Двадцать первая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (8) (Д.Швецов) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC; D — произвольная точка отрезка AC; A_1, A_2 – точки пересечения перпендикуляра, опущенного из точки D на биссектрису CI, с прямыми BC и AI соответственно. Аналогично определяются точки C_1, C_2. Докажите, что шесть точек B, A_1, A_2, I, C_1, C_2 лежат на одной окружности.

   Решение. Рассмотрим конфигурацию, изображенную на рис. 1, для других рассуждения аналогичны. Так как $DC_2 \perp AI$, $\angle C_1C_2I = \angle DC_2I = \angle AIC - 90^\circ = \angle ABI = \angle C_1BI$, т.е. точки B, I, C_1, C_2 лежат на одной окружности. Аналогично B, I, A_1, A_2 лежат на одной окружности. Кроме того, точки C_1 и A_1 симметричны D относительно AI, CI соответственно, поэтому $\angle BC_1I = \angle IDC = \angle IA_1C$, следовательно, точки B, I, A_1, C_1 лежат на одной окружности. Таким образом, все шесть точек лежат на одной окружности.

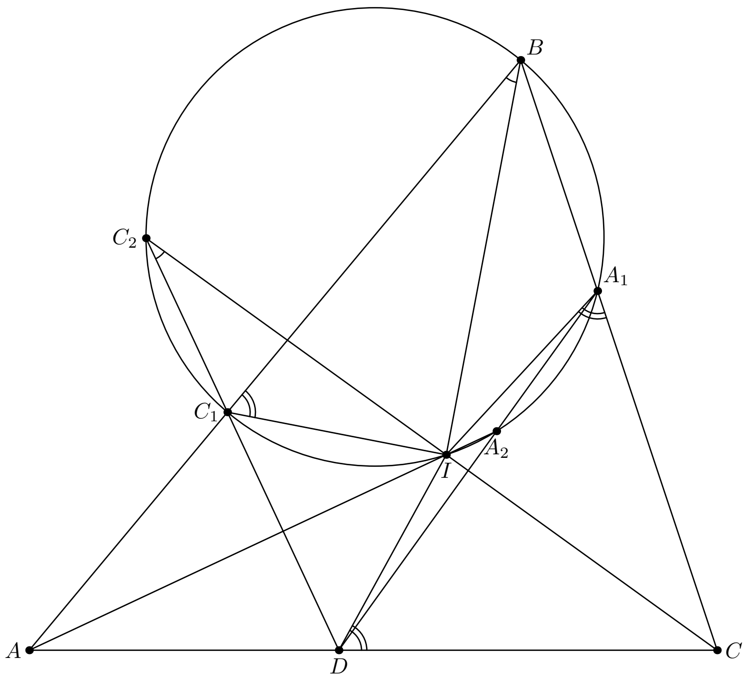

Рис. 1.

2. (8) (А. Кузнецов) На плоскости даны 4 точки, не лежащие на одной окружности и такие, что никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Докажите, что найдется точка Z такая, что для любой из данных точек точка, симметричная ей относительно Z, лежит на окружности, проходящей через оставшиеся данные точки.

   Решение. Пусть A, B, C, D — данные точки; K, L, M, N, P, Q — середины отрезков AB, BC, CA, BD, CD, AD. Чтобы точка, симметричная D относительно Z, лежала на окружности ABC, необходимо и достаточно чтобы Z лежала на окружности NPQ. Поэтому утверждение задачи равносильно тому, что окружности NPQ,

KMQ, KLN и LMP имели общую точку. Обозначим через Z вторую точку пересечения окружностей KLN и NPQ (рис.2). Тогда $\angle LZN = \angle LKN = \angle CAD$ (последнее равенство следует из того, что $KL \parallel AC$ и $KN \parallel AD$ как средние линии треугольников ABC, ABD соответственно). Аналогично $\angle NZP = \angle BAC$ и, значит, $\angle LZP = \angle BAC = \angle LMP$. Следовательно, Z лежит на окружности LMP. Аналогично получаем, что Z лежит на окружности KMQ.

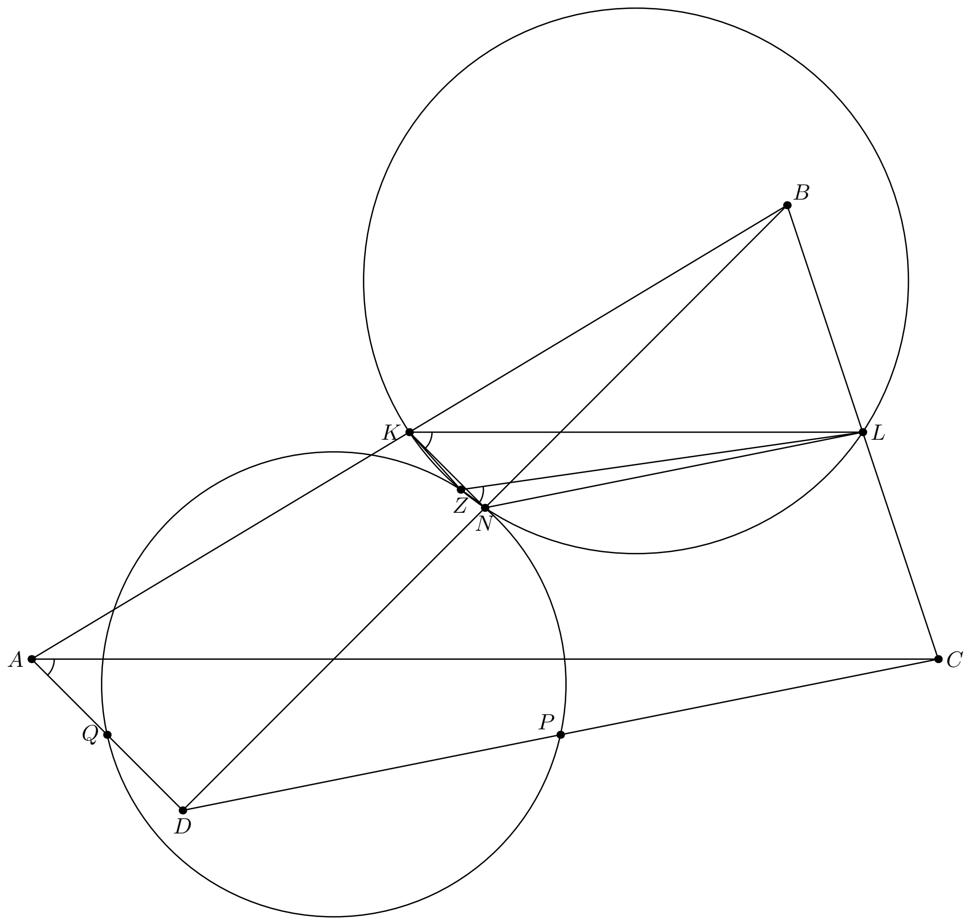

Рис. 2.

Примечание. Задачу также можно решить, воспользовавшись тем фактом, что окружности девяти точек треугольников ABC, BCD, CDA, DAB имеют общую точку. Точка Z симметрична этой точке относительно центра тяжести точек A, B, C, D.

3. (8) (К.Бельский) Вневписанная окружность с центром I_A касается стороны BC треугольника ABC в точке D. Докажите, что педальные окружности D относительно треугольников ABI_A и ACI_A равны.

Решение. Пусть P_1, P_2, Q_1, Q_2, R — проекции точки D на AC, AB, I_AC, I_AB, AI_A соответственно. Так как P_1, P_2, R лежат на окружности с диаметром AD и AR — биссектриса угла P_1AP_2, то $P_1R = P_2R$. Кроме того, из вписанных четырехугольников CP_1DQ_1 и I_AQ_1DR получаем, что $\angle P_1Q_1R = \angle P_1Q_1D + \angle DQ_1R =$

$\angle P_1CD + \angle DI_AR = (\angle B + \angle C)/2$ (рис. 3). Аналогично $\angle P_2Q_2R = (\angle B + \angle C)/2$. Поскольку в окружностях P_1Q_1R и P_2Q_2R на равные хорды опираются равные углы, эти окружности равны.

