны являются сторонами P.

Пусть KLM — один из этих треугольников, причём KL и LM — стороны P. К стороне KM примыкает другой треугольник разбиения KMN. Одна из его сторон (для определённости KN) является стороной P. Так как треугольники разбиения равны, то $\angle NKM$ равен либо $\angle LKM$, либо $\angle KML$. В первом случае KM — биссектриса угла описанного многоугольника P и потому содержит центр I вписанной окружности. Во втором случае $KN \parallel LM$. Тогда I лежит на общем перпендикуляре к этим отрезкам и потому содержится (по выпуклости) в параллелограмме $KLMN$, а значит — хотя бы в одном из треугольников $KLM,\ KMN$.

Пусть $K'L'M'$ — другой треугольник разбиения, две стороны которого являются сторонами P. Аналогично предыдущему, I содержится либо в этом, либо в смежном с ним треугольнике разбиения. Если I содержится хотя бы одном из треугольников $KLM,\ K'L'M'$, то они имеют общую сторону, и тогда $n=4$. В противном случае треугольник KMN — смежный с обоими этими треугольниками и содержит I. При этом сторона MN — общая с $\triangle K'L'M'$; можно положить $M=M',\ N=K'$. Рассуждая как выше, получаем, что $LM \parallel KN \parallel L'M$. Но тогда LM и $L'M$ лежат на одной прямой, тогда как это две стороны выпуклого n-угольника — противоречие.

Из приведенного рассуждения видно, что выпуклый четырехугольник удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда он симметричен относительно одной из своих диагоналей.

VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс

1. (М.Рожкова, Украина) В треугольнике ABC середины сторон AC, BC, вершина C и точка пересечения медиан лежат на одной окружности. Докажите, что она касается окружности, проходящей через вершины A, B и ортоцентр треугольника ABC.

   Решение. Пусть C' — точка, симметричная C относительно середины AB. Тогда точки A, B, C' и ортоцентр треугольника ABC лежат на одной окружности. С другой стороны, если A_0, B_0 — середины сторон BC, AC, то треугольник A_0B_0C гомотетичен треугольнику ABC' относительно центра тяжести M треугольника ABC с коэффициентом $-1/2$. Следовательно, описанные окружности этих треугольников касаются в точке M (рис.10.1).

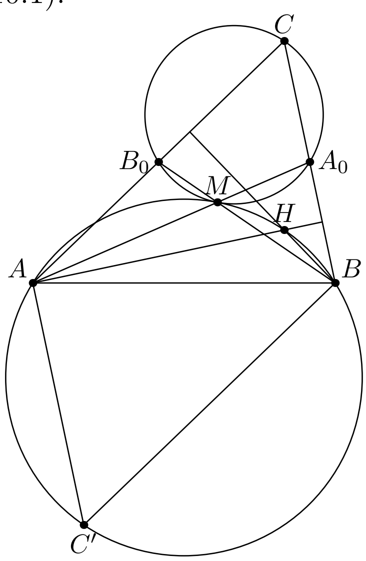


Рис.10.1

2. (Л.Емельянов) Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности, касающейся сторон AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. Точки A', B', C', D' — середины отрезков LM, MN, NK, KL. Докажите, что четырехугольник, образованный прямыми AA', BB', CC', DD', — вписанный.

   Решение. Прежде всего сформулируем следующее утверждение, вытекающее из непосредственного вычисления углов.

   Лемма. Точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда биссектрисы углов, образованных прямыми AB и CD, параллельны биссектрисам углов, образованных прямыми AD и BC.

   Действительно, рассмотрим для определенности случай, когда $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, лучи BA и DC пересекаются в точке E, DA и BC — в точке F. Тогда углы между биссектрисами углов BED и BFD равны полусуммам противоположных углов четырехугольника, откуда, очевидно, следует утверждение леммы. Другие случаи рассматриваются аналогично.

   Перейдем к решению задачи. Пусть I центр вписанной окружности, r — ее радиус. Тогда $IC' \cdot IA = r^2 = IA' \cdot IC$, т.е. точки A, C, A', C' лежат на одной окружности. Применяя лемму, получаем, что биссектрисы углов между AA' и CC' параллельны биссектрисам углов между IA и IC, а значит и углов между перпендикулярными им прямыми KN и LM. Аналогично биссектрисы углов между BB' и DD' параллельны биссектрисам углов между KL и MN. Еще раз применив лемму, получим утверждение задачи.

3. (А.Акопян) Дано два тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Рассмотрим шесть пар ребер A_iA_j и B_kB_l, где (i,j,k,l) — перестановка чисел $(1,2,3,4)$ (например, A_1A_2 и B_3B_4). Известно, что во всех парах, кроме одной, ребра перпендикулярны. Докажите, что в оставшейся паре ребра тоже перпендикулярны.

   Решение. Сначала докажем следующую лемму.

   Лемма. Ребра A_1A_2 и B_3B_4 перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикуляры из точек A_1, A_2 на плоскости $B_2B_3B_4$ и $B_1B_3B_4$ соответственно пересекаются.

   Доказательство леммы. Пусть $A_1A_2 \perp B_3B_4$. Тогда существует плоскость, проходящая через A_1A_2 и перпендикулярная B_3B_4. Перпендикуляры из условия леммы лежат в этой плоскости и, значит, пересекаются. Обратно, если перпендикуляры пересекаются, то проходящая через них плоскость перпендикулярна B_3B_4 и содержит A_1A_2.

   Пусть теперь $A_1A_2 \perp B_3B_4$, $A_1A_3 \perp B_2B_4$, $A_2A_3 \perp B_1B_4$. Тогда любые два из трех перпендикуляров, опущенных из A_1, A_2, A_3 на соответствующие грани $B_1B_2B_3B_4$, пересекаются. Так как эти перпендикуляры не лежат в одной плоскости, отсюда следует, что они проходят через одну точку. Следовательно, если выполнены условия задачи, то все четыре перпендикуляра из вершин одного тетраэдра на соответствующие грани другого проходят через одну точку, что влечет перпендикулярность шестой пары ребер.

4. (В.Мокин) На стороне AB треугольника ABC взята точка D. В угол ADC вписана окружность, касающаяся изнутри описанной окружности треугольника ACD, а в угол BDC — окружность, касающаяся изнутри описанной окружности треугольника BCD. Оказалось, что эти окружности касаются отрезка CD в одной и той же точке X. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из X на AB, проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

   Решение. Сначала докажем следующую лемму.

   Лемма. Пусть окружность касается сторон AC, BC треугольника ABC в точках U, V, а описанной около него окружности изнутри в точке T. Тогда прямая UV проходит через центр I окружности, вписанной в треугольник ABC.

