XIV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. Первый день. 8 класс

Ратмино, 31 июля 2018 г.

1. (М. Волчкевич) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписанная окружность касается катета BC в точке K. Докажите, что хорда вписанной окружности, высекаемая прямой AK в два раза больше, чем расстояние от вершины C до этой прямой.

   Решение. Пусть I — центр вписанной окружности, P, Q — проекции точек I, C соответственно на AK (рис.8.1). Так как $\angle IKC = 90^\circ$, $\angle ICK = 45^\circ$, треугольник IKC — равнобедренный, т.е. $IK = KC$. Кроме того, $\angle IKP = \angle KCQ$, поскольку соответствующие стороны этих углов перпендикулярны. Следовательно, треугольники IKP и KCQ равны, т.е. $KP = CQ$. Но P — середина хорды, высекаемой в окружности прямой AK, откуда и следует утверждение задачи.

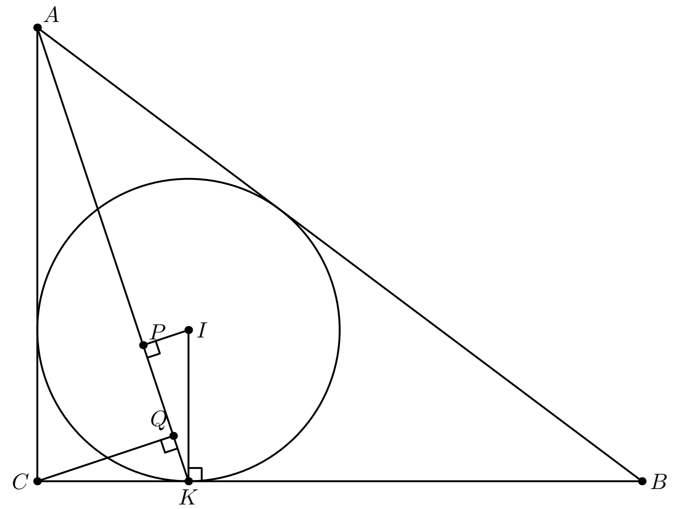


Рис. 8.1

2. (Н.Москвитин) Около прямоугольника $ABCD$ описана окружность. На меньшей дуге BC окружности взята произвольная точка E. К окружности проведена касательная в точке B, пересекающая прямую CE в точке G. Отрезки AE и BD пересекаются в точке K. Докажите, что прямые GK и AD перпендикулярны.

   Решение. Так как $\angle DBG = \angle AEC = 90^\circ$, четырехугольник $BGEK$ — вписанный (рис.8.2). Следовательно, $\angle BGK = \angle BEA = \angle DBC$ и $GK \perp BC$, что равносильно утверждению задачи.

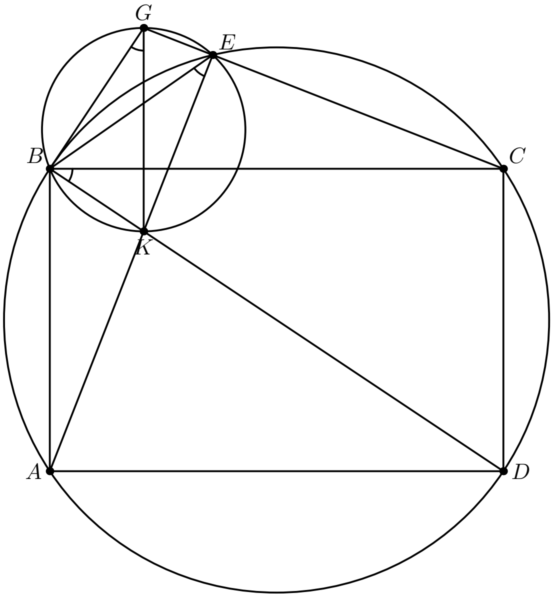


Рис. 8.2

3. (Г.Фельдман) В треугольнике ABC угол A равен $60°$, AA', BB', CC' — биссектрисы. Докажите, что $\angle B'A'C' \le 60°$.

Решение. Для равностороннего треугольника утверждение задачи очевидно, поэтому можно считать, что $AC > AB$. Пусть I — точка пересечения биссектрис. Тогда $\angle BIC = 120°$, следовательно, четырехугольник $AB'IC'$ — вписанный, а поскольку AI — биссектриса, то $B'I = C'I$. Пусть $\angle ACB = 2\gamma$, тогда $\gamma < 30°$ и $IA' = \frac{r}{\sin\angle AA'B} = \frac{r}{\sin(2\gamma+30°)} > \frac{r}{\sin(\gamma+60°)} = \frac{r}{\sin\angle CC'B} = IC'$. Поэтому A' лежит вне окружности с центром I радиуса IC' (рис.8.3), то есть $\angle B'A'C' < 60°$.

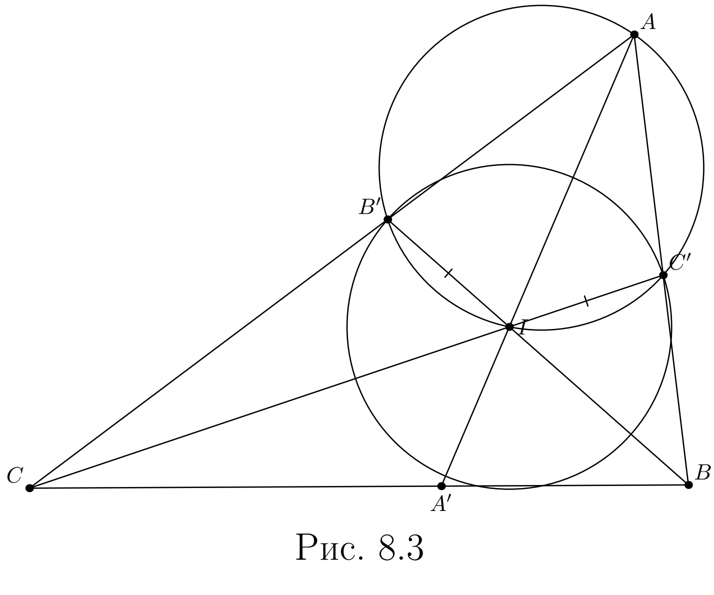


Рис. 8.3

4. (M.Saghafian) Найдите все такие конфигурации из шести точек общего положения на плоскости, что треугольник, образованный любыми тремя из них, равен треугольнику, образованному тремя остальными.

Ответ. Два равносторонних треугольника, вписанных в одну окружность.

Первое решение. Пусть D — набор 15 расстояний между точками $A_1, \ldots, A_6$ (каждое число входит в набор столько раз, сколько есть отрезков соответствующей длины), D_i — набор 5 расстояний от A_i до остальных точек. Рассмотрим набор 30 длин сторон треугольников, одной из вершин которых является A_i. Каждое число из набора D_i входит в него четыре раза, а каждое число из набора $D \setminus D_i$ — один раз. Из условия задачи следует, что такой же набор 30 чисел мы получим, беря стороны треугольников, в которых A_i не является вершиной, т.е. каждое число из $D \setminus D_i$ входит в этот набор три раза. Следовательно, $D = 3D_i$, т.е. все наборы D_i совпадают.

Введем на плоскости прямоугольную систему координат обозначим через M точку, каждая координата которой равна среднему арифметическому соответствующих координат точек A_i. Пусть X — произвольная точка плоскости, $x, m, a_1, \ldots, a_6$ — первые координаты точек $X, M, A_1, \ldots, A_6$. Легко видеть, что выполнено равенство $(x-a_1)^2 + \cdots + (x-a_6)^2 = ((x-m)+(m-a_1))^2 + \cdots + ((x-m)+(m-a_6))^2 = 6(x-m)^2 + (m-a_1)^2 + \cdots + (m-a_6)^2$. Аналогичное равенство выполняется для вторых координат точек, откуда по теореме Пифагора получаем, что

$$XA_1^2 + \cdots + XA_6^2 = 6XM^2 + MA_1^2 + \cdots + MA_6^2$$

(это равенство является частным случаем теоремы Лейбница о моментах инерции). Подставляя в него вместо X $A_1, \ldots, A_6$, получаем, что $MA_1 = \cdots = MA_6$, т.е. все точки лежат на одной окружности. Можно считать, что они образуют вписанный шестиугольник $A_1 \ldots A_6$. Пусть A_1A_2 — его наименьшая сторона. Из равенства наборов D_i следует, что $A_1A_2 = A_3A_4 = A_5A_6$. Аналогично $A_2A_3 = A_4A_5 = A_6A_1$. В достаточности этих условий убеждаемся непосредственной проверкой.

Второе решение. Пусть A_1, A_2,..., A_6 — данные точки. Если не сказано иное, будем под треугольником понимать треугольник с вершинами в A_i, под отрезком — отрезок с концами в A_i, под длиной — длину такого отрезка. Докажем ряд лемм.