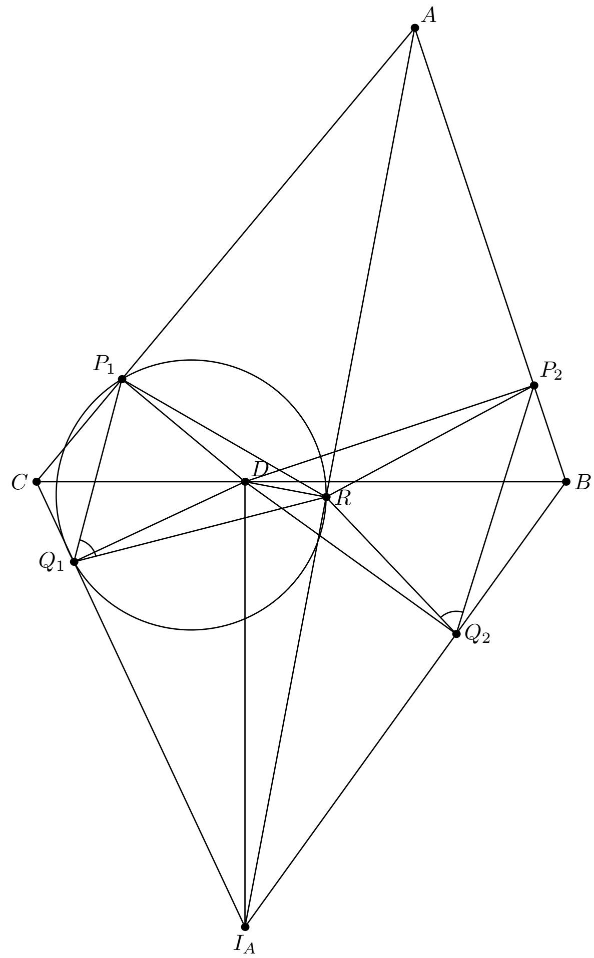

Рис. 3.

Примечание. Можно также доказать, что окружности P_1Q_1R и P_2Q_2R касаются в точке R.

4. (8) (Я.Щербатов) Пусть AL — биссектриса треугольника ABC; X — произвольная точка на внешней биссектрисе угла A; прямые BX, CX пересекают серединный перпендикуляр к AL в точках P, Q соответственно. Докажите, что точки A, X, P, Q лежат на одной окружности.

   Первое решение. Пусть PQ пересекает AB в точке Y. Тогда в равнобедренном треугольнике AYL $\angle ALY = \angle LAY = \angle LAC$, следовательно, $LY \parallel AC$ и $XP : PB = AY : YB = YL : YB = AC : AB = CL : LB$. Поэтому $LP \parallel CX$. Аналогично $LQ \parallel BX$, т.е. $LPXQ$ — параллелограмм (рис. 4). Значит, $AQ = QL = XP$, т.е. трапеция $AXPQ$ — равнобокая и вписанная.

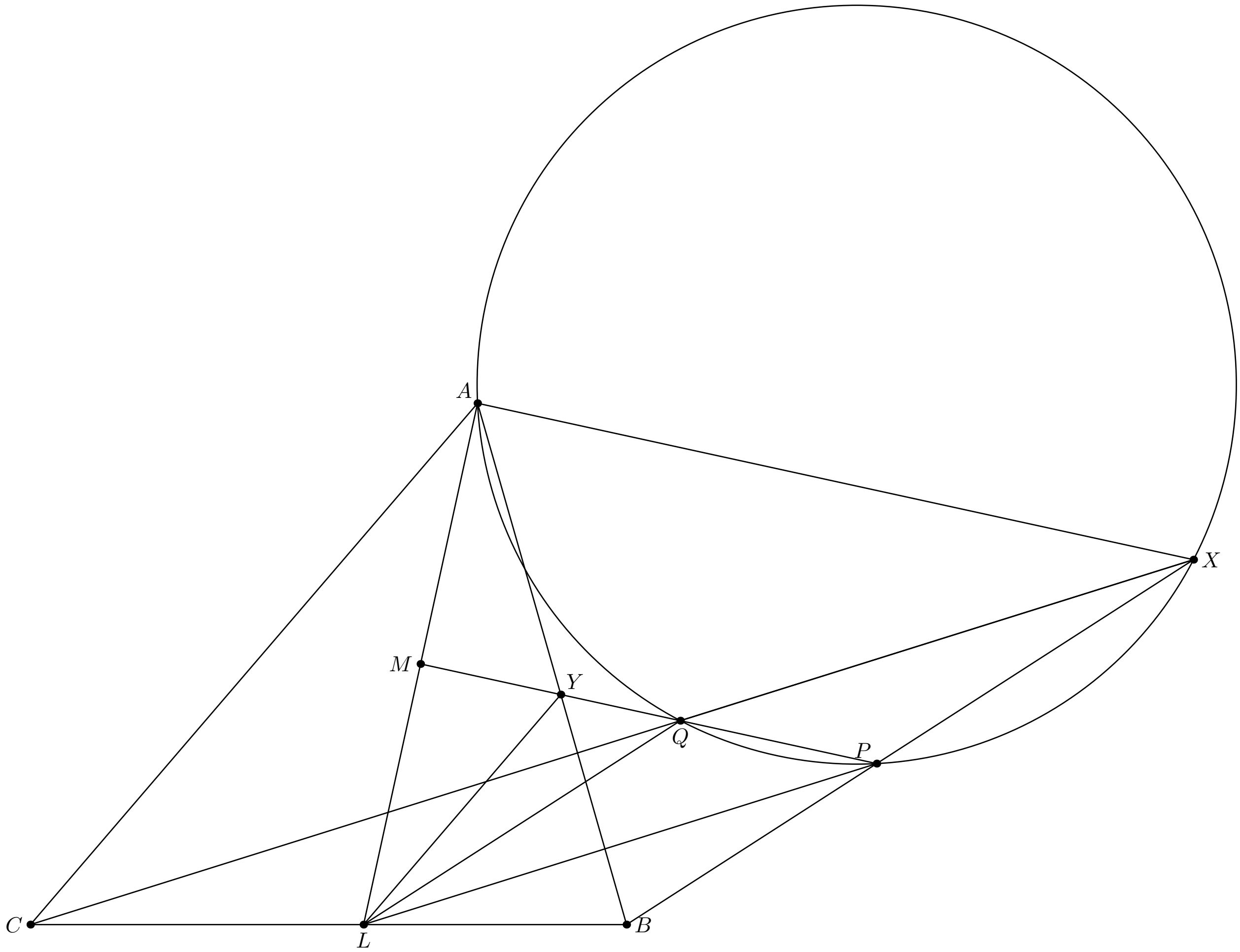

Рис. 4.

Второе решение. Пусть M — середина AL; перпендикуляр ℓ из L к AL пересекает BX и CX в точках U и V соответственно. Если X равномерно движется по биссектрисе, то точки U, V также равномерно движутся по ℓ. При этом, когда X совпадает с A или основанием внешней биссектрисы, точка L является серединой отрезка UV. Значит это выполнено и для любой точки X. Тогда, так как средние линии трапеций $AXUL$ и $AXLV$ лежат на прямой PQ, то $MP = (AX + LU)/2$, $MQ = (AX - LY)/2$. Поэтому $MP + MQ = AX$, откуда опять получаем, что трапеция $AXPQ$ — равнобокая.

