Пятнадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Пятнадцатой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

В олимпиаде могут участвовать школьники последних четырех классов средней школы. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов российской школы (на момент проведения олимпиады) она предназначена. В тех странах, где количество классов в школе другое, ученики последнего класса решают задачи 11 класса, ученики предпоследнего класса — задачи 10 класса и т.д. Можно решать задачи и для более старших классов (решенные задачи для более младших классов при подведении итогов не учитываются).

Полное решение любой задачи или любого её пункта, если задача имеет пункты, оценивается в 7 баллов. Неполное решение, в зависимости от степени продвижения, оценивается от 1 до 6 баллов. При отсутствии заметного продвижения ставится 0 баллов. Результатом участника является сумма баллов по всем задачам.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая отчетливые чертежи достаточного размера. **Если в задаче требуется дать ответ на некоторый вопрос (например, найти значение какой-нибудь величины), то этот ответ следует привести перед решением**. Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении каким-то фактом из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и не обязательно) указать в работе, какие задачи Вам понравились. Нам будет интересно узнать Ваше мнение.

Решения задач на русском или английском языке должны быть представлены в электронной форме **не раньше 1 декабря 2018 и не позднее 1 марта 2019 года**. Для этого нужно зайти на сайт **https://contest.yandex.ru/geomshar/**, справа наверху указать язык (русский), слева наверху нажать "Регистрация"и следовать появляющимся инструкциям.

ВНИМАНИЕ:

1. Решение каждой задачи (и каждого её пункта, если задача имеет пункты) должно содержаться в отдельном файле формата pdf, doc, docx или jpg. Если решение состоит из нескольких файлов, то нужно создать из них архив (zip или rar) и загрузить его.

2. Желательно выполнять работу на компьютере или сканировать, а не фотографировать. **Во всех случаях необходимо убедиться перед отправкой, что файл хорошо читается**.

3. Если несколько раз загружается решение одной и той же задачи, то в системе проверки остается только последнее. **Поэтому при необходимости что-то изменить Вам следует снова загрузить решение задачи полностью.**

При возникновении технических проблем с загрузкой работы обращайтесь по адресу **geomshar@yandex.ru. (НЕ присылайте работы на этот адрес!)**

Финальный тур состоится летом 2019 года под Москвой. На него будут приглашены победители заочного тура, не закончившие к этому времени школу. Победители заочного тура — выпускники школ получат грамоты оргкомитета олимпиады. Списки победителей будут опубликованы на сайте **www.geometry.ru** не позднее 1 июня 2019 г. Свои результаты Вы сможете узнать после публикации списков по адресу **geomshar@yandex.ru**.

1. (8) В треугольнике ABC AA_1, CC_1 — высоты, P — произвольная точка на стороне BC. Точка Q на прямой AB такова, что $QP = PC_1$, а точка R на прямой AC такова, что $RP = CP$. Докажите, что четырехугольник QA_1RA вписанный.

2. (8) Окружность ω_1 проходит через центр O окружности ω_2 и пересекает ее в точках A и B. Окружность ω_3 с центром в точке A и радиусом AB пересекает повторно окружности ω_1 и ω_2 в точках C и D (отличных от B). Докажите, что точки C, O, D лежат на одной прямой.

3. (8) Внутри окружности расположен прямоугольник $ABCD$. Лучи BA и DA пересекают окружность в точках A_1 и A_2. Точка A_0 — середина хорды A_1A_2. Аналогично определяются точки B_0, C_0, D_0. Докажите, что отрезки A_0C_0 и B_0D_0 равны.

4. (8) В треугольнике ABC вневписанная окружность, лежащая напротив угла C, касается стороны AB в точке T. Пусть J — центр вневписанной окружности, лежащей напротив угла A, а M — середина AJ. Докажите, что $MT = MC$.

5. (8–9) На плоскости даны точки A, B, C и D общего положения и проходящая через B и C окружность ω. Точка P движется по ω. Обозначим через Q точку пересечения описанных окружностей треугольников ABP и PCD, отличную от P. Найдите геометрическое место точек Q.

6. (8–9) Два четырехугольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ симметричны друг другу относительно точки P. Известно, что четырехугольники A_1BCD, AB_1CD и ABC_1D вписанные. Докажите, что $ABCD_1$ тоже вписанный.

7. (8–9) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_A, BH_B, CH_C. Пусть X — произвольная точка отрезка CH_C, а P — точка пересечения окружностей с диаметрами H_CX и BC, отличная от H_C. Прямые CP и AH_A пересекаются в точке Q, а прямые XP и AB — в точке R. Докажите, что точки A, P, Q, R, H_B лежат на одной окружности.

8. (8–9) Окружность ω_1 проходит через вершину A параллелограмма $ABCD$ и касается лучей CB, CD. Окружность ω_2 касается лучей AB, AD и касается внешним образом ω_1 в точке T. Докажите, что T лежит на диагонали AC.

9. (8–9) В остроугольном треугольнике ABC A_M — середина стороны BC, A_H — основание высоты, опущенной на эту сторону. Аналогично определяются точки B_M, B_H, C_M, C_H. Докажите, что одно из отношений $A_MA_H : A_HA$, $B_MB_H : B_HB$, $C_MC_H : C_HC$ равно сумме двух других.