1) Для всякой длины x верно хотя бы одно из утверждений:

(А) существует равносторонний треугольник со стороной x;

(Б) существует три отрезка длины x с шестью разными концами.

В самом деле, пусть $A_1A_2 = A_3A_4 = x$. Так как $\triangle A_1A_2A_4 = \triangle A_3A_5A_6$, то в $\triangle A_3A_5A_6$ есть сторона x. Если это A_5A_6, мы получили (Б), иначе есть два смежных отрезка длины x. Пусть (начнём нумерацию заново) $A_1A_2 = A_2A_3 = x$ и $A_4A_5 = A_5A_6 = x$. Так как $\triangle A_2A_3A_5 = \triangle A_1A_4A_6$, то в $\triangle A_1A_4A_6$ есть сторона x. Если это A_4A_6, то имеем (А), в противном случае получаем пятизвенную ломаную, все звенья которой равны x. Её крайние и среднее звенья дадут конструкцию (Б).

2) Пусть x — максимальная длина. Тогда неверно (А), а значит верно (Б).

В самом деле, если $\triangle A_1A_2A_3$ равносторонний со стороной x, то внутри построенного на нём треугольника Рело лежат вершины равного ему $\triangle A_4A_5A_6$, что невозможно.

3) Любые два отрезка максимальной длины x пересекаются.

В самом деле, если $A_1A_2 = x$, проведём через A_1 и A_2 прямые, перпендикулярные A_1A_2. В полосе между ними лежат остальные точки. Сделав так же для $A_3A_4 = x$, мы получим, что A_1A_2 и A_3A_4 — непараллельные высоты некоторого ромба, соединяющие внутренние точки его сторон. Такие высоты, очевидно, пересекаются.

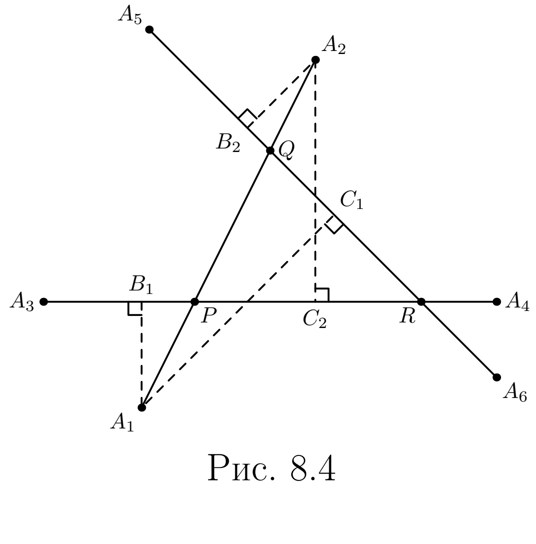


Рис. 8.4

4) Пусть отрезки A_1A_2, A_3A_4 и A_5A_6 пересекаются в трёх точках (см. рис.8.4). Тогда перпендикуляры A_1B_1 и A_2B_2 равны как высоты равных треугольников $A_1A_3A_4$ и $A_2A_5A_6$. Аналогично равны перпендикуляры A_1C_1 и A_2C_2. Отсюда $\frac{A_1P}{PA_2} = \frac{A_1B_1}{A_2C_2} = \frac{A_2B_2}{A_1C_1} = \frac{A_2Q}{QA_1}$. Это значит, что $A_1P = QA_2$. Отсюда следует, что $\triangle A_1PB_1 = \triangle A_2QB_2$, то есть $\angle P = \angle Q$. Аналогичным рассуждением получаем, что $\triangle PQR$ равносторонний, а тогда $A_1P = QA_2 = A_3P = RA_4 = A_6R = QA_5$. Легко проверить, что эта конструкция удовлетворяет условиям.

В точности такие же рассуждения в случае пересечения отрезков в одной точке показывают, что они пересекаются в общей середине, образуя углы по $60°$.

XIV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. Второй день. 8 класс

Ратмино, 1 августа 2018 г.

5. (С.Севастьянов) На стороне AB квадрата $ABCD$ вне его построен равнобедренный треугольник ABE ($AE = BE$). Пусть M — середина AE, O — точка пересечения AC и BD, K — точка пересечения ED и OM. Докажите, что $EK = KO$.

   Решение. Так как OM — средняя линия треугольника ACE, $OM \parallel EC$, следовательно, $\angle KOE = \angle OEC$ (рис.8.5). Но очевидно, что EO — биссектриса угла CED. Значит, $\angle EOK = \angle OEK$ и треугольник OKE — равнобедренный.

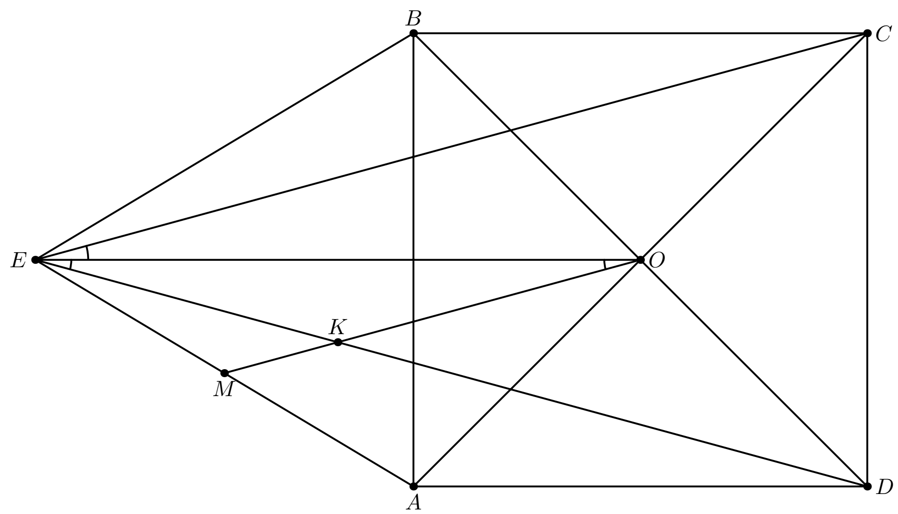


Рис. 8.5

6. (Д.Шноль) В четырехугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны соответствующие углы. Кроме того, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BD = B_1D_1$. Обязательно ли четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны?

   Ответ. Нет.

   Решение. Пусть $A = A_1$, $B = B_1$, AXB — равнобедренный треугольник, AA', BB' — его высоты, точки C, C_1 на стороне BX и D, D_1 на стороне AX таковы, что $CA' = C_1A' = DB' = D_1B'$. Тогда $AC = AC_1 = BD = BD_1$ и равнобедренные трапеции $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ удовлетворяют всем условиям, но не являются равными (рис.8.6).

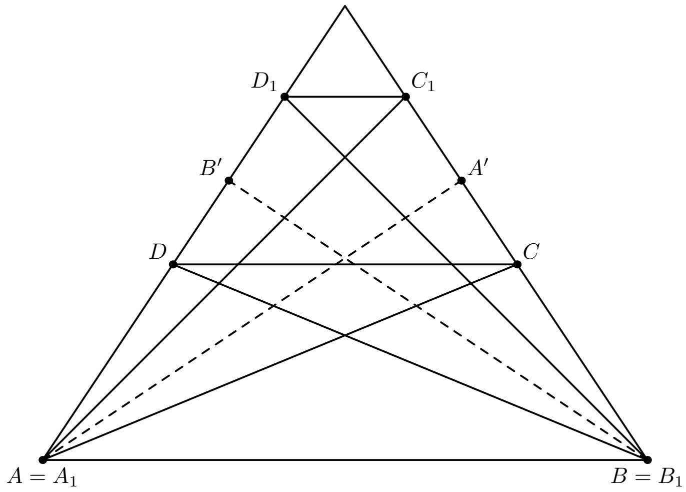


Рис. 8.6

7. (Ф.Нилов) Окружности ω_1, ω_2 с центрами O_1, O_2 соответственно лежат одна вне другой. На этих окружностях взяты точки C_1, C_2, лежащие по одну сторону от прямой O_1O_2. Луч O_1C_1 пересекает ω_2 в точках A_2, B_2, а луч O_2C_2 пересекает ω_1 в точках A_1, B_1. Докажите, что $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$ тогда и только тогда, когда $C_1C_2 \parallel O_1O_2$.

   Первое решение. Пусть R_1, R_2 — радиусы окружностей, M_1, M_2 — середины A_1B_1, A_2B_2 соответственно, H_1, H_2 — проекции C_1, C_2 на O_1O_2. Очевидно, равенство углов $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$ равносильно равенству отношений $O_1M_1/R_1 = O_2M_2/R_2$. Но так как треугольник $O_1O_2M_2$ подобен треугольнику $O_1C_1H_1$, то $O_2M_2/R_2 = (C_1H_1 \cdot O_1O_2)/(R_1R_2)$ (рис.8.7). Аналогично $O_1M_1/R_1 = (C_2H_2 \cdot O_1O_2)/(R_1R_2)$. Следовательно, равенство $O_1M_1/R_1 = O_2M_2/R_2$ равносильно равенству $C_1H_1 = C_2H_2$, которое, в свою очередь, равносильно параллельности прямых C_1C_2 и O_1O_2.

