Тринадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Тринадцатой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

В олимпиаде могут участвовать школьники последних четырех классов средней школы. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов российской школы (на момент проведения олимпиады) она предназначена. В тех странах, где количество классов в школе другое, ученики последнего класса решают задачи 11 класса, ученики предпоследнего класса — задачи 10 класса и т.д. Можно решать задачи и для более старших классов (решенные задачи для более младших классов при подведении итогов не учитываются).

Полное решение любой задачи или любого ее пункта, если задача имеет пункты, оценивается в 7 баллов. Неполное решение, в зависимости от степени продвижения, оценивается от 1 до 6 баллов. При отсутствии заметного продвижения ставится 0 баллов. Результатом участника является сумма баллов по всем задачам.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая отчетливые чертежи достаточного размера. *Если в задаче требуется дать ответ на некоторый вопрос (например, найти значение какой-нибудь величины), то этот ответ следует привести перед решением.* Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении каким-то фактом из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и не обязательно) указать в работе, какие задачи Вам понравились. Нам будет интересно узнать Ваше мнение.

Решения задач на русском или английском языке должны быть представлены в электронной форме не раньше 8 января и не позднее 1 апреля 2017 года. Для этого нужно зайти на сайт **http://geometry.ru/olimp/olimpsharygin.php** и следовать приведенным там инструкциям.

Внимание: решение каждой задачи должно содержаться в отдельном файле формата pdf, doc или jpg. Желательно выполнять работу на компьютере или сканировать, а не фотографировать. *В последних двух случаях необходимо убедиться, что файл хорошо читается.*

При возникновении технических проблем с загрузкой работы обращайтесь по адресу **geomolymp@mccme.ru. (НЕ присылайте работы на этот адрес!)**

Победители заочного тура — учащиеся 8–10 классов будут приглашены на финальный тур, который состоится летом 2017 года под Москвой. Победители заочного тура — выпускники школ получат грамоты оргкомитета олимпиады. Списки победителей будут опубликованы на сайте **www.geometry.ru** не позднее 1 июня 2017 г. Свои результаты Вы сможете узнать в это же время по адресу **geomolymp@mccme.ru**.

1. (8) Нарисуйте на клетчатой бумаге четырехугольник с вершинами в узлах, длины сторон которого — различные простые числа.

2. (8) Окружность отсекает от прямоугольника $ABCD$ четыре прямоугольных треугольника, середины гипотенуз которых A_0, B_0, C_0 и D_0 соответственно. Докажите, что отрезки A_0C_0 и B_0D_0 равны.

3. (8) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC; H_B, H_C — ортоцентры треугольников ACI и ABI соответственно; K — точка касания вписанной окружности треугольника со стороной BC. Докажите, что точки H_B, H_C и K лежат на одной прямой.

4. (8) Дан треугольник ABC. На стороне AB как на основании построен во внешнюю сторону равнобедренный треугольник ABC' с углом при вершине $120°$, а на стороне AC построен во внутреннюю сторону правильный треугольник ACB'. Точка K — середина отрезка BB'. Найдите углы треугольника KCC'.

5. На плоскости дан отрезок AB. Рассмотрим всевозможные остроугольные треугольники со стороной AB. Найдите геометрическое место

   а) (8) вершин их наибольших углов;

   б) (8–9) их центров вписанных окружностей.

6. (8–9) Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AC = BD = AD$; точки E и F — середины AB и CD соответственно; O — точка пересечения диагоналей четырехугольника. Докажите, что EF проходит через точки касания вписанной окружности треугольника AOD с его сторонами AO и OD.

7. (8–9) В треугольнике центр описанной окружности лежит на вписанной окружности. Докажите, что отношение наибольшей стороны треугольника к наименьшей меньше двух.

8. (8–9) Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD. Центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой BD. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABD лежит на прямой AC.

9. (8–9) В прямоугольном треугольнике ABC точка C_0 — середина гипотенузы AB; AA_1, BB_1 — биссектрисы; I — центр вписанной окружности. Докажите, что прямые C_0I и A_1B_1 пересекаются на высоте из вершины C.