Третье решение. Обозначим через D и E точки пересечения PQ со сторонами AB и AC соответственно. Тогда $ADLE$ — ромб и $DL \parallel AC$. Из $BP : BX = BD : BA = BL : BC$ получим $PL \parallel XC$, $\angle LPQ = \angle QXA$, $\angle APQ = \angle LPM = \angle AXQ$, т.е. точки A, X, P, Q на одной окружности.

5. (8) (Д.Швецов) Точка M — середина катета AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$). Перпендикуляр, опущенный из точки M на биссектрису угла ABC, пересекает гипотенузу AB в точке N. Докажите, что окружность, описанная вокруг треугольника ANM, касается биссектрисы угла ABC.

Решение. Пусть P — проекция M на биссектрису угла B, а O — центр окружности AMN. Так как точки P и C лежат на окружности с диаметром BM, $\angle NMA =$

$\angle PBC = \angle ABP$. Тогда $\angle AON = \angle ABC$ и $\angle MAO = 90^\circ - \angle ABC/2 - \angle BAC = \angle NMA$, т.е. $AO \perp BP$. Касательная к окружности в точке Q, противоположной A, образует с AB угол равный $90^\circ - \angle QAN = \angle QBA$ и, следовательно, совпадает с BP (рис. 5).

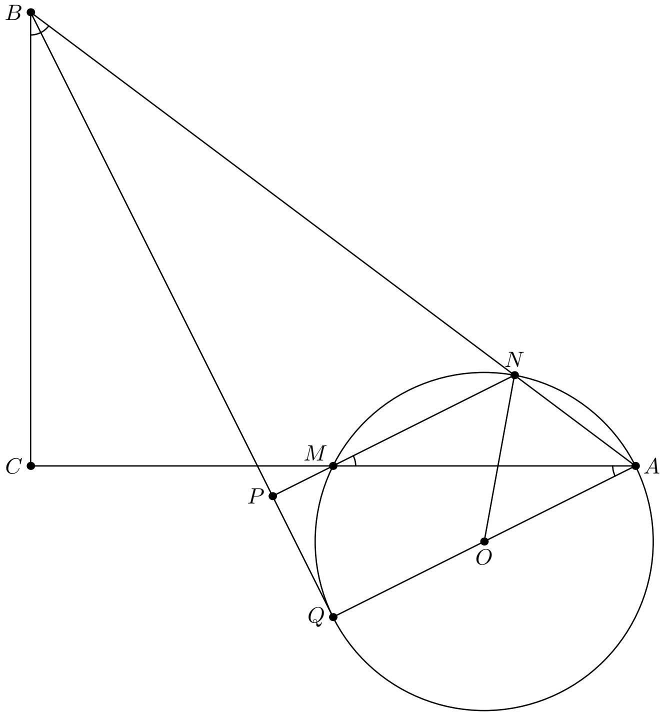

Рис. 5.

6. (8–9) (Л.Емельянов) Докажите, что если у треугольника одна из сторон его треугольника Нагеля параллельна одной из биссектрис, то ещё одна из сторон треугольника Нагеля параллельна другой биссектрисе.

Первое решение. Пусть стороны BC, CA, AB треугольника ABC касаются соответствующих вневписанных окружностей в точках A', B', C' и прямая $C'A'$ параллельна биссектрисе AA_1 угла A. Так как $BC' = p - a$, $BA' = p - c$, $BA_1 = ac/(b+c)$, это равносильно равенству $a : (b+c) = (p-c) : (p-a)$, которое приводится к виду $(p-a)(p-b) = p(p-c)$. Такое же равенство получим, если $B'C'$ параллельно биссектрисе угла B.

Второе решение. Пусть α, β, γ — половины углов A, B, C треугольника, I, I' и I'' — центр вписанной окружности и центры A- и B- вневписанных окружностей, $C'A' \parallel CII'$. Известно, что $I'C' \perp AB$, $I'C \perp CI$, поэтому $CA' = AC' = r_a \operatorname{tg} \angle CI'A' = r_a \operatorname{tg} \gamma$. Расстояние от точки A' до AI равно $AC' \sin\gamma$. Поскольку $\angle BI'A' = \beta$, $\angle BI'A = 180^\circ \breve{}\alpha\breve{}(90^\circ + \beta) = \gamma$, то $\angle AI'A' = \gamma - \beta$. Расстояние от точки C' до AI' равно $I'C' \sin\angle AI'C' = r_a \sin(\gamma - \beta) = AC' \sin\alpha = r_a \operatorname{tg}\gamma\cos(\gamma + \beta)$. Поэтому $sin(\gamma-\beta)\cos\gamma = \cos(\gamma+\beta)\sin\gamma$. Значит, $\sin^2\gamma\sin\beta = \cos^2\gamma\sin\beta$ и $\gamma = 45^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B'CI'' = \angle CI''B' = 45^\circ$, отсюда $BA' = AB' = B'I''$, $\angle BI''B' = 45^\circ - \angle CI''B = \beta$. Следовательно, $A'BI''B'$ — это равнобедренная трапеция и $C'B' \parallel BI$.

Примечание. Условие задачи выполнено для любого прямоугольного треугольника (рис. 6).

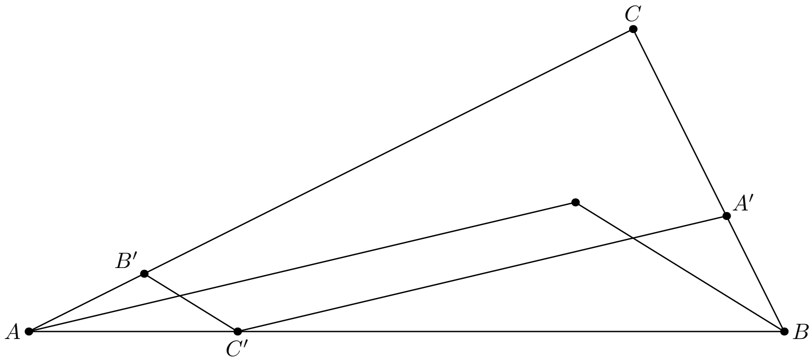

Рис. 6.

7. (8–9) (Я.Щербатов) Точки I, I_a являются центром вписанной и A-вневписанной окружности треугольника ABC; вписанная окружность касается сторон AC, AB в точках E, F; G — точка пересечения BE и CF. Перпендикуляр к BC, проходящий через точку G, пересекает AI в точке J. Докажите, что E, F, J, I_a лежат на одной окружности.

   Решение. Пусть J' — точка пересечения AI с окружностью I_aEF, сторона BC пересекает прямые I_aF, I_aE в точках X, Y и касается вписанной окружности в точке D. Заметим, что треугольники $J'EF$ и IXY ортологичны, т.к. I_a один из центров ортологии. Также $-1 = (A, BC \cap AI, I, I_a) = (A, B, XI \cap AB, F)$, следовательно, XI проходит через точку пересечения ED и AB. Но тогда $IX \perp CF$ (рис. 7). Аналогично $IY \perp BE$. Тогда $J'G \perp XY$, что равносильно искомому утверждению.