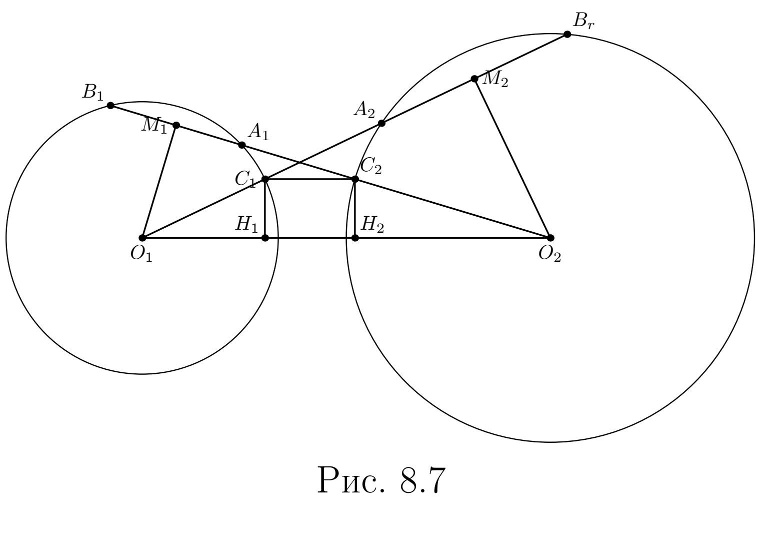


Рис. 8.7

Второе решение. Равенство $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$ равносильно равенству $\angle O_1A_1O_2 = \angle O_1A_2O_2$, т.е вписанности четырехугольника $O_1A_1A_2O_2$. Докажем равносильность этой вписанности и параллельности прямых C_1C_2 и O_1O_2.

Если четырехугольник $O_1A_1A_2O_2$ вписанный, то $\angle A_1O_1C_1 = \angle A_2O_2C_2$, $\angle O_1C_1A_1 = \angle O_2C_2A_2$ и четырехугольник $C_1A_1A_2C_2$ — вписанный. Следовательно, прямые O_1O_2 и C_1C_2 антипараллельны прямой A_1A_2 относительно прямых O_1A_2, O_2A_1 и, значит, параллельны.

Если $C_1C_2 \parallel O_1O_2$, то рассмотрим точку X пересечения луча O_1C_1 с окружностью $A_1O_1O_2$. Четырехугольник $A_1C_1C_2X$ также вписанный, следовательно, $\angle A_1O_1X = \angle XO_2A_1$ и $\angle O_1C_1A_1 = \angle O_2C_2X$. Поэтому $\angle O_2XC_2 = \angle O_1A_1C_1 = \angle O_1C_1A_1 = \angle O_2C_2X$, т.е. $O_X = O_2C_2$ и X совпадает с A_2.

8. (И.Кухарчук) В треугольнике ABC I — центр вписанной окружности, D — произвольная точка на стороне BC, серединный перпендикуляр к отрезку AD пресекает прямые BI и CI в точках F и E соответственно. Найдите геометрическое место ортоцентров треугольников EIF.

   Ответ. Отрезок прямой BC между точками ее пересечения с прямыми, проходящими через I и параллельными AB, AC, возможно, с одной или двумя выколотыми точками.

   Решение. Пусть G, H — ортоцентры треугольников DEF, IEF соответственно. Так как треугольники DEF и AEF симметричны относительно EF, точка G симметрична ортоцентру треугольника AEF и, значит, лежит на окружности, описанной около этого треугольника.

   Точка E пересечения серединного перпендикуляра к AD с биссектрисой угла C лежит на описанной окружности треугольника ACD. Поэтому $\angle AEF = \angle AED/2 = 90^\circ - \angle C/2 = \angle A/2 + \angle B/2 = \angle AIF$ (так как AIF — внешний угол треугольника AIB), т.е. I лежит на окружности AEF. Тогда из вписанности четырехугольников $AEDC$ и $AEIG$ следует, что $IG \parallel CD$.

   Так как $\angle EHF = 180^\circ - \angle EIF = \angle EAF = \angle EDF$, точки E, F, D, H лежат на одной окружности. Следовательно, $IH = DG$. Кроме того, очевидно, что $DG \parallel IH$. Значит, $IGDH$ — параллелограмм и H лежит на BC (рис.8.8). Если D совпадает, например, с вершиной C, то DG совпадает с AC и $IH \parallel AC$. Если BC — наименьшая сторона треугольника, то любая точка полученного отрезка принадлежит искомому ГМТ. Если же, например, $BC \geq AB$, то точка, симметричная A относительно биссектрисы угла B, попадает на отрезок BC. При совпадении D с этой точкой серединный перпендикуляр к AD совпадает с прямой BI и точка F не определена. Поэтому соответствующую точку H надо исключить из ГМТ.

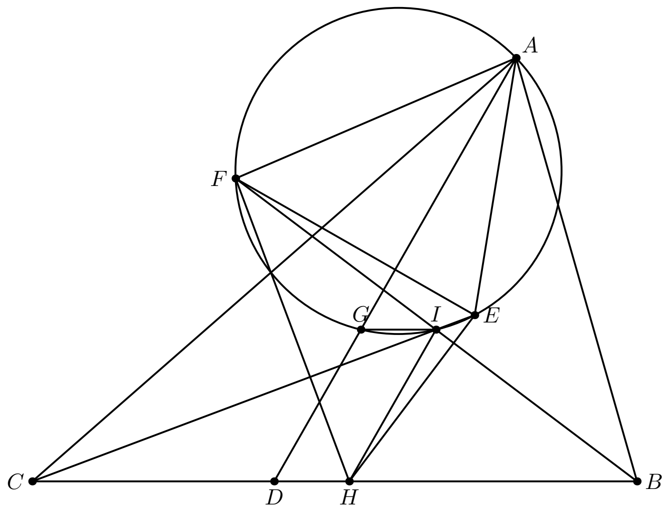


Рис. 8.8

Примечание. То, что H лежит на BC, можно доказать иначе. Проекции точки A на биссектрисы углов B и C лежат на средней линии треугольника. На этой же средней линии лежит и середина отрезка AD, являющаяся проекцией A на EF. Поэтому средняя линия является прямой Симсона точки A относительно треугольника IEF, а гомотетичная ей прямая BC проходит через ортоцентр этого треугольника.

XIV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. Первый день. 9 класс

Ратмино, 31 июля 2018 г.

1. (M.Etesamifard) Пусть M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Окружность, проходящая через C и M, пересекает отрезки BC и AC в точках P и Q соответственно. Пусть c_1, c_2 — окружности с центрами P, Q и радиусами BP, AQ соответственно. Докажите, что c_1, c_2 и описанная окружность треугольника ABC проходят через одну точку.

   Решение. Пусть N — вторая точка пересечения окружности MPQ с AB. Тогда $\angle QNA = \angle QPM = \angle ACM = \angle CAM$ (рис.9.1). Следовательно, $QA = QN$ и N лежит на окружности c_2. Аналогично N лежит на c_1. Теперь, если D — вторая точка пересечения c_1 и c_2, то $\angle ADB = \angle ADN + \angle NDB = (\angle AQN + \angle NPB)/2 = 90°$, т.е. D лежит на окружности ABC.