   Доказательство леммы. Пусть прямые TU, TV вторично пересекают описанную окружность в точках X, Y. Так как окружности ABC и TUV гомотетичны с центром T, то X, Y — середины дуг AC, BC, т.е. прямые AY и BX пересекаются в точке I (рис.10.4.1). Поэтому утверждение леммы следует из теоремы Паскаля, примененной к шестиугольнику $AYTXBC$.

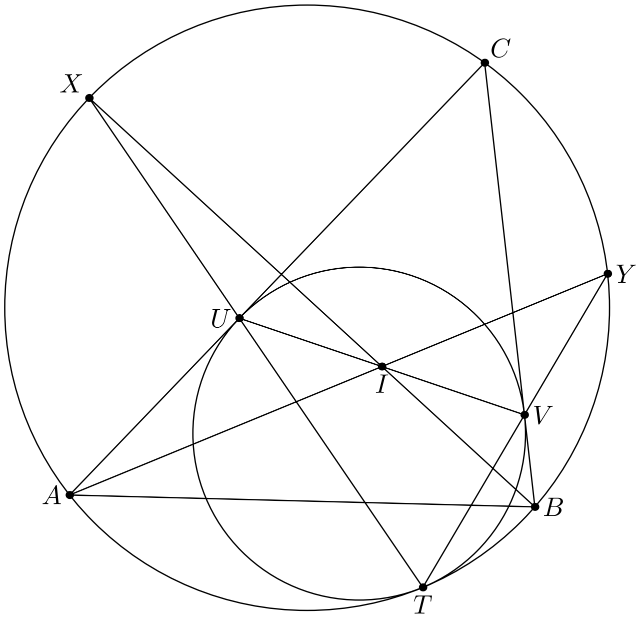


Рис.10.4.1

Из леммы следует, что в условиях задачи DI_1XI_2, где I_1, I_2 — центры вписанных окружностей треугольников ACD, BCD, — прямоугольник (рис.10.4.2.). Пусть Y, C_1, C_2 — проекции точек X, I_1, I_2 на AB. Тогда $BY - AY = BC_2 + C_2Y - AC_1 - C_1Y = (BC_2 - DC_2) - (AC_1 - DC_1) = (BC - CD) - (AC - CD) = BC - AC$. Следовательно, Y — точка касания стороны AB с вписанной окружностью.

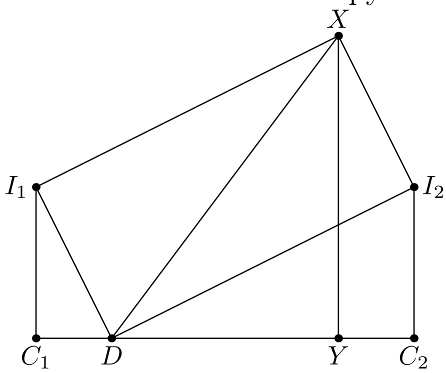


Рис.10.4.2

VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 10 класс

5. (А.Блинков) Точка касания вневписанной окружности со стороной треугольника и основание высоты, проведенной к этой стороне, симметричны относительно основания биссектрисы, проведенной к этой же стороне. Докажите, что эта сторона составляет треть периметра треугольника.

   Решение. Из условия следует, что радиус r_c вневписанной окружности, касающейся стороны AB треугольника ABC, равен высоте h_c, проведенной к этой стороне. Поскольку площадь треугольника $S = (p-c)r_c = ch_c/2$, то $c = 2(p-c) = 2p/3$.

6. (М.Рожкова, Украина) Докажите, что для любого неравнобедренного треугольника $l_1^2 > \sqrt{3}S > l_2^2$, где l_1, l_2 — наибольшая и наименьшая биссектрисы треугольника, S — его площадь.

   Решение. Пусть $a > b > c$ — стороны треугольника. Тогда l_2 — биссектриса угла A и $S = bc\sin A/2 = (b+c)l_2\sin\frac{A}{2}/2$. Поэтому правое неравенство можно переписать в виде $\sqrt{3}(b+c)\sin\frac{A}{2}/2 > 2bc\cos\frac{A}{2}/(b+c)$ или $\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{A}{2} > 4bc/(b+c)^2$. Но $\pi/6 < A/2 < \pi/2$, следовательно, левая часть больше 1, а правая меньше 1 по неравенству о средних.

   Так как $C < \pi/3$, то $\sqrt{3}S < 3ab/4$. С другой стороны, $l_1^2 = 4a^2b^2\cos^2\frac{C}{2}/(a+b)^2 = 2a^2b^2(1+\cos C)/(a+b)^2$. Поскольку $b > c$, $\cos C > a/2b$, т.е. $l_1^2 > a^2b(a+2b)/(a+b)^2$. Поэтому левое неравенство следует из того, что $a(a+2b)/(a+b)^2 = 1-b^2/(a+b)^2 > 3/4$.

7. (Г.Фельдман) В остроугольном треугольнике ABC O — центр описанной окружности, A_1, B_1, C_1 — основания высот. На прямых OA_1, OB_1, OC_1 нашли такие точки A', B', C' соответственно, что четырёхугольники $AOBC'$, $BOCA'$, $COAB'$ вписанные. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AA_1A', BB_1B', CC_1C', имеют общую точку.

   Решение. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Тогда $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot CH_1$, т.е степени H относительно окружностей AA_1A', BB_1B', CC_1C' равны, причем H лежит внутри этих окружностей. С другой стороны, $\angle BC'O = \angle BAO = \angle OBC_1$, т.е. треугольники $OC'B$ и OBC_1 подобны и $OC_1 \cdot OC' = OB_0^2$ (рис.10.7). Следовательно, степени O относительно всех трех окружностей также равны и, значит, эти окружности пересекаются в двух точках, лежащих на прямой OH.

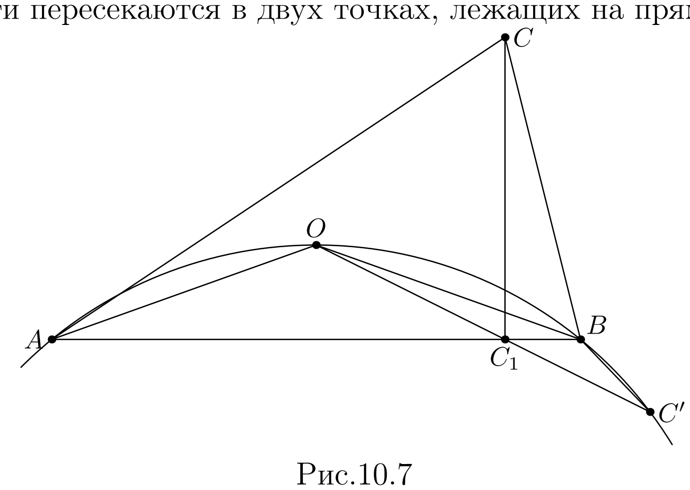


Рис.10.7

8. (С.Токарев) Есть лист жести размером 6×6. Разрешается надрезать его, но так, чтобы он не распадался на части, и сгибать. Как сделать куб с ребром 2, разделенный перегородками на единичные кубики?