10. (8–10) На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки K и L соответственно так, что $\angle AKD = \angle CLD$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BKL, равноудален от A и C.

11. (8–11) На плоскости отмечено несколько точек, причем не все эти точки лежат на одной прямой. Вокруг каждого треугольника с вершинами в отмеченных точках описана окружность. Могут ли центры всех этих окружностей оказаться отмеченными точками?

12. (9–10) Пусть AA_1, CC_1 — высоты треугольника ABC, B_0 – точка пересечения высоты из вершины B и описанной окружности треугольника ABC, Q – вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC и $A_1C_1B_0$. Докажите, что BQ — симедиана треугольника ABC.

13. (9–11) Две окружности пересекаются в точках A и B. Третья окружность касается их обеих и пересекает прямую AB в точках C и D. Докажите, что касательные к ней в этих точках параллельны общим касательным к двум первым окружностям.

14. (9–11) На окружности с диаметром AD и центром O выбраны точки B и C по одну сторону от этого диаметра. Около треугольников ABO и CDO описаны окружности, пересекающие отрезок BC в точках F и E. Докажите, что $R^2 = AF \cdot DE$, где R — радиус окружности

15. (9–11) В остроугольный треугольник ABC вписана окружность с центром I, касающаяся сторон AB, BC и CA в точках D, E и F соответственно. В четырехугольники $ADIF$ и $BDIE$ вписаны окружности с центрами J_1 и J_2 соответственно. Прямые J_1J_2 и AB пересекаются в точке M. Докажите. что $CD \perp IM$.

16. (9–11) Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и B пересекаются в точке D. Окружность, проходящая через проекции D на прямые BC, CA, AB, повторно пересекает AB в точке C'. Аналогично строятся точки A', B'. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

17. (9–11) Внутри остроугольного треугольника ABC постройте (с помощью циркуля и линейки) такую точку K, что $\angle KBA = 2\angle KAB$ и $\angle KBC = 2\angle KCB$.

18. (9–11) Пусть L — точка пересечения симедиан остроугольного треугольника ABC, а BH — его высота. Известно, что $\angle ALH = 180^\circ - 2\angle A$. Докажите, что $\angle CLH = 180^\circ - 2\angle C$.

19. (10–11) В треугольнике ABC провели чевианы AA', BB' и CC', которые пересекаются в точке P. Описанная окружность треугольника $PA'B'$ пересекает прямые AC и BC в точках M и N соответственно, а описанные окружности треугольников $PC'B'$ и $PA'C'$ повторно пересекают AC и BC соответственно в точках K и L. Проведем через середины отрезков MN и KL прямую c. Прямые a и b определяются аналогично. Докажите, что прямые a, b и c пересекаются в одной точке.

20. (10–11) Даны прямоугольный треугольник ABC и две взаимно перпендикулярные прямые x и y, проходящие через вершину прямого угла A. Для точки X, движущейся по прямой x, определим y_B как образ прямой y при симметрии относительно XB, а y_C — как образ прямой y при симметрии относительно XC. Пусть y_b и y_c пересекаются в точке Y. Найдите геометрическое место точек Y (для несовпадающих y_b и y_c).

21. (10–11) Выпуклый шестиугольник описан около окружности радиуса 1. Рассмотрим три отрезка, соединяющие середины противоположных сторон шестиугольника. Для какого наибольшего r можно утверждать, что хотя бы один из этих отрезков не короче r?

22. (10–11) На диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$ взяли произвольную точку P и из нее опустили перпендикуляры PK, PL, PM, PN, PO на AB, BC, CD, DA, BD соответственно. Докажите, что расстояние от P до KN равно расстоянию от O до ML.

23. (10–11) В треугольнике ABC прямая m касается вписанной окружности. Прямые, проходящие через центр вписанной окружности I и перпендикулярные AI, BI, CI, пересекают прямую m в точках A', B', C' соответственно. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

24. (11) Даны два тетраэдра. Ни у одного из них нет двух подобных граней, но каждая грань первого тетраэдра подобна какой-то грани второго. Обязательно ли эти тетраэдры подобны?