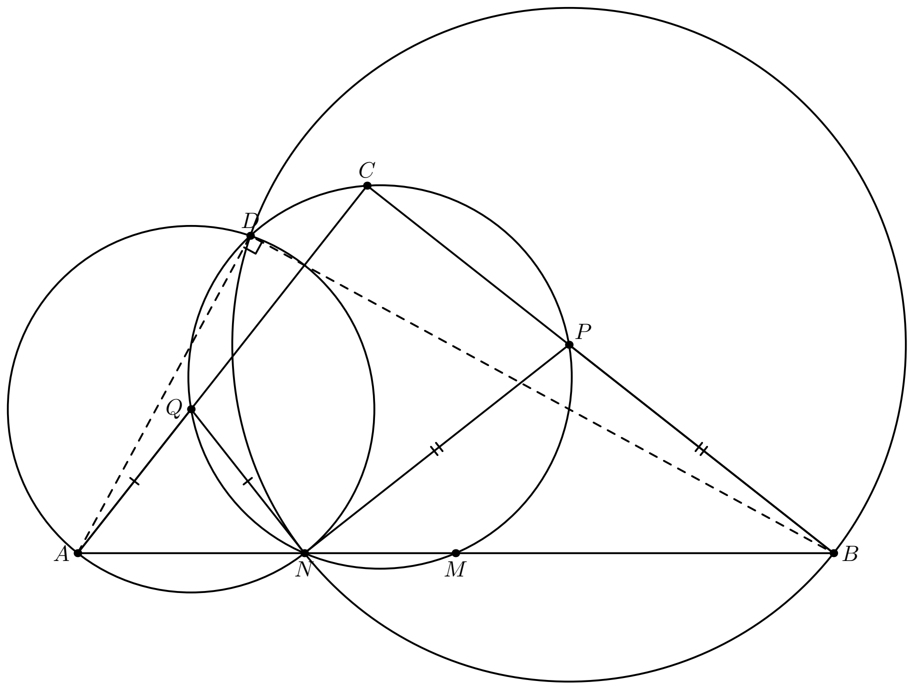


Рис. 9.1

2. (Г.Науменко) Дан треугольник ABC и окружность γ с центром в точке A, которая пересекает стороны AB и AC. Пусть общая хорда описанной окружности треугольника и окружности γ пересекает стороны AB и AC в точках X и Y соответственно. Отрезки CX и BY пересекают γ

в точках S и T соответственно. Описанные окружности треугольников ACT и BAS пересекаются в точках A и P. Докажите, что прямые CX, BY, и AP пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть U — вторая точка пересечения прямой BY с γ. Так как TU, AC и общая хорда окружностей ABC и γ пересекаются в точке Y, $AY \cdot CY = TY \cdot UY$, т.е. A, U, C, T лежат на одной окружности (рис.9.2). Аналогично A, B, S и вторая точка пересечения прямой CX с γ лежат на одной окружности. Следовательно, прямые CX, BY, и AP пересекаются в одной точке как радикальные оси окружностей γ, ACT и BAS.

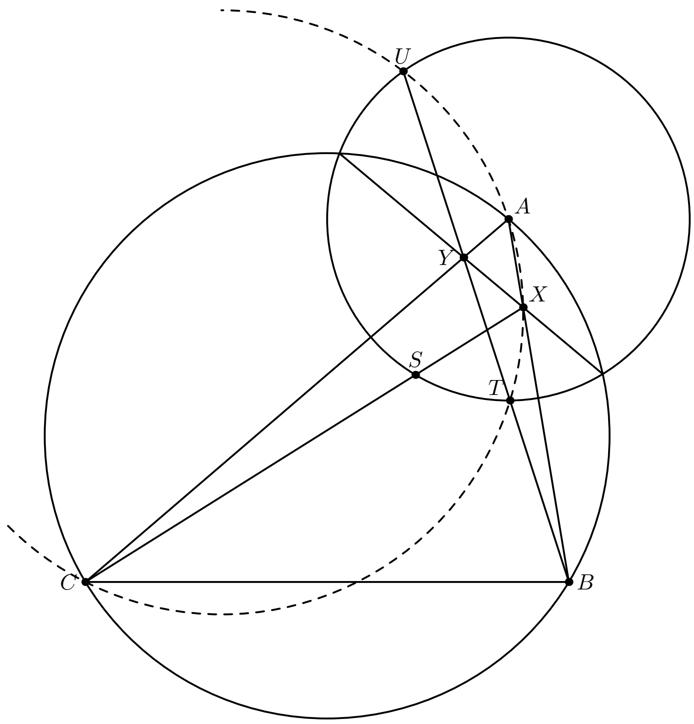


Рис. 9.2

3. (Н.Белухов) Вершины треугольника DEF лежат на разных сторонах треугольника ABC. Касательные, проведенные из центра вписанной в треугольник DEF окружности к вневписанным окружностям треугольника ABC, равны. Докажите, что $4S_{DEF} \geq S_{ABC}$.

   Решение. Пусть A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB, а U, V — точки касания прямой AB с вневписанными окружностями, касающимся сторон AC и BC соответственно. Так как $AV = BU = p$ (полупериметр треугольника), касательные из точки C_0 к вневписанным окружностям, касающимся сторон AC и BC, равны. Кроме того, линия центров этих окружностей перпендикулярна биссектрисе угла C, а значит и биссектрисе угла $A_0C_0B_0$, которая, таким образом, является их радикальной осью. Аналогично биссектрисы углов $C_0A_0B_0$ и $B_0A_0C_0$ являются радикальными осями други пар вневписанных окружностей, т.е. центры вписанных окружностей треугольников DEF и $A_0B_0C_0$ совпадают. Предположим для определенности, что точка D лежит на отрезке CA_0. Тогда, если радиус r' вписанной окружности треугольника DEF больше радиуса r вписанной окружности треугольника $A_0B_0C_0$, то F лежит на отрезке BC_0, а значит E лежит на отрезке AB_0. Если же $r' < r$, то E лежит на отрезке AB_0, а значит F лежит на отрезке BC_0. Поэтому расстояние от F до прямой ED не меньше расстояния от C_0 до этой прямой, т.е. $S_{DEF} \geq S_{C_0DE}$. Аналогично $S_{C_0DE} \geq S_{B_0C_0D} = S_{A_0B_0C_0} = S_{ABC}/4$.

4. (A.Mudgal) Дана окружность ω и ее хорда BC. Точка A движется по большей из дуг BC. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, D, E — такие точки на сторонах AB, AC, что H — середина отрезка DE, O_A — центр описанной окружности треугольника ADE. Докажите, что все точки O_A лежат на одной окружности.

   Решение. Обозначим постоянный угол $90° - \angle BAC$ через α. Пусть P, Q — середины AD, AE, а R, S — такие точки на прямой BC, что $PR \perp AB$, $SQ \perp AC$ (рис. 9.4). Покажем, что точки R, S не зависят от A.

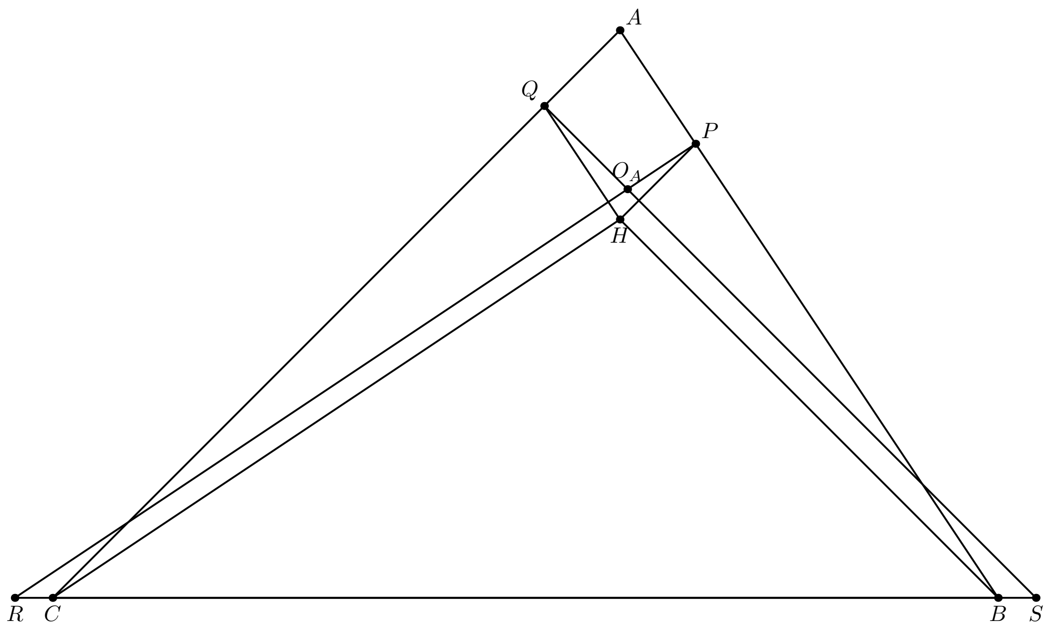


Рис. 9.4

Заметим, что $HQ \parallel AB$, т.е. $\angle CHQ = 90°$ и $\angle CQH = \angle CAB$. Кроме того, H движется по окружности, симметричной ω относительно BC. Поскольку Q — образ H при поворотной гомотетии с центром C, углом поворота α и коэффициентом $1/\cos\alpha$, Q также движется по некоторой окружности, обозначим ее ω_C.

Пусть O — центр ω. Так как $\angle OCB = \alpha$, центр ω_C лежит на BC. Поскольку $\angle CQS = 90^\circ$, S — диаметрально противоположная C точка окружности ω_C. Следовательно, S не зависит от A. Доказательство для R аналогично.

Поскольку O_A — точка пересечения прямых PR и QS, а $\angle RO_AS = 90^\circ + \alpha$, получаем, что O_A движется по дуге окружности, проходящей через R и S.