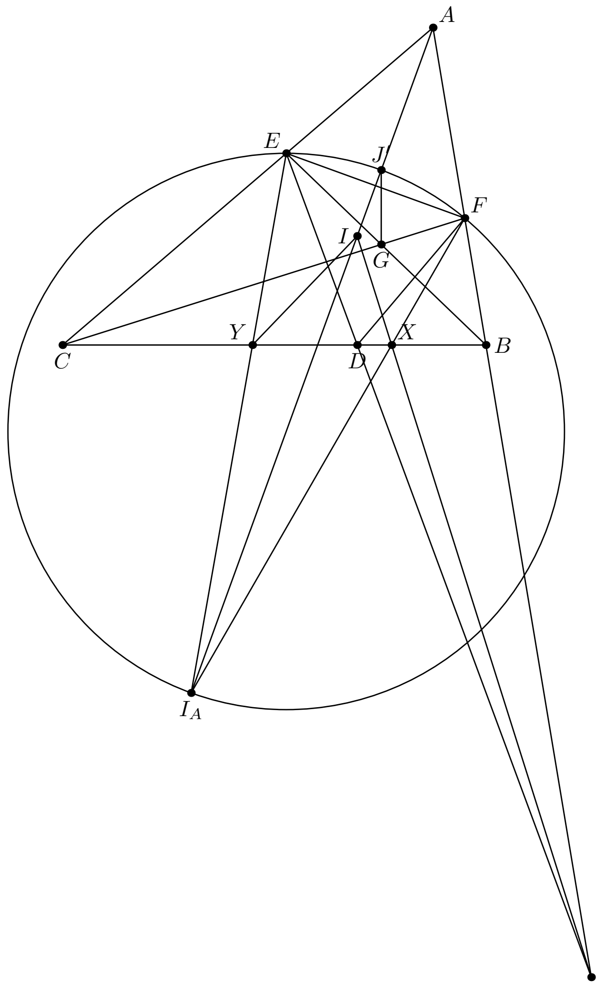

Рис. 7.

8. (8–9) (В.Конышев) Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ с точкой пересечения диагоналей P на отрезках AC, BD отмечены точки K и L соответственно. При этом $CK = AP$ и $DL = BP$. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения окружностей ALC и BKD, содержит центр масс четырехугольника $ABCD$.

   Решение. Пусть M, N — середины AC и BD соответственно, Q — вторая точка пересечения AC с окружностью BKD (рис. 8). Тогда степени точки M относительно окружностей ALC и BKD равны соответственно $AC^2/4$ и $MK \cdot MQ$. При этом $MK = MP = PK/2 = (PA - PC)/2$, $MQ = PB \cdot PD/PK = PA \cdot PC/(PA - PC)$. Отсюда получаем, что разность степеней равна $AP \cdot PC/4$. Аналогично получаем, что разность степеней точки N относительно этих окружностей равна $-PB \cdot PD/4 = -PA \cdot PC/4$. Поскольку разность степеней — линейная функция, середина отрезка MN лежит на радикальной оси окружностей.

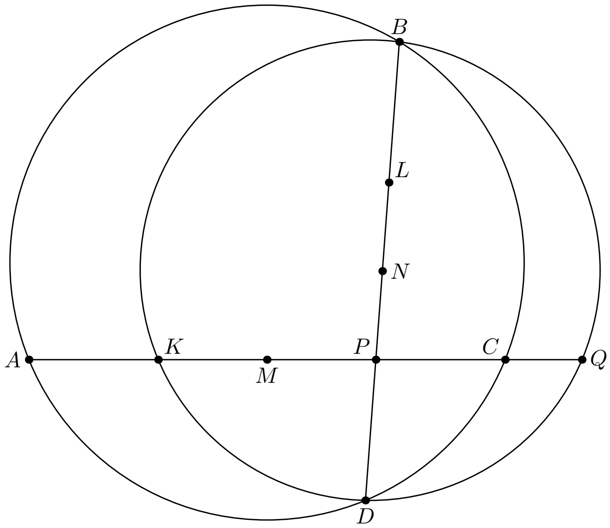

Рис. 8.

9. (8–9) (А.Марданов, К.Марданова) Прямая ℓ, проходящая через ортоцентр H треугольника ABC ($BC > AB$) и параллельная AC, пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Прямая, проходящая через центр описанной окружности этого треугольника и параллельная его медиане BM, пересекает прямую ℓ в точке F. Докажите, что длина отрезка HF втрое больше разности отрезков FE и DH.

   Решение. Пусть BM пересекает DE в точке N (рис. 9). Тогда $NF = HN/2$ и $DH + HN = NE = NF + EF$. Следовательно, $EF - DH = NH/2 = HF/3$.

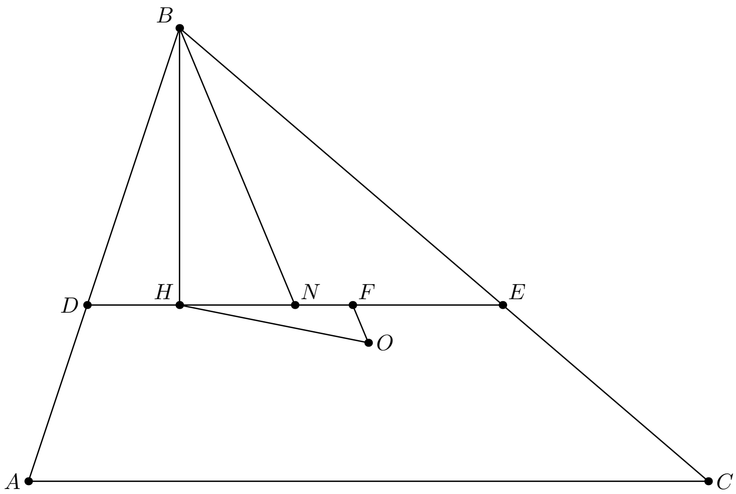

Рис. 9.

10. (8–9) (М.Евдокимов) Из бумаги вырезан остроугольный треугольник, одна из сторон которого равна опущенной на нее высоте. Постройте внутри треугольника точку, квадрат расстояния от которой до одной из вершин треугольника равен сумме квадратов расстояний до двух других. Никаких инструментов нет, можно только сгибать бумагу и отмечать точки пересечения линий сгиба.

Решение. Пусть высота CH треугольника ABC равна стороне AB, $AC > BC$. Тогда для любой точки X, лежащей на высоте из вершины A, $XC^2 - XB^2 = AC^2 - AB^2 = AH^2$. Следовательно, достаточно построить на этой высоте точку, для которой $AX = AH$.

Перегнем треугольник по прямым, проходящим через A и C, перпендикулярным BC и AB соответственно, отметим точку H. Затем перегнем так, чтобы сторона AB совместилась с высотой из A и отметим точку X, с которой совместилась H (рис. 10).

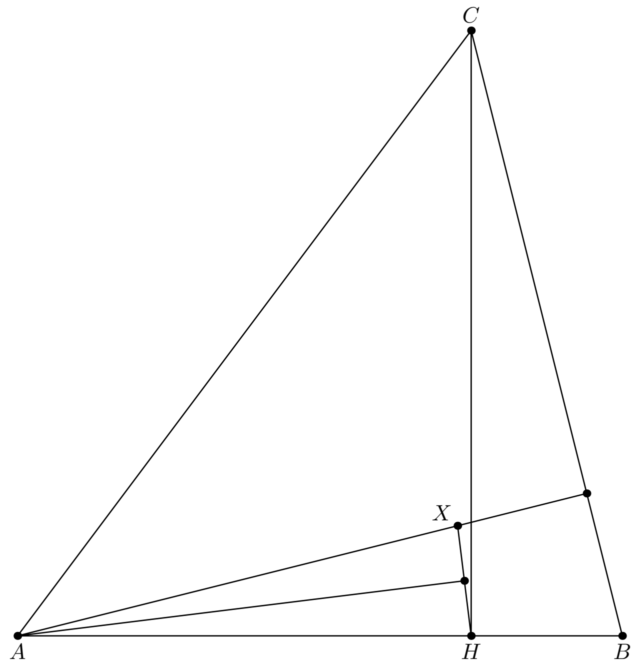

Рис. 10.

11. (8–10) (Ф.Нилов) Через точку X проведены три луча, образующие друг с другом углы, равные $120°$. Окружность w радиуса R выбирается произвольным образом так, чтобы точка X лежала внутри неё. Пусть A, B, C — точки пересечения лучей с окружностью. Найдите $\max(XA + XB + XC)$.