Решение. Искомая развертка изображена на рис.10.8. Жирные линии обозначают разрезы, тонкие и пунктирные — сгибы вверх и вниз. Центральный квадрат 2×2 соответствует горизонтальной перегородке куба.

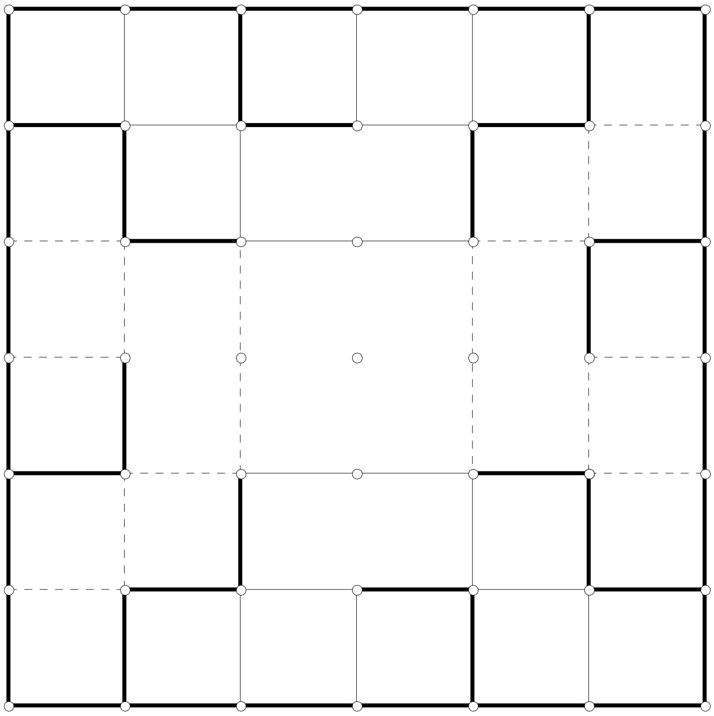


Рис.10.8.

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина. Решения.

Финал. Первый день. 8 класс

1. (А.Блинков) Точка M — середина основания AC остроугольного равнобедренного треугольника ABC. Точка N симметрична M относительно BC. Прямая, параллельная AC и проходящая через точку N, пересекает сторону AB в точке K. Найдите угол AKC.

   Ответ. $90°$.

   Решение. Пусть L — точка пересечения NK и BC. Тогда $\angle AKC = \angle ALC$. Кроме того, $AM = MC = CN = NL$. Значит, $MCNL$ — ромб, $ALNM$ — параллелограмм и $AL \parallel MN \perp LC$ (рис.8.1).

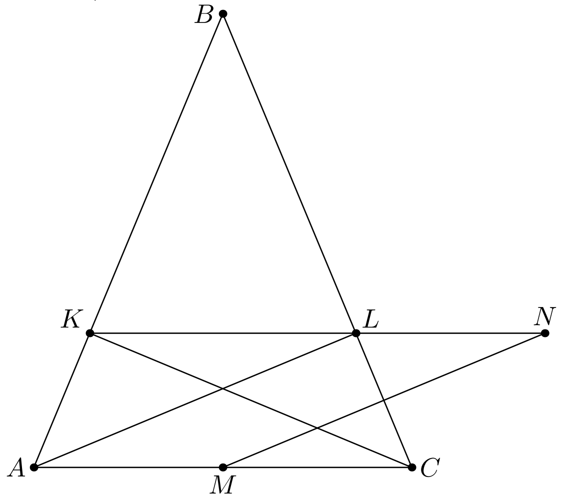


Рис.8.1

2. (А.Карлюченко) Восстановите треугольник ABC по вершине A и основаниям B' и C' биссектрис углов ABC и ACB соответственно.

   Первое решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольник. Тогда $\angle B'IC' = 90° + \frac{1}{2}\angle B'AC'$. Поэтому мы можем построить точку I как пересечение соответствующей дуги с биссектрисой угла $B'AC'$. Теперь точки B, C строятся как пересечение $B'I$ с AC' и $C'I$ с AB' соответственно.

   Второе решение. Так как BB' — биссектриса угла B, точка B' равноудалена от прямых BC и AB. Поэтому окружность с центром B', касающаяся AC', касается также BC. Аналогично BC касается окружности с центром C', касающейся AB'. Следовательно, для восстановления треугольника достаточно провести общую внешнюю касательную к этим двум окружностям и найти точки ее пересечения с AB' и AC'.

3. (Л.Штейнгарц, Израиль) Бумажный квадратный лист согнули по прямой так, что одна из вершин квадрата оказалась на несмежной стороне. При этом образовалось три треугольника. В эти треугольники вписали окружности. Докажите, что радиус одной из этих окружностей равен сумме радиусов двух других.

   Решение. Пусть квадрат $ABCD$ перегнули по прямой XY, X лежит на CD, Y — на AB, U — точка на AD, в которую перешла C, V — точка, в которую перешла B, P — точка пересечения UV и AB. Так как треугольники UDX, UAP и

PVY — прямоугольные, диаметры вписанных в них окружностей равны соответственно $UD + DX - XU$, $UA + AP - UP$, $PV + VY - PY$.

Опустим перпендикуляр YK на CD. Так как $XY \perp CU$, $\angle DCU = \angle KYX$. Кроме того, $KY = BC = CD$. Следовательно, треугольники CDU и YKX равны, т.е. $DU = XK = XC - CK = XU - YB = XU - YV$. Поэтому $UD + DX - XU + PV + VY - PY + UP - UA - AP = DX + UV - UA - AP - PY = DX + DU - AY = 0$ (рис.8.3).

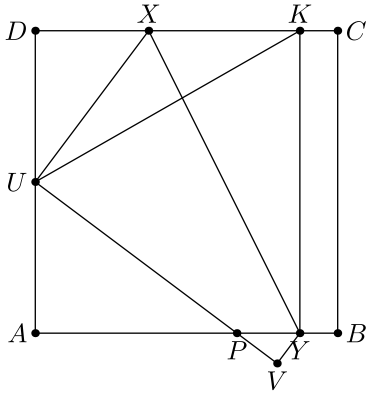


Рис.8.3

4. (А. Акопян, Д.Швецов) Дан равнобедренный треугольник ABC с углом при вершине B, равным $120°$. На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяли точки P и Q соответственно так, что угол между AQ и CP прямой. Докажите, что $\angle PQB = 2\angle PCQ$.