XIV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. Второй день. 9 класс

Ратмино, 1 августа 2018 г.

5. (Д.Прокопенко) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. BL и CN — биссектрисы треугольников ABD и ACD соответственно. Окружности, описанные вокруг треугольников ABL и CDN, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ проходит через середину дуги AD, не содержащей точку B.

   Решение. Пусть M — середина дуги AD. Тогда прямые BL и CN проходят через M. Кроме того, из равенства дуг AM и DM следует, что $\angle ALB = (\smile AB + \smile DM)/2 = \smile BAM/2 = \angle BCM$, и, значит, четырехугольник $BCNL$ — вписанный (рис.9.5). Следовательно, $ML \cdot MB = MN \cdot MC$ и M лежит на радикальной оси PQ окружностей ABL и CDN.

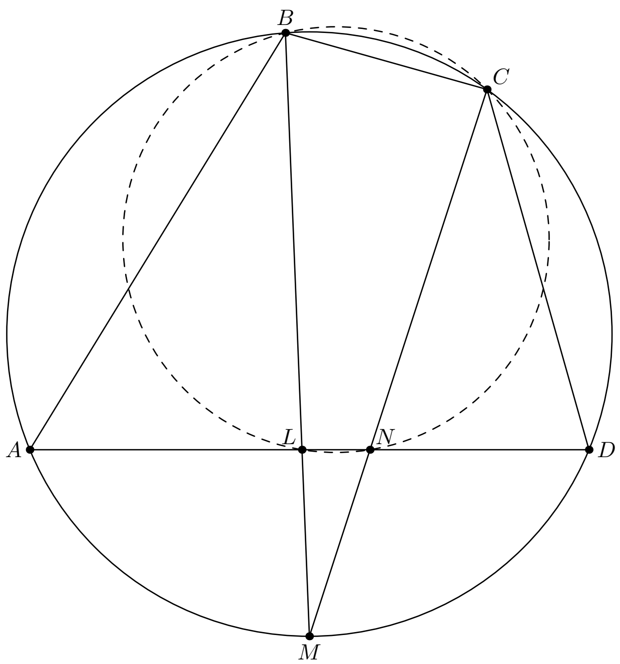


Рис. 9.5

6. (Ф.Ивлев) Дан описанный четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что точка пересечения диагоналей, центр вписанной окружности треугольника ABC и центр вневписанной окружности треугольника CDA, касающейся стороны AC, лежат на одной прямой.

Первое решение. Применяя теорему о трех колпаках к вписанной окружности $ABCD$, вписанной окружности ω треугольника ABC и вневписанной окружности Ω треугольника ACD, получаем, что общие внешние касательные к ω и Ω пересекаются на BD, а поскольку AC — одна из этих двух касательных, то пересекаются они как раз в точке пересечения диагоналей $ABCD$. Значит, эта точка лежит на линии центров ω и Ω, что и требовалось доказать.

Второе решение. Пусть L — точка пересечения диагоналей четырехугольника, I — центр его вписанной окружности, I_B — центр вписанной окружности треугольника ABC, I_D — центр вневписанной окружности треугольника ADC. Очевидно, что I_B лежит на отрезке BI, причем отношение $BI_B : BI$ равно отношению $r_B : r$ радиусов окружностей, вписанных в треугольник ABC и четырехугольник $ABCD$ соответственно. С учетом равенств $S_{ABCD} = (AB + BC + CD + DA)r/2$, $S_{ABC} = (AB + BC + CA)r_B/2$ и $S_{ABC} : S_{ABCD} = BL : BD$ получаем, что

$$\frac{I_BI}{I_BB} = \frac{DL(AB + BC + CA) - BL(AD + CD - AC)}{BL(AB + BC + CD + DA)}.$$

Аналогично для лежащей на луче DI точки I_D получаем

$$\frac{I_DI}{I_DD} = \frac{DL(AB + BC + AB) - BL(AD + CD - AC)}{DL(AB + BC + CD + DA)}.$$

Применяя теорему Менелая к треугольнику IBD, получаем утверждение задачи (рис.9.6).

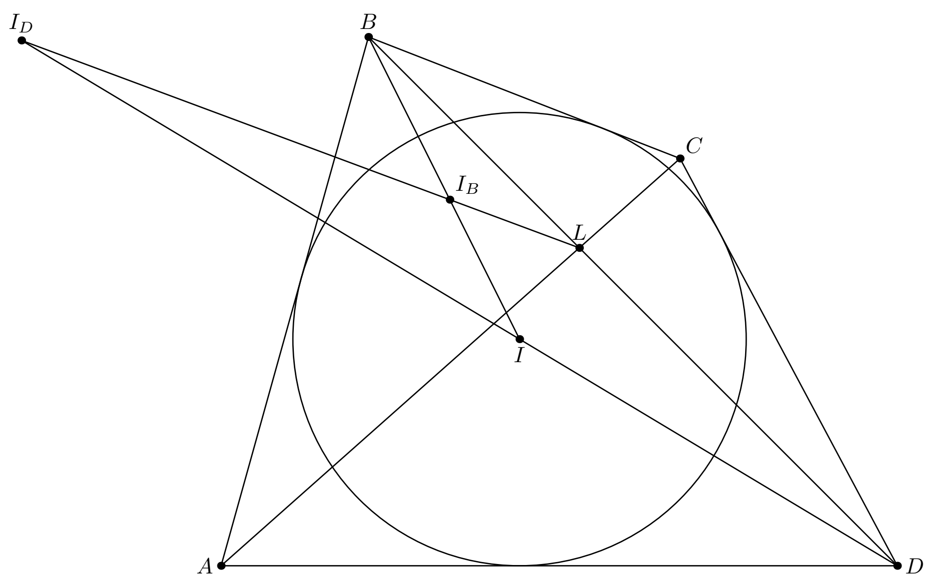


Рис. 9.6

7. (А.Куликова) К описанной окружности треугольника ABC проведены касательные в точках B и C. Лучи CC_1, BB_1, где B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB, пересекают эти касательные в точках K и L соответственно. Докажите, что $\angle BAK = \angle CAL$.

Решение. Воспользуемся **теоремой об изогоналях**.

Пусть дана прямая ℓ, проходящая через точку O. и точки A, A', B, B' и $X = AB \cap A'B'$, $X' = AB' \cap A'B$. Пусть прямые OA и OA' симметричны относительно ℓ, и пары прямых OB и OB' симметричны относительно ℓ. Тогда прямые OX и OX' также симметричны относительно ℓ,

Вернемся к задаче. Пусть M — центр тяжести треугольника ABC, P — точка пересечения касательных. Так как AP — симедиана треугольника, прямые AP и AM являются изогоналями относительно угла BAC (рис.9.7). По теореме об изогоналях прямые AK и AL тоже являются изогоналями.

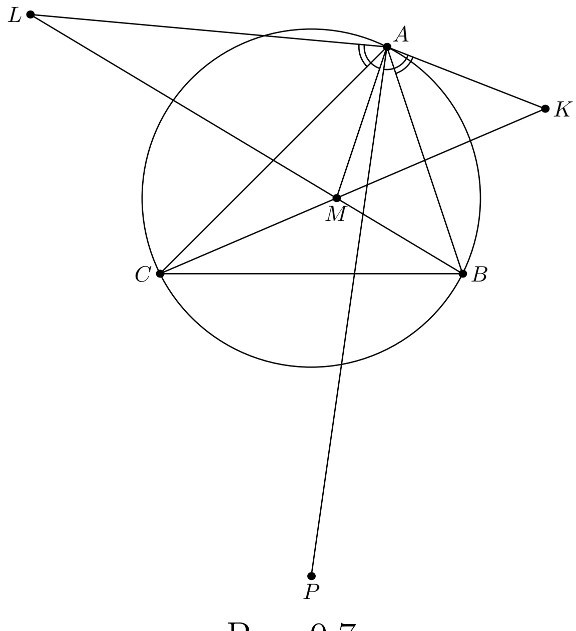
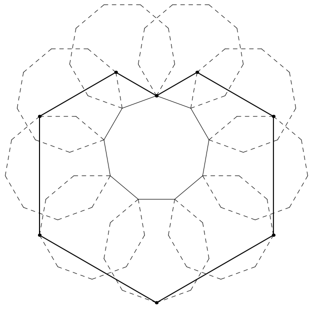


Рис. 9.7

8. (Н.Белухов) Правильный n-угольник со стороной 1 вращается вокруг другого такого же n-угольника, как показано на рисунке. Последовательные положения одной из его вершин в моменты, когда n-угольники имеют общую сторону, образуют замкнутую ломаную κ.

Докажите, что κ ограничивает площадь, равную $6A - 2B$, где A, B — площади правильных n-угольников с единичными стороной и радиусом описанной окружности соответственно.