    Решение. Из условия следует, что X — точка Торричелли треугольника ABC. Следовательно, $XA + XB + XC \leq OA + OB + OC = 3R$, где O — центр окружности. Равенство достигается, когда O совпадает с X.

12. (8–10) (Л.Шатунов) Даны окружности ω_1 и ω_2. Пусть M — середина отрезка, соединяющего их центры. На ω_1 выбрана точка X, а на ω_2 — точка Y так, что $MX = MY$. Найдите геометрическое место середин отрезков XY.

    Ответ. Один или два отрезка, перпендикулярных линии центров окружностей.

    Решение. Пусть O_1, O_2 — центры данных окружностей, r_1, r_2 — их радиусы, $O_1O_2 = 2d$. Проведя высоту XH треугольника XMO_1, получаем, что $MH^2 - O_1H^2 = (MH + HO_1)(MH - HO_1) = XM^2 - r_1^2$. Поскольку один из множителей равен d, другой равен $(XM^2 - r_1^2)/d$ и $MH = (XM^2 + d^2 - r_1^2)/2d$. Аналогично расстояние от M до проекции точки Y на O_1O_2 равно $(XM^2 + d^2 - r_2^2)/2d$, следовательно, проекция середины XY на O_1O_2 не зависит от XM. Если окружности ω_1 и ω_2 не пересекаются, то искомое ГМТ состоит из двух отрезков, симметричных относительно O_1O_2, концы которых соответствуют максимальному и минимальному значениям XM (рис. 12). В противном случае получаем один отрезок.

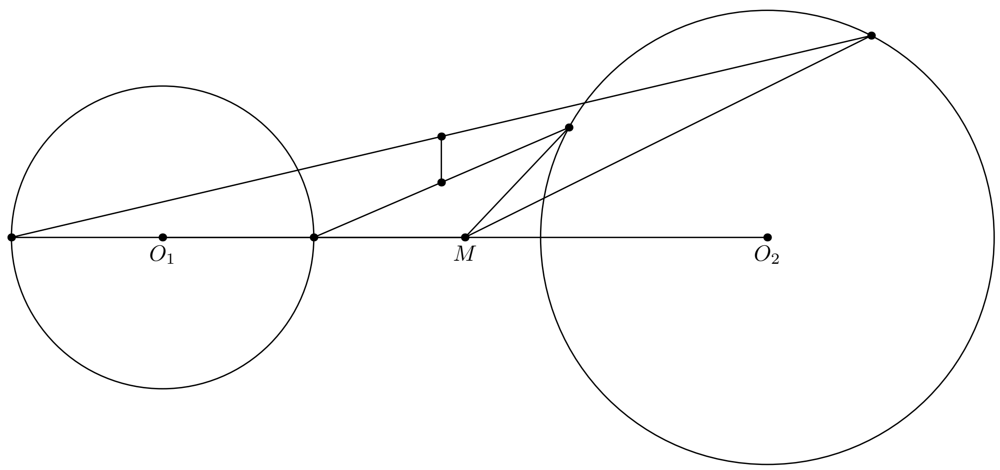

Рис. 12.

13. (8–11) (Б.Френкин) Дан выпуклый $2n$-угольник, у которого каждые две противоположные стороны параллельны друг другу. (Стороны противоположны, если при движении от одной к другой по контуру $2n$-угольника нужно пройти $n-1$ других сторон.) Пару противоположных сторон назовём *правильной*, если у них есть общий перпендикуляр, концы которого принадлежат самим сторонам, а не их продолжениям. Каково наименьшее возможное количество правильных пар?

   Ответ. 1.

   Пример. Возьмем параллелограмм $ABCD$, у которого проекция отрезка BC на прямую AD не пересекается с отрезком AD. Выберем на сторонах AB, BC точки B_1, B_2, а на сторонах CD, AD точки D_1, D_2 так, что $B_1B_2 \parallel D_1D_2$ и проекции отрезков B_1B_2, D_1D_2 на параллельную им прямую не пересекаются (рис. 13). Аналогично выберем по точке на отрезках B_1B_2, B_2C, D_1D_2, D_2A и т.д. В результате получим $2n$-угольник, в котором единственной правильной парой будет пара AB_1, CD_1.

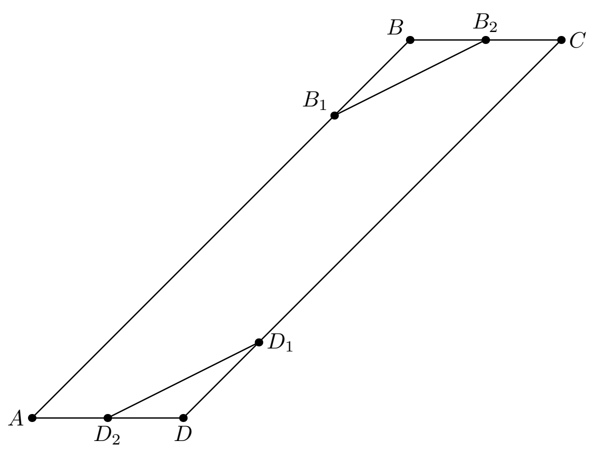

Рис. 13.

Оценка. Пусть $A_{2n}A_1$, A_nA_{n+1} — пара сторон, расстояние между которыми минимально. Предположим, что проекции этих сторон на параллельную им прямую не пересекаются. Тогда, можно считать, что $\angle A_{2n-1}A_{2n}A_1 > \pi/2$. Продлим стороны $A_{2n-1}A_{2n}$, $A_{n-1}A_n$ до пересечения с прямыми A_nA_{n+1}, $A_{2n}A_1$ соответственно в точках B, C. Перпендикуляр, опущенный из A_{2n} на прямую A_nB, пересекает сторону A_nC параллелограмма $A_{2n}CA_nB$, следовательно, расстояние от A_{2n} до A_nB больше, чем до A_nC, что противоречит выбору пары $A_{2n}A_1$, A_nA_{n+1}.

14. (9–11) (Л.Шатунов) На биссектрисе угла B внутри треугольника ABC отметили точку D. Пусть ω_1 и ω_2 — окружности, касающиеся прямых AD и CD в точке D и проходящие через точку B; P и Q — отличные от B точки пересечения ω_1 и ω_2 с описанной окружностью ABC. Докажите, что описанные окружности треугольников PQD и ACD касаются.

Решение. Сделаем инверсию с центром D и радиусом DB, пусть A', C' P', Q' — образы точек A, C, P, Q соответственно. Тогда $\angle DC'B = \angle CBD = \angle ABD = \angle DA'B$. Кроме того, окружности ω_1 и ω_2 переходят в прямые, проходящие через B и параллельные $A'D$, $C'D$ соответственно. Следовательно, $\angle P'BA' = \angle Q'BC'$ и $A'P'Q'C'$ — равнобокая трапеция (рис. 14). При обратной инверсии параллельные прямые $P'Q'$ и $A'C'$ перейдут в окружности, касающиеся в точке D.