10. (8–9) В треугольнике ABC N — середина дуги ABC описанной окружности треугольника, NP и NT — касательные к вписанной окружности. Прямые BP и BT пересекают второй раз описанную окружность треугольника в точках P_1 и T_1 соответственно. Докажите, что $PP_1 = TT_1$.

11. (8–9) Мортеза отметил на плоскости шесть точек и нашел площади всех 20 треугольников с вершинами в этих точках. Может ли оказаться, что все полученные числа целые, а их сумма равна 2019?

12. (8–11) Пусть $A_1A_2A_3$ — остроугольный треугольник, радиус описанной окружности равен 1, O — её центр. Из вершин A_i проведены чевианы через O до пересечения с противолежащими сторонами в точках B_i соответственно ($i = 1, 2, 3$).

   (а) Из трёх отрезков B_iO выберем самый длинный. Какова его наименьшая возможная длина?

   (б) Из трёх отрезков B_iO выберем самый короткий. Какова его наибольшая возможная длина?

13. (9–10) В остроугольном треугольнике ABC с высотой $AT = h$ проведена прямая через центры O и I описанной и вписанной окружностей. Эта прямая пересекает стороны AB и AC в точках F и N соответственно, причём около четырёхугольника $BFNC$ можно описать окружность. Найдите сумму расстояний от ортоцентра треугольника ABC до его вершин.

14. (9–11) Сторона AC треугольника ABC касается вписанной окружности в точке K, а соответствующей вневписанной в точке L. Точка P — проекция центра вписанной окружности на серединный перпендикуляр к AC. Известно, что касательные в точках K и L к описанной окружности треугольника BKL пересекаются на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямые AB и BC касаются окружности PKL.

15. (9–11) Окружность ω, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Перпендикуляр из E на DF пересекает прямую BC в точке X, а перпендикуляр из F на DE пересекает BC в точке Y. Отрезок AD пересекает ω во второй раз в точке Z. Докажите, что описанная окружность треугольника XYZ касается ω.

16. (9–11) В треугольнике ABC AH_1 и BH_2 — высоты; касательная к описанной окружности в точке A пересекает BC в точке S_1, а касательная в точке B пересекает AC в точке S_2; T_1 и T_2 — середины отрезков AS_1 и BS_2. Докажите, что T_1T_2, AB и H_1H_2 пересекаются в одной точке.

17. (10–11) Даны три окружности. Первая и вторая пересекаются в точках A_0 и A_1, вторая и третья — в точках B_0 и B_1, третья и первая — в точках C_0 и C_1. Пусть $O_{i,j,k}$ — центр описанной окружности треугольника $A_iB_jC_k$. Через все пары точек вида $O_{i,j,k}$ и $O_{1-i,1-j,1-k}$ провели прямые. Докажите, что эти 4 прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

18. (10–11) Четырехугольник $ABCD$ без параллельных сторон описан около окружности с центром I. Точки K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA. Известно, что $AB \cdot CD = 4IK \cdot IM$. Докажите, что $BC \cdot AD = 4IL \cdot IN$.

19. (10–11) В треугольнике ABC AL_a, BL_b, CL_c — биссектрисы, K_a — точка пересечения касательных к описанной окружности в вершинах B и C; K_b, K_c определены аналогично. Докажите, что прямые K_aL_a, K_bL_b и K_cL_c пересекаются в одной точке.

20. (10–11) В треугольнике ABC O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, M — середина AB. Прямая MH пересекает прямую, проходящую через O и параллельную AB, в точке K, лежащей на описанной окружности треугольника. Точка P — проекция K на AC. Докажите, что $PH \parallel BC$.

21. (10–11) Дан эллипс Γ и его хорда AB. Найдите геометрическое место ортоцентров вписанных в Γ треугольников ABC.

22. (10–11) В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведена высота AA_0. Окружность γ с центром в середине AA_0 касается прямых AB и AC. Из точки X прямой BC проведены две касательные к γ. Докажите, что эти касательные высекают на прямых AB и AC равные отрезки.

23. (10–11) На плоскости даны две замкнутые ломаные a, b (возможно, самопересекающиеся) и точки K, L, M, N. Вершины ломаных и эти точки находятся в общем положении (т.е. никакие три из них не лежат на прямой и никакие три отрезка, их соединяющие, не имеют общей внутренней точки). Каждый из отрезков KL и MN пересекает ломаную a в четном количестве точек, а каждый из отрезков LM и NK — в нечетном. Ломаная b, наоборот, пересекает каждый из отрезков KL и MN в нечетном количестве точек, а каждый из отрезков LM и NK — в четном. Докажите, что ломаные a и b пересекаются.

24. (11) Даны два единичных куба с общим центром. Всегда ли можно занумеровать вершины каждого из кубов от 1 до 8 так, чтобы расстояние между любыми двумя вершинами с одинаковыми номерами не превышало $4/5$? А чтобы не превышало $13/16$?