Решение. Разобьем фигуру, ограниченную κ на треугольники, как на рис.9.8.1.

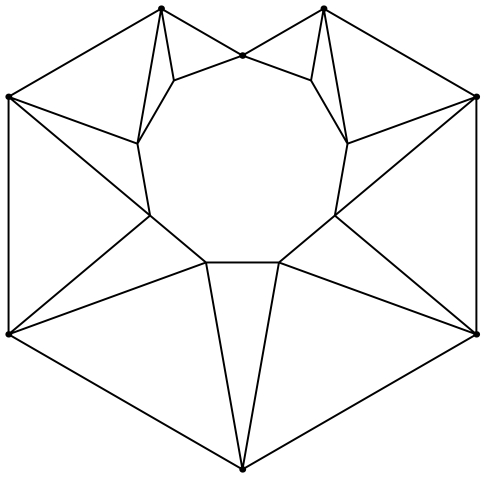


Рис.9.8.1

Треугольники, основаниями которых являются стороны $2, \ldots, n-1$ неподвижного n-угольника, образуют правильный n-угольник со сторонй 1, как показано на рис.9.8.2.

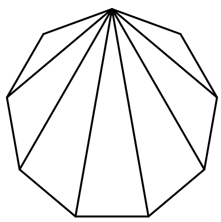


Рис.9.8.2

Разрежем два правильных n-угольника с единичным радиусом описанной окружности аналогично рис. 9.8.2, составим из полученных частей $n-1$ подоных равнобедренных треугольников с углом при основании $\frac{180^\circ}{n}$ (рис.9.8.3) и добавим к этим треугольникам оставшиеся треугольники рис. 9.8.1 (рис.9.8.4).

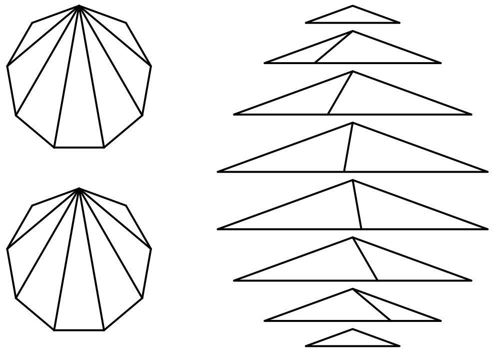


Рис.9.8.3

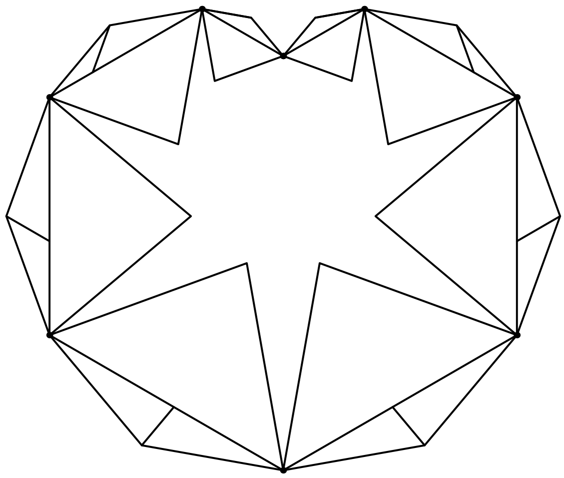


Рис.9.8.4

Разрежем каждый из $n-1$ четырехугольника рис.9.8.4 на четыре части и сложим из них два равнобедренных треугольника с углом при основании $\frac{180^\circ}{n}$ (рис.9.8.5).

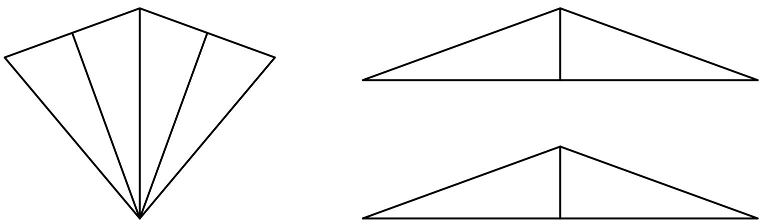


Рис.9.8.5

Наконец, соберем из этих $2n-2$ треугольников четыре правильных n-угольника со стороной 1 процессом, обратным показанному на рис. 9.8.3.

Таким образом, мы добавили два правильных n-угольника с единичным радиусом описанной окружности к фигуре, ограниченной κ, и разрезали их объединение на части, из которых складываются шесть правильных n-угольников со стороной 1.

XIV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. Первый день. 10 класс

Ратмино, 31 июля 2018 г.

1. (Д.Швецов) Высоты AH, CH остроугольного треугольника ABC пересекают внутреннюю биссектрису угла B в точках L_1, P_1, а внешнюю в точках L_2, P_2. Докажите, что ортоцентры треугольников HL_1P_1, HL_2P_2 и вершина B лежат на одной прямой.

   Первое решение. Заметим, что треугольники HL_1P_1 и HL_2P_2 — равнобедренные с углами при вершине H, равными B и $\pi - B$ соответственно. Пусть H_1, H_2 — ортоцентры этих треугольников, M_1, M_2 — середины L_1P_1, L_2P_2 соответственно. Тогда треугольники HL_2P_2 и $H_1L_1P_1$ подобны, а H_2 и H — их ортоцентры, следовательно, $HH_1 : M_2B = HH_1 : HM_1 = H_2H : H_2M_2$, что равносильно утверждению задачи (рис.10.1).

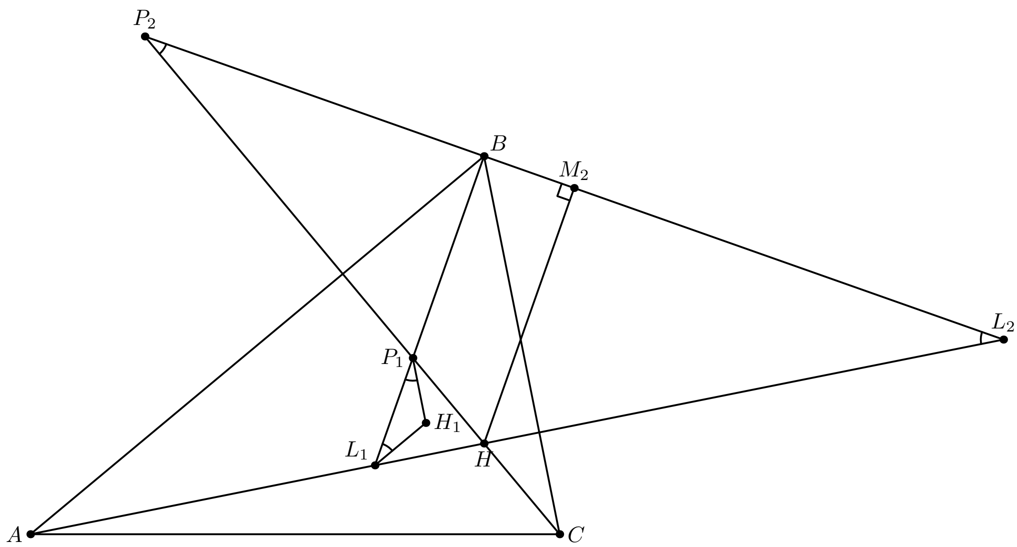


Рис. 10.1

   Второе решение. Воспользуемся следующим фактом.

   Ортоцентры четырех треугольников, образованных четырьмя прямыми общего положения, лежат на одной прямой (**прямая Обера**).

   В данном случае высоты из вершин A, C, а также внешняя и внутренняя биссектрисы угла B образуют четыре треугольника, два из которых — прямоугольные с прямым углом в вершине B. Соответственно, B является и ортоцентром этих треугольников, а значит, лежит на прямой, проходящей через ортоцентры двух других треугольников.

2. (Д.Креков) В угол с вершиной C вписана окружность ω. Рассматриваются окружности, проходящие через C, касающиеся ω внешним образом и пересекающие стороны угла в точках A и B. Докажите, что периметры всех треугольников ABC равны.

   Первое решение. Будем считать, что длина касательной из C к данной окружности равна 1. При инверсии относительно единичной окружности с центром C стороны угла и окружность остаются на месте, а точки A, B переходят в такие точки A', B', что треугольник $A'B'C$ описан около данной окружности. При этом $AC = 1/A'C$, $BC = 1/B'C$, $AB = A'B'/(A'C \cdot B'C)$. Поэтому периметр треугольника ABC равен

$$\frac{A'B' + A'C + B'C}{A'C \cdot B'C} = \frac{2p_{A'B'C} \sin \angle C}{2S_{A'B'C}} = \frac{\sin \angle C}{r_{A'B'C}}.$$

   Но радиус вписанной окружности треугольника $A'B'C$ не зависит от точек A, B.