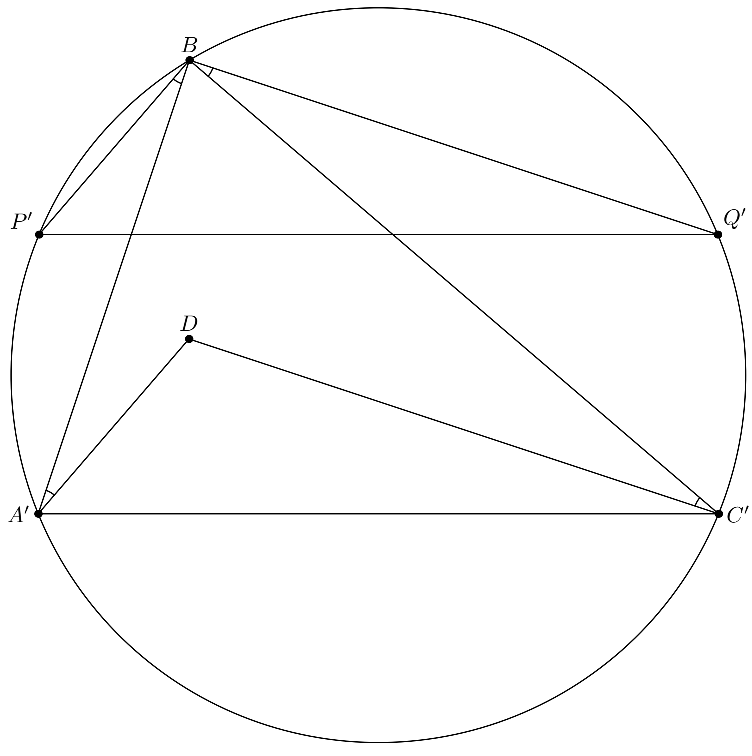

Рис. 14.

15. (9–11) (А.Заславский) Точка C лежит на биссектрисе острого угла с вершиной S. Точки P, Q — проекции C на стороны угла. Окружность с центром C и радиусом PQ пересекает стороны угла в точках A и B, причем $SA \neq SB$. Докажите, что окружность с центром A, касающаяся SB, и окружность с центром B, касающаяся SA, касаются друг друга.

Решение. Так как SC — биссектриса угла ASB, $AC = BC$ и $SA \neq SB$, точки S, A, B, C лежат на одной окружности. Поэтому $\angle CAB = \angle CSB = \angle CPQ$, т.е. треугольники CPQ и CAB подобны. Следовательно, $AB : PQ = PQ : PC = 2\cos\angle CSP$. Кроме того, $AP = BQ$, значит $SA + SB = 2SP$ и сумма расстояний от точек A и B до противоположных сторон угла равна $2SP\sin\angle ASB = 2PC\cos^2\angle ASC = AB$, что равносильно утверждению задачи (рис. 15).

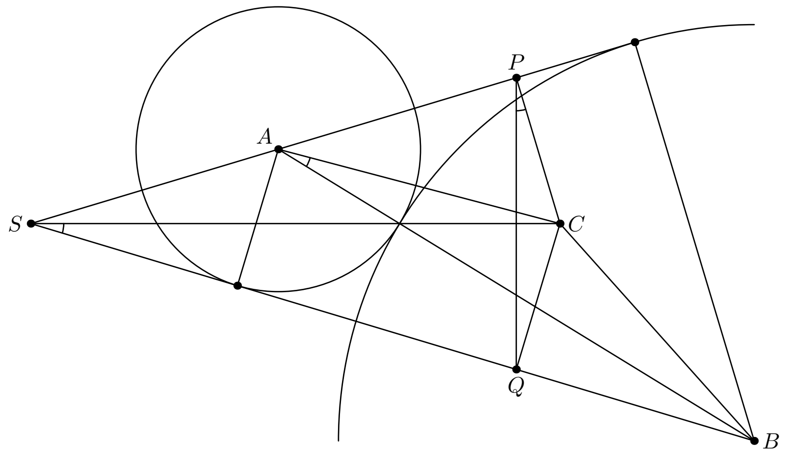

Рис. 15.

16. (9–11) (А.Заславский) Точка Фейербаха неравнобедренного треугольника лежит на биссектрисе одного из его углов. Докажите, что она делит пополам отрезок между вершиной этого угла и центром вписанной окружности.

Первое решение. Пусть точка Фейербаха F треугольника ABC лежит на биссектрисе угла C. Тогда на этой же биссектрисе лежит и центр E окружности девяти точек, являющийся серединой отрезка между ортоцентром H и центром описанной окружности O. При этом CE — биссектриса угла OCH, следовательно точки O и H симметричны относительно биссектрисы и $CO = CH = 2CO|\cos\angle C|$, т.е. угол C равен $\pi/3$ или $2\pi/3$. Но во втором случае точки O и H симметричны относительно внешней, а не внутренней биссектрисы угла C. Таким образом, $\angle C = \pi/3$ и $CF = r = CI\sin(\angle C/2) = CI/2$.

Второе решение. Точка F является центром равносторонней гиперболы, проходящей через A, B, C, I. Так как прямая CI проходит через центр гиперболы, точки C и I симметричны относительно F.

17. (9–11) (П.Пучков, Е.Уткин) Пусть O, I — центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного остроугольного треугольника ABC; D, E, F — точки касания его вневписанной окружности со стороной BC и продолжениями сторон AC и AB соответственно. Докажите, что если ортоцентр треугольника DEF лежит на описанной окружности треугольника ABC, то он симметричен середине дуги BC относительно прямой OI.

Решение. Пусть D', E', F' — вторые точки пересечения высот треугольника DEF с его описанной окружностью. Тогда высоты являются биссектрисами углов треугольника $D'E'F'$ (внутренней и двумя внешними) и, значит, параллельны соответствующим биссектрисам углов треугольника ABC. Поэтому стороны этих треугольников также параллельны, т.е. треугольники гомотетичны. При этой гомотетии O и центр I_A вневписанной окружности переходят в I_A и ортоцентр H треугольника DEF соответственно, следовательно, H лежит на прямой I_AO и $I_AH : OI_A = r_A : R$. Отсюда и из равенств $OI_A = R^2 + 2Rr_A$, $OH = R$ получаем, что $OI_A = 2R$. Кроме того, известно, что середина W дуги BC делит пополам отрезок II_A. Поскольку средняя линия WM треугольника OII_A перпендикулярна HW, то и $OI \perp HW$ (рис. 17), что равносильно утверждению задачи.

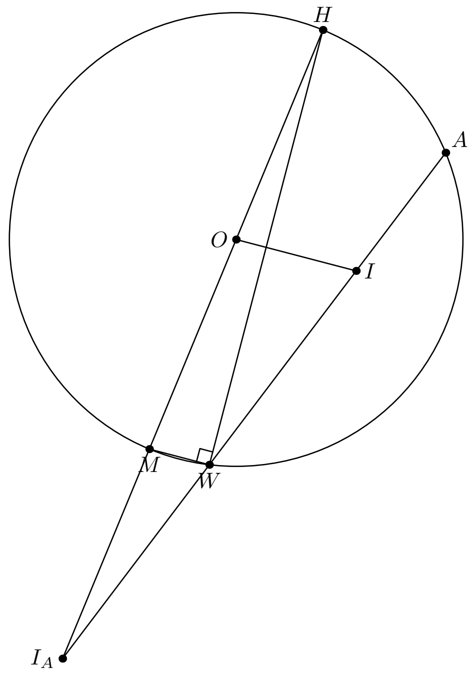

Рис. 17.

18. (9–11) (И.Кухарчук) Дан четырехугольник $ABCD$. Вневписанные окружности ω_1 и ω_2 треугольников ABC и BCD, касающиеся сторон AB и BD соответственно, касаются продолжения стороны BC в общей точке P. Отрезок AD пересекает ω_2 в точке Q, а прямая AD пересекает ω_1 в точках R и S. Докажите, что один из углов RPQ и SPQ прямой.

Решение. Утверждение задачи равносильно тому, что AD проходит через центр гомотетии с отрицательным коэффициентом переводящей ω_1 в ω_2. Пусть ω_1 касается BA в E, а AC в G. Пусть также ω_2 касается BD в F, а CD в L.

Тогда из теорем Менелая для треугольника ABD и прямой EF, а также треугольника ACD и прямой GL следует, что EF и GL пересекаются на AD, но, с другой стороны, на EF лежит центр гомотетии с отрицательным коэффициентом, поскольку EF пересекает ω_1 вторично в точке, касательная в которой параллельна BD. Аналогично с GL (рис. 18).