   Решение. Пусть серединный перпендикуляр к AQ пересекает AB в точке K, L — точка на BC такая, что $KL \parallel AC$, P' — точка на прямой AB такая, что $LP' = LC$, а прямые QP' и AC не параллельны. Так как в треугольниках BKQ и BLP' $BK = BL$, $KQ = LP'$, $\angle QBK = \angle P'BL$, но $P'B \neq QB$, $\angle BQK + \angle BP'L = 180°$. Следовательно, $\angle P'LB + \angle QKB = 60°$ и $\angle QAB + \angle P'CB = 30°$, т.е. P' совпадает с P (рис.8.4).

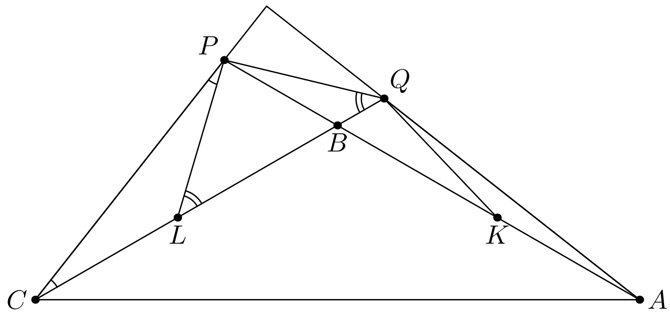


Рис.8.4

Заметим теперь, что, если треугольники BKQ и BLP приложить друг к другу равными сторонами QK и LP, то они образуют равносторонний треугольник. Следовательно, $BP + BQ = BL$. Поэтому, если T — точка на BL такая, что $BT = BP$, то треугольник BPT — равносторонний, а треугольник PTL равен треугольнику PBQ. Значит, $PQ = PL = LC$ и $\angle PQB = \angle PLB = 2\angle PCQ$.

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 8 класс

5. (А.Акопян) Существует ли выпуклый четырехугольник и точка P внутри него такие, что сумма расстояний от P до вершин больше периметра четырехугольника?

   Ответ. Да.

   Решение. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AD = BD = CD = x$, $AB = BC = y < x/4$, P — точка на диагонали BD, $PD = y$. Тогда $PA = PC > AD - PD = x - y$, следовательно, $PA + PB + PC + PD > 3x - 2y > 2x + 2y = AB + BC + CD + DA$.

6. (А.Туманян, Украина) На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку B взяли точку B_1 такую, что $AB_1 = AC$. Биссектриса угла A пересекает описанную около треугольника окружность в точке W. Докажите, что ортоцентр треугольника AWB_1 лежит на описанной окружности треугольника ABC.

   Решение. Пусть H — вторая точка пересечения описанной окружности с прямой CB_1. Так как AW — биссектриса равнобедренного треугольника AB_1C, $B_1H \perp AW$. Кроме того, $\angle AWH = \angle ACH = 90° - \angle CAW = 90° - \angle WAB$, т.е. $WH \perp AB_1$. Следовательно, H — ортоцентр треугольника AWB_1 (рис.8.6).

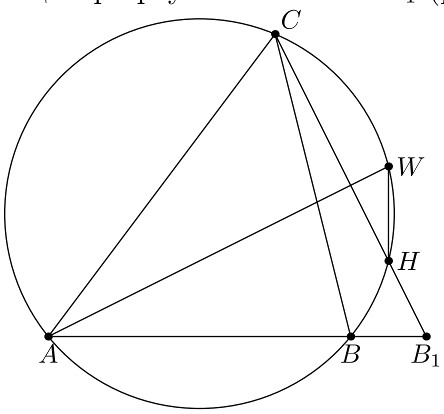


Рис.8.6

7. (Д.Швецов) Высоты AA_1, CC_1 пересекаются в точке H. Точка Q симметрична середине стороны AC относительно AA_1; точка P — середина A_1C_1. Докажите, что $\angle QPH = 90°$.

   Первое решение. Пусть K — середина AC. Так как $KQ \parallel BC$, то KQ делит высоту AA_1 пополам и AKA_1Q — ромб. Аналогично, если R — точка, симметричная K относительно CC_1, то CKC_1R — ромб, а значит, QA_1RC_1 — параллелограмм, т.е. P — середина RQ. Кроме того, $HR = HK = HQ$. Следовательно, HP — высота равнобедренного треугольника HQR (рис 8.7).

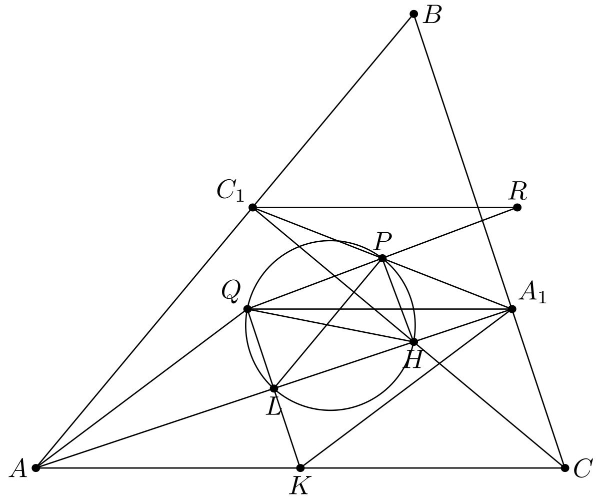


Рис.8.7

Второе решение. Пусть L — середина AA_1. Тогда KL — средняя линия треугольника AA_1C_1, $\angle PLH = \angle BAA_1$ и $\angle PLQ = \angle C_1HA$. С другой стороны, $\angle A_1C_1H = \angle HAC$, потому что точки A_1, C_1 лежат на окружности с диаметром AC. Следовательно, при симметрии относительно биссектрисы угла C_1HA точки A_1, C_1 попадут на прямые HC, HA, а прямая A_1C_1 перейдет в параллельную AC. Значит по теореме Фалеса точка P попадет на прямую HK. Таким образом, прямые HQ и HP симметричны HK относительно HA и биссектрисы угла C_1HA соответственно, т.е. $\angle PHQ = \angle C_1HA$. Следовательно, точки P, Q, L, H лежат на одной окружности и $\angle QPH = \angle QLH = 90°$.