   Второе решение. Так как окружность ω является полувневписанной для треугольника ABC, центр вневписанной окружности этого треугольника совпадает с серединой отрезка между точками касания ω со сторонами данного угла, т.е не зависит от треугольника. Следовательно, точки касания внеспианной окружности со сторонами угла, а значит и периметр треугольника также постоянны.

3. (Ф.Нилов) Дан вписанный n-угольник. Оказалось что середины всех его сторон лежат на одной окружности. Стороны n-угольника отсекают от этой окружности n дуг, лежащих вне n-угольника. Докажите, что эти дуги можно покрасить в красный и синий цвет так, чтобы сумма длин красных дуг равнялась сумме длин синих.

   Решение. Пусть M_1, M_2 — середины сторон A_1A_2, A_2A_3 многоугольника $A_1 \dots A_n$, вписанного в окружность с центром O, H_1, H_2 — вторые точки пересечения этих сторон с окружностью, проходящей через середины сторон многоугольника. Тогда сумма ориентированных дуг $\smile M_1H_1 + \smile M_2H_2 = \smile M_1H_2 + \smile M_2H_1 = 2(\angle A_2M_2M_1 + \angle A_2M_1M_2) = 2(\angle OM_2M_1 + \angle OM_1M_2) = 2(\angle OA_2M_1 + \angle OA_2M_2)$ (последнее равенство следует из вписанности четырехугольника $OM_1A_2M_2$). Просуммировав такие равенства, получим, что сумма ориентированных дуг M_iH_i равна нулю, следовательно, раскраска дуги в соответствии с их ориентацией — искомая.

Примечание. Это же рассуждение можно провести иначе. Проекции центра O описанной окружности на стороны многоугольника — середины сторон M_i — лежат на одной окружности. Следовательно, вторые точки H_i пересечения сторон с окружностью являются проекциями на стороны некоторой точки H, причем лучи A_iO и A_iH симметричны относительно биссектрисы угла $A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Теперь нетрудно получить, что ориентированный угол между прямыми M_1M_2 и H_1H_2 равен ориентированному углу HA_2O, а сумма всех таких углов равна нулю.

4. (Н.Белухов) На плоскости дано конечное множество S точек, окрашенных в красный и зеленый цвета. Назовем множество *разделимым*, если для него найдется такой треугольник, что все точки одного цвета лежат строго внутри, а все точки другого — строго вне треугольника. Известно, что любые 1000 точек из S образуют разделимое множество. Обязательно ли все множество S разделимо?

   Ответ. Нет.

   Решение. Будем называть *красно-разделимым* множество, для которого существует такой треугольник δ, что все красные точки лежат строго внутри δ, а все зеленые — строго снаружи.

   Пусть A — конечное множество красных и зеленых точек общего положения, P — выпуклая оболочка некоторых красных точек из A, Q — подмножество зеленых точек A. Выясним, при каких условиях существует треугольник δ, разделяющий P и Q.

   Без ограничения общности можно считать стороны δ опорными прямыми для P.

   зафиксируем некоторую окружность c. Каждой опорной прямой l множества P сопоставим точку $T(l)$ на c такую, что касательная $t(T)$ к c в точке $T(l)$ параллельна l и P лежит по ту же сторону от l, что c от $t(T)$.

   Пусть X — произвольная точка Q, $l_1(X)$ и $l_2(X)$ — опорные прямые к P, проходящие через X (если X лежит внутри P, то P нельзя отделить от Q), $a(X)$ дуга c, ограниченная точками $T(l_1(X))$ и $T(l_2(X))$.

   Если разделяющий треугольник δ существует, три точки c, соответствующие его сторонам, "протыкают" все дуги $a(X)$, где $X \in Q$. С другой стороны, если существуют три точки c, протыкающие все дуги $a(X)$ и образующие остроугольный треугольник, то образованный соответствующими прямыми треугольник δ отделяет P от Q.

Таким образом, задачу можно переформулировать: пусть любая достаточно большая подсистема системы дуг c протыкается тремя точками, верно ли, что и вся система протыкается тремя точками.

Построим контрпример: систему равных дуг, такую, что любая точка протыкает почти треть всех дуг.

Пусть n — натуральное число, T_1, T_2, $\ldots$, T_{3n+1} вершины правильного $(3n+1)$-угольника, вписанного c, $T_{i+3n+1} \equiv T_i$. Для каждого i пусть a_i — открытая дуга T_iT_{i+n}. Тогда любая точка c протыкает максимум n дуг, следовательно, проткнуть все дуги тремя точками невозможно. С другой стороны, если удалить дугу T_1T_{n+1}, все оставшиеся дуги можно проткнуть серединами дуг $T_{n+1}T_{n+2}$, $T_{2n+1}T_{2n+2}$ и $T_{3n+1}T_1$.

Построим теперь контрпример к исходной задаче. Возьмем правильный 3001-угольник $Y_1Y_2\ldots Y_{3001}$, вписанный в окружность k с центром O, $Y_{i+3001} \equiv Y_i$. Для каждого i обозначим через X_i точку пересечения касательных к k в точках Y_i и Y_{i+1000}. Небольшим перемещением точек X_i в направлении O получим множество общего положения. Покрасим все X_i в зеленый цвет, а Y_i — в красный, и обозначим полученное множество через A.

Так как выпуклая оболочка точек X_i содержит Y_i, множество A может быть только красно-разделимым. Но из приведенного выше рассуждения следует, что это не так.

Если удалить любую из точек X_i или Y_i, то, как показано выше, A станет красно-разделимым и, значит, разделимым.

Примечание. Назовем конечное множество S красных и зеленых точек *линейно-разделимым*, если существует такая прямая l, что точки разных цветов лежат строго по разные стороны от l. Если любые четыре точки множества A образуют линейно-разделимое множество, то и все множество линейно-разделимо.

Назовем конечное множеств S красных и зеленых точек *окружностно-разделимым*, если существует такая окружность c, что все точки одного цвета лежат строго внутри c, а все точки другого — строго снаружи. Если любые пять точек множества A образуют окружностно-разделимое множество, то и все множество A окружностно-разделимо.

XIV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. Второй день. 10 класс

Ратмино, 1 августа 2018 г.

5. (А.Полянский) В треугольнике ABC через центр I вписанной окружности w провели прямую, параллельную стороне BC, до пересечения с вписанной окружностью в точках A_B и A_C (A_B находится в той же полуплоскости относительно прямой AI, что и точка B). После этого нашли точку пересечения прямых BA_B и CA_C и обозначили её через A_1. Аналогично построили точки B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

   Первое решение. Так как отрезки A_BA_C и BC гомотетичны относительно точки A_1, прямая A_1I проходит через середину M стороны BC, причем $A_1I : A_1M = 2r : BC$. Поэтому расстояние от A_1 до прямой AC равно $r(BC - h_b)/(BC - 2r)$, где h_b — длина высоты из вершины B. Аналогично получаем, что расстояние от A_1 до AB равно $r(BC - h_c)/(BC - 2r)$. Следовательно, $\sin\angle A_1AC : \sin\angle A_1AB = (1 - \sin\angle C) : (1 - \sin\angle B)$. Написав аналогичные равенства для точек B_1, C_1 и применив теорему Чевы, получим утверждение задачи.

   Второе решение. Поскольку $\angle A_BIB = \angle IBC = \angle IBA = \angle C_BIB$, точки A_B и C_B симметричны относительно биссектрисы угла B (рис.10.5).

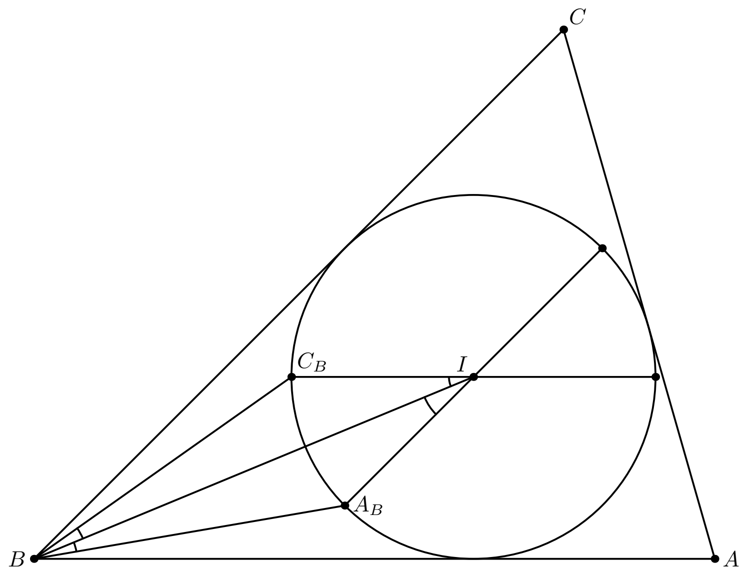


Рис. 10.5

По теореме Чевы

$$\frac{\sin\angle CAA_1}{\sin\angle BAA_1}\frac{\sin\angle ABA_B}{\sin\angle CBA_B}\frac{\sin\angle BCA_C}{\sin\angle ACA_C}=1.$$

Перемножив это и два аналогичных равенства, получим утверждение задачи.