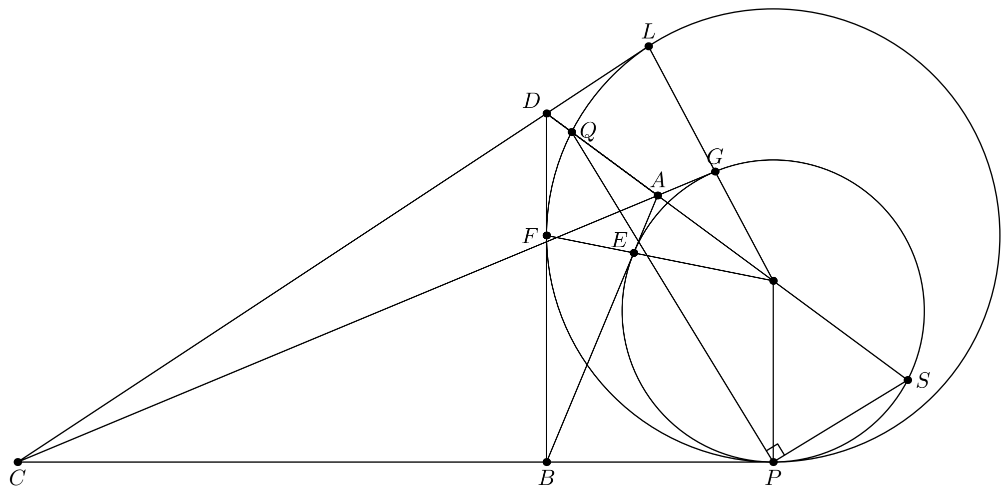

Рис. 18.

19. (10–11) (С.Кузнецов) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC; A', B', C' — ортоцентры треугольников BIC, AIC, AIB; M_a, M_b, M_c — середины BC, CA, AB, а S_a, S_b, S_c — середины AA', BB', CC'. Докажите, что M_aS_a, M_bS_b, M_cS_c пересекаются в одной точке.

Решение. Точка, симметричная C' относительно M_c, диаметрально противоположна I на окружности IAB, т.е. совпадает с центром I_C вневписанной окружности треугольника ABC. Поэтому прямая S_cM_c как средняя линия треугольника $C'II_C$ параллельна CI и проходит через центр вписанной окружности треугольника $M_aM_bM_c$ (рис. 19). Две другие прямые также проходят через эту точку.

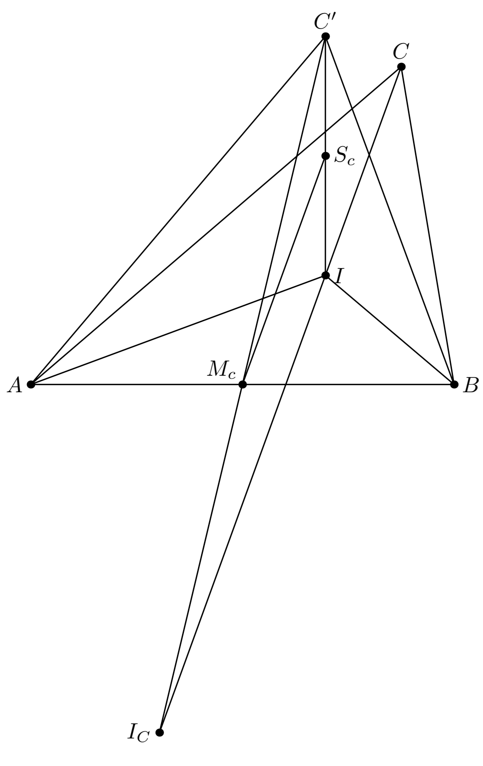

Рис. 19.

20. (10–11) (Ф.Ивлев) Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, а M и N — середины BC и AH соответственно. Перпендикуляр из N к прямой MH пересекает BC в точке A'. Точки B' и C' определяются аналогично. Докажите, что точки A', B', C' лежат на одной прямой.

Решение. Так как MN — диаметр окружности девяти точек, проекция N на MH лежит на этой окружности (рис. 20). Поэтому A' лежит на поляре H относительно окружности девяти точек. Точки B', C' также лежат на этой прямой.

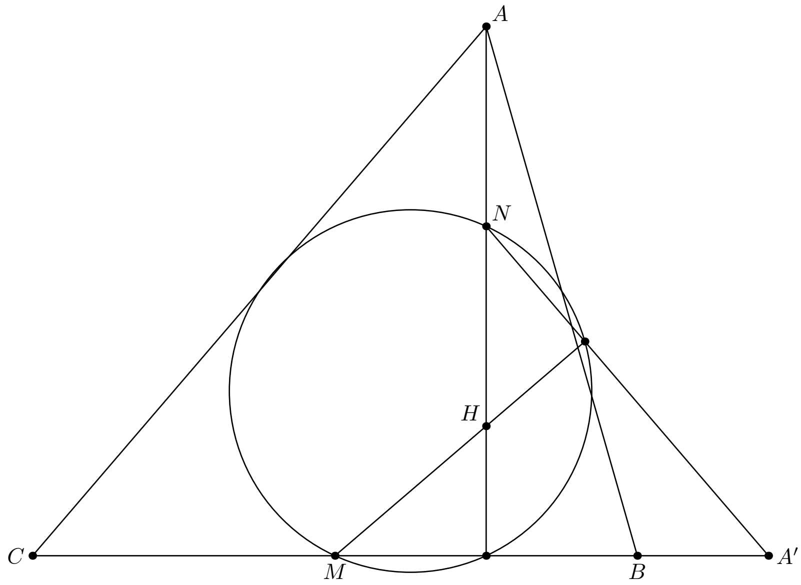

Рис. 20.

21. (10–11) (Г.Галяпин) Внутри четырёхугольника $ABCD$ отметили точку P такую, что $\angle APB + \angle CPD = 180°$. Точки P_a, P_b, P_c, P_d изогонально сопряжены P в треугольниках BCD, CDA, DAB, ABC. Докажите, что точки пересечения диагоналей четырёхугольников $ABCD$ и $P_aP_bP_cP_d$ совпадают.

Решение. Так как $\angle APB+\angle CPD = 180°$, существует точка Q, изогонально сопряженная P относительно четырехугольника $ABCD$. Тогда точки P_c, P_a лежат соответственно на прямых AQ, CQ так, что $\angle P_cBQ = \angle DBC$, $\angle P_aBQ = \angle DBA$ (рис. 21). Поэтому $AP_c : P_cQ = AB\sin\angle ABP_c : BQ\sin\angle P_cBQ$, $QP_a : P_aC = BQ\sin\angle QBP_a : BC\sin\angle P_aBC$ и по теореме Менелая прямая P_aP_c делит AC в отношении $PA\sin\angle ABD : PC\sin\angle DBC$. Следовательно, эта прямая проходит через точку L пересечения AC и BD (рис. 21). Аналогично получаем, что P_bP_d проходит через L.