8. (А.Заславский) Квадрат разрезан на несколько (больше одного) выпуклых многоугольников с попарно различным числом сторон. Докажите, что среди них есть треугольник.

   Решение. Пусть квадрат разрезан на n многоугольников. Тогда у каждый из этих многоугольников имеет не более одной стороны на каждой из сторон квадрата, а с любым другим многоугольником граничит не более, чем по одной стороне. Следовательно, всего он имеет не более $n+3$ сторон. Значит, если среди многоугольников нет треугольника, то они должны иметь $4, 5, \ldots, n+3$ сторон. Но тогда $n+3$-угольник должен примыкать ко всем сторонам квадрата. Поэтому каждый из остальных многоугольников может примыкать не более, чем к двум сторонам квадрата и, следовательно, иметь не более $n+1$ стороны — противоречие.

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс

1. (Л.Штейнгарц, Израиль) В треугольнике ABC провели высоты AA_1 и BB_1, которые пересекаются в точке O. Затем провели высоту A_1A_2 в треугольнике OBA_1 и высоту B_1B_2 в треугольнике OAB_1. Докажите, что отрезок A_2B_2 параллелен стороне AB.

   Решение. Так как треугольники OA_1B и OB_1A подобны, их высоты A_1A_2 и B_1B_2 делят отрезки OB и OA в одном и том же отношении. Отсюда по теореме Фалеса получаем утверждение задачи.

2. (Д.Швецов, А.Заславский) Через вершины треугольника ABC проведены три параллельные прямые, пересекающие описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1. Точки A_2, B_2, C_2 симметричны A_1, B_1, C_1 относительно сторон BC, CA, AB. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

   Решение. Проведем через A_1, B_1, C_1 прямые, параллельные соответственно BC, CA, AB. Из условия следует, что они пересекутся в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника ABC. Действительно, если, например, прямая, проходящая через C_1, пересекает окружность в точке P, то $\smile BP = \smile C_1A = \smile A_1C$, т.е. $A_1P \parallel BC$. Точки A_2, B_2, C_2 симметричны этой точке относительно середин сторон ABC. Следовательно, треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ центрально симметричны и прямые, соединяющие их соответствующие вершины, проходят через центр симметрии (рис.9.2).

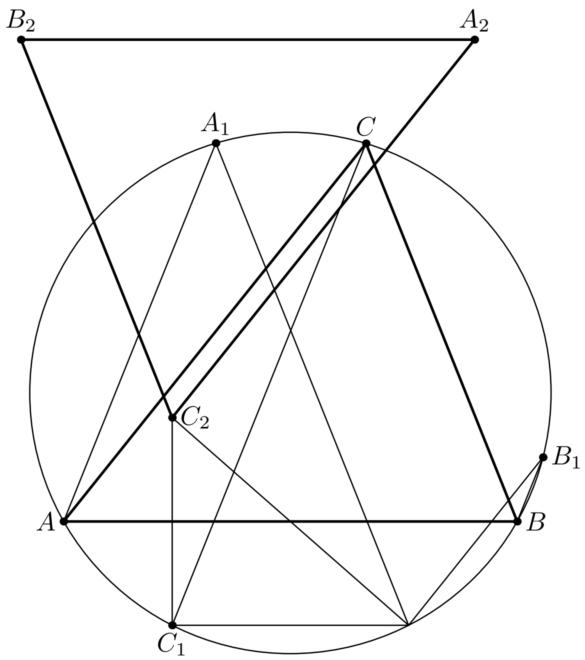


Рис.9.2

3. (В.Протасов) В треугольнике ABC провели биссектрису CL. В треугольники CAL и CBL вписали окружности, которые касаются прямой AB в точках M и N соответственно. Затем все, кроме точек A, L, M и N, стерли. С помощью циркуля и линейки восстановите треугольник.

   Решение. Докажем равенство $1/AM + 1/ML = 1/LN + 1/NB$. Пусть $x = AC$, $y = CL$, $z = LA$ — длины сторон треугольника ACL, p, S r — его полупериметр, площадь и радиус вписанной окружности, h — высота из вершины C. Тогда

$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{ML}=\frac{1}{p-y}+\frac{1}{p-x}=\frac{z}{(p-x)(p-y)}=\frac{zp(p-z)}{S^2}=\frac{2(p-z)}{rh}=\frac{1}{2h\operatorname{tg}\frac{\angle ACL}{2}}.$$

Так как в треугольнике BCL угол при вершине C и высота из этой вершины такие же, искомое равенство доказано.

Таким образом, зная отрезки AM, ML, LN, мы можем найти отрезок NB и построить точку B. Теперь из соотношений $AC-CL=AM-LM$, $BC-CL=BN-LN$ мы находим разность сторон AC, BC, а из соотношения $AC/BC=AL/BL$ их отношение. Поэтому мы можем найти эти стороны и построить треугольник.

4. (Б.Френкин) При каких $n>3$ правильный n-угольник можно разрезать диагоналями (возможно, пересекающимися внутри него) на равные треугольники?

   Ответ. При четных.

   Решение. Если $n=2k$, то k диагоналей, проходящих через центр многоугольника, разрезают его на n равных треугольников.

   Пусть n нечетно. Если проведенные диагонали не пересекаются внутри многоугольника, то они разрезают многоугольник на $n-2$ треугольника, причем центр лежит внутри одного из этих треугольников. Тогда треугольник, содержащий центр, остроугольный, а остальные тупоугольные. Следовательно, равенство треугольников невозможно.

   Так как n нечетно, никакие две диагонали не перпендикулярны. Поэтому через любую точку пересечения двух диагоналей должна проходить, по крайней мере, еще одна диагональ (в противном случае образованные диагоналями углы являются двумя разными углами одного треугольника, что невозможно). Докажем теперь, что из каждой вершины многоугольника выходит не меньше двух диагоналей.

   Предположим, что из вершины A_i не выходит ни одной диагонали. Тогда треугольником, содержащим эту вершину, будет $A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Сторона $A_{i+1}A_{i+2}$ должна принадлежать такому же треугольнику, и им может быть только треугольник $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$. Продолжая это рассуждение, получим противоречие с нечетностью n.

   Предположим, что из вершины A_i выходит одна диагональ. тогда она делит угол при этой вершине на два неравных угла. Так оба эти угла примыкают к стороне треугольника, равной стороне многоугольника, то из вершины A_{i+1} тоже должна выходить одна диагональ и т.д. Но при нечетном числе вершин это невозможно.