6. (М.Кунгожин) В окружности ω, описанной около треугольника ABC, хорда KL проходит через середину M отрезка AB и перпендикулярна ей. Некоторая окружность проходит через точки L и M и пересекает отрезок CK в точках P и Q (Q лежит на отрезке KP). Пусть LQ пересекает описанную окружность треугольника KMQ в точке R. Докажите, что четырехугольник $APBR$ вписанный.

Решение. Заметим, что $\angle PML=\angle PQL=\angle KQR=\angle KMR$. Кроме того, $\angle PLM=\angle KQM=\angle KRM$, следовательно, треугольники PLM и KRM подобны, т.е. $PM\cdot RM=LM\cdot KM=AM^2$ (рис.10.6).

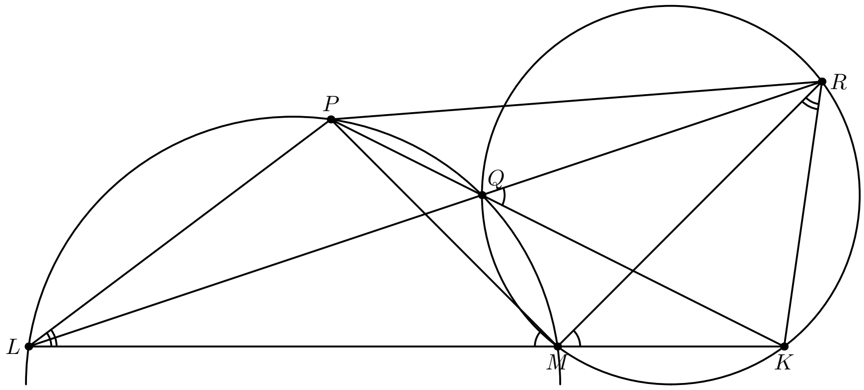


Рис. 10.6

Пусть P' — точка, симметричная P относительно KL. Точки A, B, P, P' лежат на одной окружности, так как являются вершинами равнобедренной трапеции. Поскольку P', M, R лежат на одной прямой и $P'M\cdot RM=AM\cdot BM$, точка R также лежит на этой окружности.

7. (Н.Белухов) Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности радиуса 1. Найдите наибольшее возможное значение величины $\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{BD^2}$.

Первое решение. Пусть $AC\cap BD=O$. Будем считать, что $\angle AOB\geq 90^\circ$. Пусть E— четвертая вершина параллелограмма $BECD$ (рис.10.7).

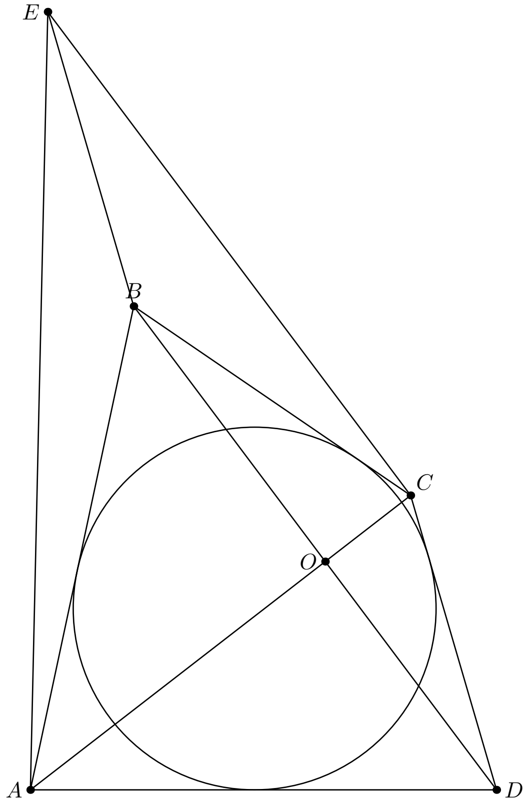


Рис. 10.7

Мы имеем

$$AC \cdot BD \geq 2S_{ABCD} = r \cdot P_{ABCD} = 2r \cdot (AB + CD).$$

Кроме того,

$$AB + CD = AB + BE \geq AE$$

и (так как $\angle ECA \geq 90°$)

$$AE^2 \geq AC^2 + CE^2 = AC^2 + BD^2.$$

Отсюда получаем

$$AC^2 \cdot BD^2 \geq 4r^2 \cdot (AC^2 + BD^2) \Rightarrow \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BD^2} \leq \frac{1}{4r^2}.$$

Равенство достигается при $AC \cdot BD = 2S_{ABCD} \Leftrightarrow AC \perp BD$ и $AB + BE = AE \Leftrightarrow AB \| CD$, т.е. когда $ABCD$ — ромб.

Второе решение. Будем деформировать $ABCD$, сохраняя вписанную окружность и уменьшая диагонали.

Пусть окружность ω с центром I вписана в $ABCD$. Зафиксируем ω, прямую l. проходящую через A и C, и параллельную ей прямую m, проходящую через B. Посмотрим, как меняется длина AC при перемещении B по m.

Пусть касательная n к ω, лежащая между l и m и параллельная им, пересекает AB и BC в точках P и Q, окружность ω' с центром I' и радиусом r' вписана в треугольник PBQ.

При изменении B коэффициент подобия треугольников PBQ и ABC остается постоянным. Поэтому отношения $PQ : AC$, $r' : r$, а значит и r' также постоянны.

Поскольку PQ равно общей внешней касательной к ω' и ω, а r' и r фиксированы, длина PQ минимальна при кратчайшем расстоянии II', т.е. при $BI \perp l$. Так как $PQ : AC$ фиксировано длина AC минимальна в этом же случае.

Передвинем B вдоль m в точку B_1, для которой $IB_1 \perp l$, затем передвинем IB_1 в направлении I до точки B_2, для которой длина A_2C_2 равна исходной длине AC. Аналогично поступим с точкой D. Тогда $A_2B_2C_2D_2$ — четырехугольник, описанный вокруг ω и симметричный относительно B_2D_2, причем $A_2C_2 = AC$ и $B_2D_2 \leq BD$.

Поступив аналогично с A_2 и C_2, получим описанный около ω ромб $A_3B_3C_3D_3$, в котором $A_3C_3 \leq AC$ и $B_3D_3 \leq BD$. Для него

$$\frac{1}{A_3C_3^2} + \frac{1}{B_3D_3^2} = \frac{1}{4r^2}$$

, причем, если $A_3B_3C_3D_3 \neq ABCD$, то хотя бы одно из неравенств $A_3C_3 \leq AC$ и $B_3D_3 \leq BD$ — строгое.

8. (А.Заславский) Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$. Прямые AB и $A'B'$ пересекаются в точке C_1, а параллельные им прямые, проходящие через C и C', соответственно, в точке C_2. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

   Первое решение. Сделаем полярное преобразование с некоторым центром O. Получим два треугольника (точки переобозначены заново) $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ с пересекающимися в O чевианами A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1' в первом треугольнике и A_2A_2', B_2B_2', C_2C_2' во втором. Пусть P_a — точка пересечения A_1A_2 с $A_1'A_2'$, P_b и P_c определены аналогично. Докажем, что P_a, P_b и P_c лежат на одной прямой.

Сделаем проективное преобразование, переводящее прямую P_aP_b в бесконечно удаленную. Тогда $OA_1' : A_1'A_1 = OA_2' : A_2'A_2$, $OB_1' : B_1'B_1 = OB_2' : B_2'B_2$. Но $OA_1'/A_1'A_1 + OB_1'/B_1'B_1 + OC_1'/C_1'C_1 = S_{OB_1C_1}/S_{A_1B_1C_1} + S_{OC_1A_1}/S_{A_1B_1C_1} + S_{OA_1B_1}/S_{A_1B_1C_1} = 1$ (площади ориентированные) и аналогично для второго треугольника, значит $OC_1' : C_1'C_1 = OC_2' : C_2'C_2$, т.е точка P_c тоже бесконечно удаленная.

Второе решение. Заметим, что для любой точки X прямой C_1C_2 выполнено равенство (площади ориентированные)

$$S_{XAB}S_{A'B'C'} = S_{XA'B'}S_{ABC}.$$

Для доказательства достаточно заметить справедливость этого равенства для точек C_1, C_2. Нетрудно убедиться также, что это равенство выполняется не для всех точек плоскости, следовательно, оно задает прямую C_1C_2. Аналогично пишутся уравнения прямых A_1A_2 и B_1B_2. Очевидно, что точка, удовлетворяющая двум из этих уравнений, удовлетворяет и третьему.