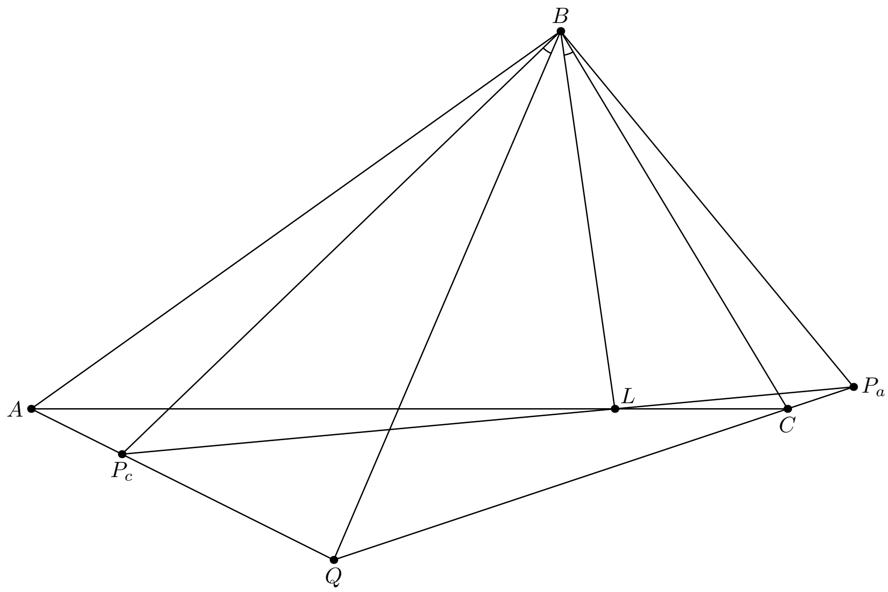

Рис. 21.

22. (10–11) (А.Заславский) Даны окружность и лежащий внутри нее эллипс с фокусами F_1, F_2. Постройте хорду окружности AB, касающуюся эллипса и такую, что четырехугольник AF_1F_2B — вписанный.

Первое решение.

Лемма. Пусть AB — произвольная хорда, касающаяся эллипса. Тогда геометрическим местом центров окружностей ABF_1 является окружность.

Доказательство. Пусть O, R — центр и радиус данной окружности; O' — центр окружности ABF_1; H — проекция F_1 на AB (рис. 22). Очевидно, что $OO' \parallel F_1H$. Применяя теорему косинусов к треугольника $O'OA$ и $O'OF_1$, получаем

$$O'F_1^2 = O'O^2 + OF_1^2 - 2OO' \cdot OF_1 \cos \angle O'OF_1, \quad O'A^2 = O'O^2 + R^2 - 2O'O \cdot OA \cos \angle O'OA.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем

$$R^2 - OF_1^2 = 2O'O(OA \cos \angle O'OA - OF_1 \cos \angle O'OF_1).$$

Выражение в скобках представляет разность проекций отрезков OA и OF_1 на прямую OO' и, следовательно равно F_1H. Таким образом, произведение $OO' \cdot F_1H$ не зависит от хорды AB.

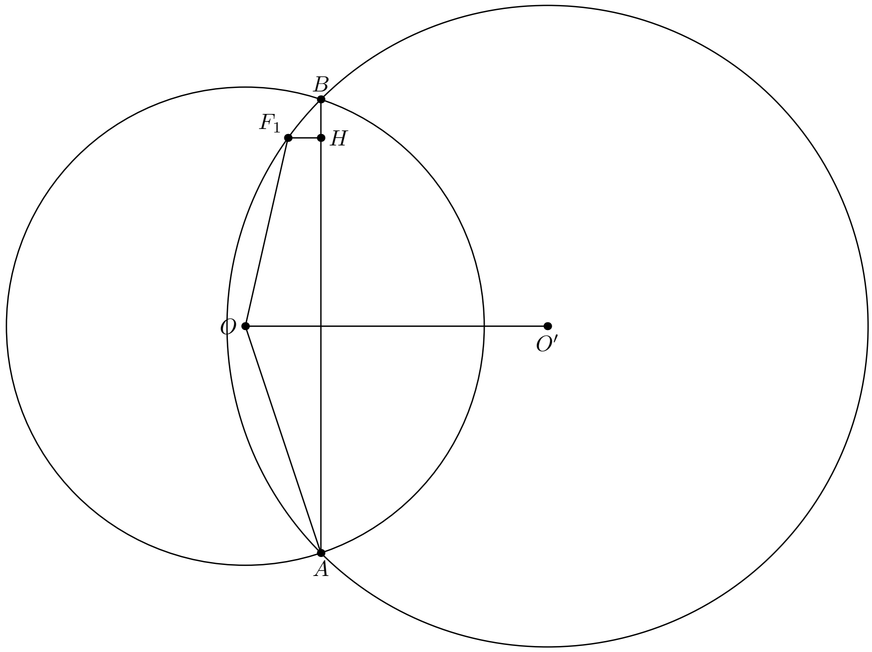

Рис. 22.

Пусть E — полюс прямой AB относительно некоторой окружности с центром F_1. Тогда $F_1E \parallel OO'$ и отношение $OO' : F_1E$ не зависит от AB, поскольку произведения $F_1H \cdot OO'$ и $F_1H \cdot F_1E$ не зависят от AB. Значит, прямая $O'E$ пересекает OF_1 в фиксированной точке X. Поэтому геометрическое место точек O' гомотетично относительно X полярному образу эллипса относительно F_1, который является окружностью.

Вернемся к задаче. Поскольку касательные к эллипсу можно построить циркулем и линейкой, мы можем построить геометрические места центров окружностей ABF_1 и ABF_2. Любая точка их пересечения является центром искомой окружности.

Второе решение. Обозначим через D и E точки пересечения данной окружности ω и прямой F_1F_2. Пусть S на F_1F_2 это точка со свойством $SD \cdot SE = SF_1 \cdot SF_2$. Для построения этой точки можно построить любую окружность, проходящую через фокусы F_1 и F_2 и пересекающую ω. Точка S — это пересечение радикальной оси этих окружностей (общей хорды) и прямой F_1F_2. Пусть Ω — это окружность, диаметром которой является большая ось данного эллипса, S' — точка инверсная S относительно Ω, C — точка эллипса такая, что $CS' \perp F_1F_2$, A и B — точки пересечения ω и CS. Тогда CS касается эллипса, а AF_1F_2B является вписанным четырехугольником.

23. (10–11) (Н.Спивак) Будем говорить, что множество M точек плоскости содержит дыру, если существует круг, не содержащийся в M, но содержащийся внутри многоугольника, граница которого лежит в M.

Можно ли представить плоскость в виде объединения n таких выпуклых множеств, что объединение любых $n-1$ из них имеет дыры?

Ответ. Да.

Решение. Пусть $n = 6$; множество M_0 — это правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$, а множества $M_i, i = 1, \ldots, 5$ — полуплоскости ограниченные прямыми A_iA_{i+1} ($A_{i+5} =$

A_i), не содержащие пятиугольник. Тогда объединение всех множеств M_i — вся плоскость, объединение пяти множеств $M_i, \ldots, M_5$ — плоскость без пятиугольника M_0, а объединение пяти множеств без множества M_i — плоскость без треугольника, образованного прямыми $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1} и $A_{i+1}A_{i+2}$.

Примечание. Жюри неизвестно, существуют ли примеры для $n < 6$.

24. (11) (С.Арутюнян) Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается граней ABC, BCD, CDA, DAB в точках D', A', B', C' соответственно. Обозначим через S_{AB} площадь треугольника $AC'B$. Аналогично определим S_{AC}, S_{BC}, S_{AD}, S_{BD}, S_{CD}. Докажите, что из отрезков с длинами $\sqrt{S_{AB}S_{CD}}$, $\sqrt{S_{AC}S_{BD}}$, $\sqrt{S_{AD}S_{BC}}$ можно составить треугольник.

Решение. Будем использовать известный факт, что $\angle AC'B = \angle AD'B = \angle CA'D = \angle CB'D$, и три аналогичных равенства. Обозначим через a, b, c, d и α, β, γ длины касательных к сфере из точек A, B, C, D и углы $BD'C$, $CD'A$, $AD'B$ соответственно. Тогда

$$S_{AB}S_{CD} = \frac{abcd\sin^2\gamma}{4}.$$

Поскольку углы α, β, γ меньше π, утверждение задачи равносильно существованию треугольника со сторонами, равными $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, которое, очевидно, следует из равенства $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$. Например, можно взять треугольник, образованный прямыми, перпендикулярными $D'A$, $D'B$, $D'C$.