   Пусть теперь n-угольник разрезан на k треугольников. Сумма углов всех треугольников равна $k\pi$. Из этой суммы $(n-2)\pi$ составляют углы многоугольника, значит, сумма углов во внутренних вершинах равна $(k-n+2)\pi$, а число этих вершин равно $(k-n+2)/2$. Поскольку каждая внутренняя вершина принадлежит, по крайней мере, шести треугольникам, а каждая вершина многоугольника — трем, то общее число треугольников не меньше, чем $(3(k-n+2)+3n)/3>k$ — противоречие.

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс

5. (М.Кунгожин) Пусть ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник. На продолжении гипотенузы AB за точку A взята точка D такая, что $AB = 2AD$. Точки M и N на стороне AC таковы,что $AM = NC$. На стороне CB за точку B взята точка K такая, что $CN = BK$. Найдите угол между прямыми NK и DM.

   Ответ. $45°$.

   Решение. Пусть L — проекция M на AB. Так как $ML/CN = AL/BK = AD/BC = 1/\sqrt{2}$, треугольники MLD и NCK подобны и $\angle MDL = \angle NKC$. Значит. искомый угол равен углу между KC и DL, т.е. $45°$ (рис.9.5).

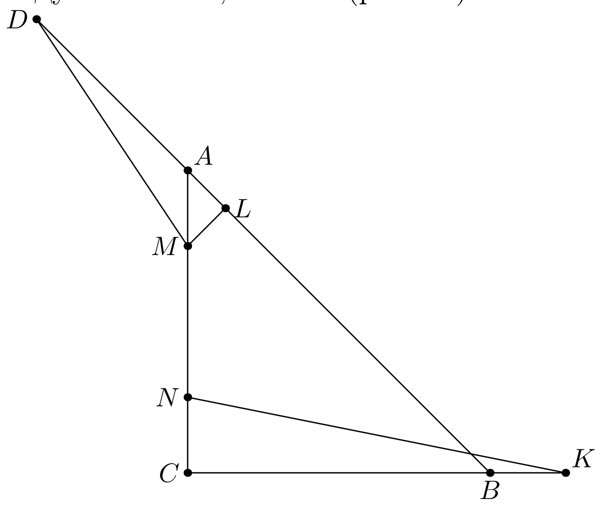


Рис.9.5

6. (М.Рожкова) Задан равнобедренный треугольник ABC, $BC = a$, $AB = AC = b$. На стороне AC во внешнюю сторону построен $\triangle ADC$, $AD = DC = a$; CM — биссектриса $\triangle ABC$, CN — биссектриса $\triangle ADC$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CMN.

   Ответ. $\frac{ab}{a+b}$.

   Решение. Пусть K — точка на AC такая, что $MK \parallel BC$. Так как $\angle MCA = \angle MCB = \angle CMK$, получаем, что $MK = KC$. Кроме того, $CK/AK = BM/AM = a/b = DN/AN$. Следовательно, $KN \parallel CD$ и $KN = KC$. Таким образом, K — центр описанной окружности треугольника CMN, а ее радиус по теореме о биссектрисе равен $KC = ab/(a + b)$ (рис.9.6).

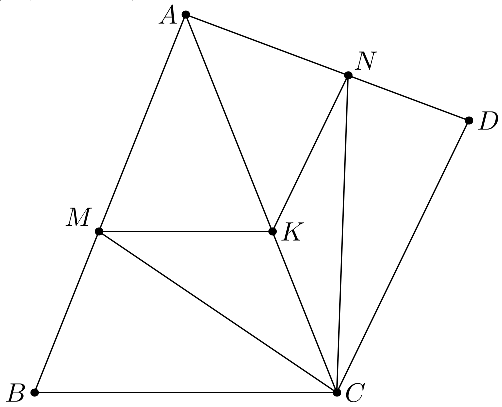


Рис.9.6

7. (А.Белов) В выпуклом пятиугольнике провели все диагонали, в результате чего он оказался разбитым на 10 треугольников и 1 пятиугольник. Из суммы площадей треугольников, прилегающих к сторонам исходного пятиугольника, вычли площадь внутреннего, получилось число N. Совершив те же операции с внутренним пятиугольником, получили число K. Докажите, что $N > K$.

   Решение. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5$ — исходный пятиугольник, $B_1B_2B_3B_4B_5$ — пятиугольник, образованный его диагоналями (B_1 — точка пересечения A_2A_4 с A_3A_5 и т.д.), $C_1C_2C_3C_4C_5$ — пятиугольник, образованный диагоналями $B_1B_2B_3B_4B_5$. Тогда разность $N - K$ содержит сумму пяти треугольников вида $A_iA_{i+1}B_{i+3}$, сумму пяти треугольников вида $B_iB_{i+1}C_{i+3}$ с коэффициентом, равным -2, и сумму пяти треугольников вида $B_iC_{i+2}C_{i+3}$ с коэффициентом, равным -1. То же самое выражение получится, если из суммы площадей треугольников вида $A_iA_{i+1}B_{i+3}$ вычесть суммы площадей треугольников вида $B_iB_{i+1}B_{i+2}$. Поэтому для доказательства искомого неравенства достаточно доказать пять неравенств вида $S_{A_iA_{i+1}B_{i+3}} > S_{B_{i+2}B_{i+3}B_{i+4}}$.

   Присоединив к каждому из треугольников $A_1A_2B_4$ и $B_3B_4B_5$ треугольник $A_1B_3B_4$, получим треугольники $A_1B_3A_2$ и $A_1B_3B_5$ с общим основанием A_1B_3. При этом расстояние от точки B_5 до этого основания меньше, чем от точки A_2 (рис.9.7). Аналогично доказываются остальные неравенства.

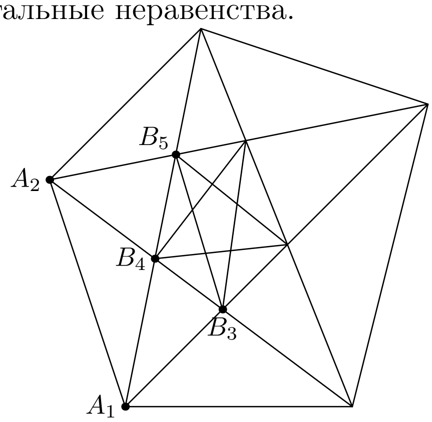


Рис.9.7

8. (М.Плотников, Украина) В остроугольном треугольнике ABC точки K и L — проекции основания H высоты из точки A на другие стороны треугольника. Прямая KL пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q, а высота, опущенная на сторону BC, повторно пересекает эту окружность в точке T. Докажите, что H является центром вписанной окружности треугольника PQT.

   Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника. Так как $AK = AH\sin B$, $AL = AH\sin C$, треугольники ALK и ABC подобны, т.е. $\angle ALK = \angle B$. Поскольку $\angle OAC = \pi/2 - \angle B$, то $OA \perp KL$. Значит, $AP = AQ$ и TA — биссектриса угла PTQ. Теперь по теореме о трилистнике утверждение задачи равносильно тому, что A — центр описанной окружности треугольника HPQ.

   Пусть D — проекция A на KL. По теореме Пифагора $AQ^2 - R^2 = AD^2 - (R - AD)^2$, где R — радиус описанной окружности. Так как коэффициент подобия треугольников AKL и ABC равен $AH/2R$, имеем $AD = AH^2/2R$ и $AQ^2 = AH^2$ (рис.9.8).

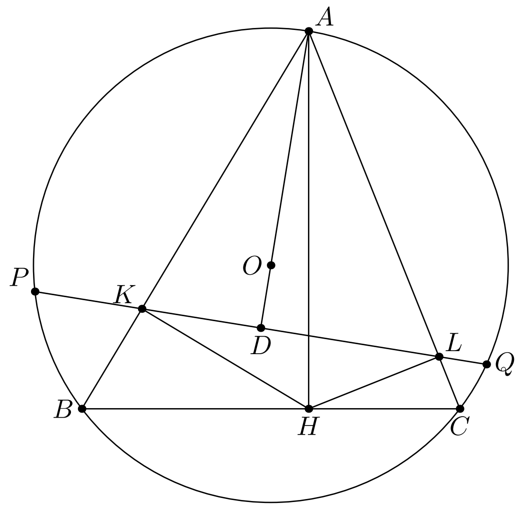


Рис.9.8

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс

1. (А.Шаповалов) При каких n можно оклеить куб $n \times n \times n$ доминошками 1×2 так, чтобы каждая доминошка граничила ровно с пятью другими?

   Ответ. При четных.

   Решение. Если n четно, разобьем каждую грань куба на квадраты 2×2 и заклеим каждый квадрат двумя доминошками так, чтобы к длинным сторонам доминошек, лежащих в одном квадрате, примыкали короткие стороны доминошек, лежащих в соседних квадратах. На рис.10.1 показано расположение доминошек вблизи вершины куба.

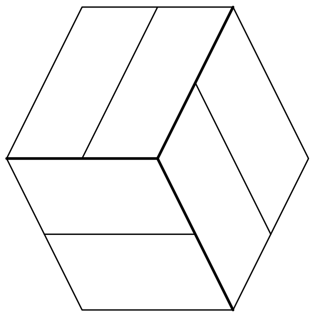
   

   Рис.10.1

   При нечетных n общее число доминошек нечетно. Поскольку число доминошек, имеющих нечетное число соседей, всегда четно, требуемая оклейка невозможна.

2. (А.Заславский, Б.Френкин) Точку внутри треугольника назовем хорошей, если проходящие через нее чевианы обратно пропорциональны соответствующим сторонам. Для каких треугольников число хороших точек максимально?

   Ответ. Для остроугольных.

   Решение. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, а P — хорошая точка. Так как проходящие через P чевианы пропорциональны соответствующим высотам, они образуют с высотами равные углы. При этом возможны два случая.

   Ориентированные углы PAH, PBH, PCH равны. Тогда P лежит на окружностях ABH, BCH, CAH и, значит, совпадает с H.

   Два из трех углов равны, а третий (например, PCH) им противоположен. Тогда, как и в первом случае P лежит на окружности ABH. Пусть прямые CP и CH вторично пересекают эту окружность в точках X и Y. Тогда, так как $\angle PCH = \angle PBH$, то $\smile XY = 2 \smile CP$, $\angle XPY = 2\angle PCY$ и $\angle PCY = \angle PYC$. Но, так как P не лежит на серединном перпендикуляре AB к отрезку CY, это возможно только при $P = H$.

   Таким образом хорошей точкой может быть только ортоцентр треугольника. Следовательно, в остроугольном треугольнике хорошая точка одна, а в неостроугольном — ни одной.

   Примечание. Во втором случае есть более короткое, но не элементарное решение. Геометрическим местом точек P, удовлетворяющих равенству $\angle BB'A = \angle CC'B$, является описанная около треугольника ABC равносторонняя гипербола. Четвертой точкой ее пересечения с другой гиперболой будет ортоцентр H.

3. (А.Карлюченко) Пусть M и I — точки пересечения медиан и биссектрис неравнобедренного треугольника ABC, а r — радиус вписанной в него окружности. Докажите, что $MI = r/3$ тогда и только тогда, когда прямая MI перпендикулярна одной и сторон треугольника.

Первое решение. Напомним, что три прямые, соединяющие вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с соответствующими вневписанными окружностями, пересекаются в одной точке N (точка Нагеля). Эта точка лежит на луче IM, и $IN = 3IM$.

Перейдем к решению задачи. Пусть $MI = r/3$. Тогда точка N лежит на вписанной окружности. Пусть касательная к окружности в этой точке пересекает стороны AC, BC. Проведем прямую CN. Она пересечет сторону AB в точке C_1 ее касания с вневписанной окружностью. Так как вписанная и вневписанная окружности гомотетичны относительно C, получаем, что касательная в N параллельна AB, т.е. $AB \perp IM$ (рис.10.3).

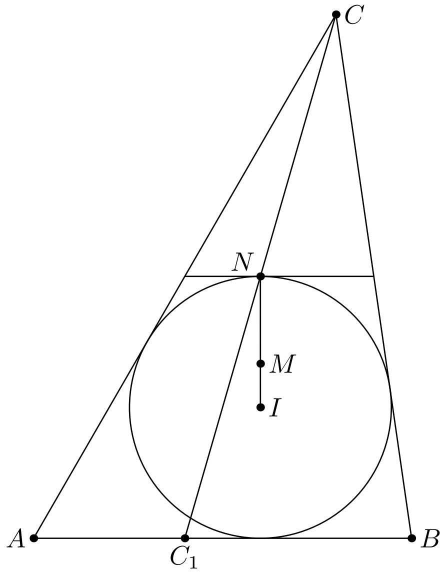


Рис.10.3

Обратно, пусть $AB \perp IM$. Рассмотрим точку E вписанной окружности, диаметрально противоположную точке ее касания с AB. Прямая CE проходит через C_1, а значит, и через N. С другой стороны, E лежит на прямой IM, также проходящей через N. Так как треугольник неравнобедренный, эти прямые различны, т.е. E совпадает с N и $r = IE = 3IM$.

Второе решение. Пусть $AB \perp IM$. Тогда по теореме Пифагора $AM^2 - BM^2 = (p-a)^2 - (p-b)^2$. Отсюда, используя формулу медианы, получаем $a + b = 3c$ или $p = 2c$. Так $S_{ABM} = S_{ABC}/3 = pr/3 = c(IM + r)/2$, получаем требуемое равенство.

Пусть теперь $MI = r/3$. Воспользовавшись формулами $IA^2 + IB^2 + IC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3IM^2$, $IA^2 = r^2 + (p-a)^2$ и $r^2 = S^2/p^2 = (p-a)(p-b)(p-c)/p$, приведем данное равенство к виду $(p-2a)(p-2b)(p-2c) = 0$. Как показано выше, каждая из скобок обращается в нуль тогда и только тогда, когда IM перпендикулярно соответствующей стороне.

4. (Б.Френкин) Дан квадрат. Найдите геометрическое место середин гипотенуз прямоугольных треугольников, вершины которых лежат на попарно различных сторонах

квадрата и не совпадают с его вершинами.

Ответ. Все точки криволинейного восьмиугольника, ограниченного дугами восьми парабол (рис.10.4), кроме середин сторон квадрата.

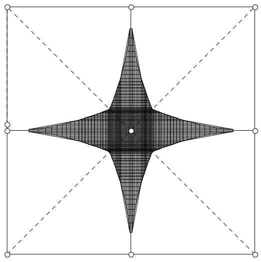


Рис.10.4

Решение. Если концы гипотенузы лежат на противоположных сторонах квадрата, то ее середина лежит на соответствующей средней линии. При этом очевидно, что любая точка средней линии, кроме концов, может быть получена таким способом.

Пусть концы X, Y гипотенузы принадлежат сторонам AB, AD квадрата $ABCD$, а вершина Z прямого угла — стороне BC. Так как точки A, Z лежат на окружности с диаметром XY, расстояние от центра этой окружности до A меньше, чем до других вершин квадрата, но больше, чем до прямой BC. Геометрическим местом точек, равноудаленных от A и BC, является парабола с фокусом A и вершиной в середине AB. Значит, центр окружности лежит между BC и этой параболой в четверти квадрата, содержащей A. Рассмотрев аналогично другие случаи расположения вершин треугольника и объединив полученные области, получим криволинейный восьмиугольник, ограниченный дугами восьми парабол. Вершинами этого восьмиугольника являются середины сторон квадрата и точки пересечения парабол с его диагоналями. Так как средние линии квадрата содержатся в восьмиугольнике, он и является искомым ГМТ.

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 10 класс

5. (Ф.Нилов) В окружность ω вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого перпендикулярны. На сторонах AB и CD во внешнюю сторону как на диаметрах построены дуги α и β. Докажите, что у луночек, образованных окружностью ω и дугами α и β, одинаковая ширина (т.е. максимальные радиусы окружностей, вписанных в эти луночки, равны).

   Решение. Очевидно, что ширина луночки — это расстояние между серединами образующих ее дуг, а прямая, соединяющая эти середины проходит через центры содержащих эти дуги окружностей. Заметим теперь, что в силу перпендикулярности диагоналей четырехугольника $ABCD$ сумма дуг AB и CD описанной около него окружности равна π, значит, в эту окружность можно вписать прямоугольный треугольник с катетами, равными AB и CD, т.е. расстояние от центра окружности до середины AB равно $CD/2$. Поэтому ширина обеих луночек равна $(AB+CD)/2-R$, где R — радиус окружности $ABCD$.

6. (В.Ясинский) Дан тетраэдр $ABCD$. Внутри трехгранного угла с вершиной D и ребрами DA, DB, DC, вне тетраэдра, произвольно выбрали точку X. Обозначим через A', B', C' основания перпендикуляров, опущенных из точки D на плоскости XBC, XCA, XAB соответственно. Докажите, что $P_{A'B'C'} \le DA+DB+DC$, где $P_{A'B'C'}$ — периметр треугольника $A'B'C'$.

   Решение. Так как $DA' \perp XBC$, $DA' \perp XC$. Аналогично $DB' \perp XC$. Поэтому XC перпендикулярно плоскости $DA'B'$. Пусть K — точка пересечения этой плоскости с XC. Тогда $\angle DB'K = \angle DA'K = \pi/2$, т.е. точки A', B' лежат на окружности с диаметром DK. Следовательно, $A'B' \le DK \le DC$. Из этого и двух аналогичных неравенств следует утверждение задачи.

7. (Ф.Ивлев) Дан треугольник ABC. Касательная в точке C к его описанной окружности пересекает AB в точке D. Докажите, что касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются на медиане треугольника BCD, проведенной из вершины D.

   Решение. Точка K пересечения касательных лежит на симедиане треугольника ACD, т.е. $\sin\angle KDA/\sin\angle KDC = AD/CD$. Но по теореме о касательной $AD/CD = CD/BD$, следовательно DK — медиана.

8. (Д.Швецов) На стороне BC квадрата $ABCD$ выбрали точку M. Пусть X, Y, Z — инцентры треугольников ABM, CMD, AMD соответственно; H_x, H_y, H_z — ортоцентры треугольников AXB, CYD, AZD. Докажите, что точки H_x, H_y, H_z лежат на одной прямой.

   Решение. Пусть P, Q — точки на отрезках AM, DM такие, что $AP = DQ = AD$. Так как $BP \perp AX$, ортоцентром треугольника ABX будет точка пересечения прямых BP и AC. Аналогично ортоцентром треугольника CDY будет точка пересечения CQ и BD. Наконец, ортоцентром треугольника AZD будет точка пересечения прямых DP и AQ. По теореме Дезарга утверждение задачи равносильно перспективности треугольников BPQ и CAD. Но прямые BC, PA и QD пересекаются в точке M (рис.10.8).

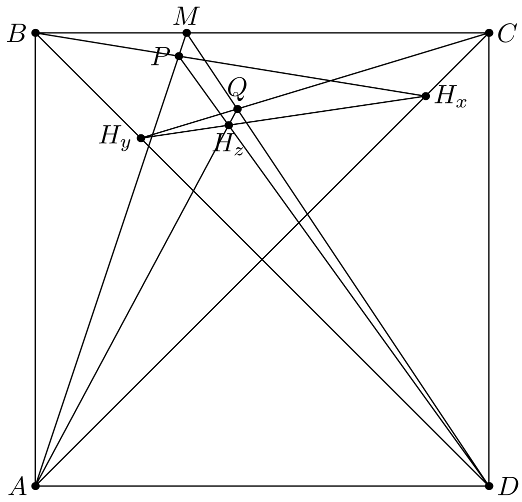


Рис.10.8