XII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. Первый день. 8 класс

Ратмино, 31 июля 2016 г.

1. (Ю.Блинков) В треугольнике ABC высота AH делит медиану BM пополам. Докажите, что из медиан треугольника ABM можно составить прямоугольный треугольник.

   Решение. Пусть K — точка пересечения AH и BM, L — середина AM, N и P — проекции L и M соответственно на BC (рис.8.1). Так как K — середина BM, то KH — средняя линия треугольника BMP, т.е. $PH = HB$. С другой стороны, по теореме Фалеса $CP = PH$ и $PN = NH$, следовательно, N — середина BC. Поэтому NK является средней линией треугольника BMC, т.е. $NK \parallel AC$ и $ALNK$ — параллелограмм. Таким образом $LN = AK$. Кроме того, медиана треугольника AMB из вершины M является средней линией треугольника ABC и, значит, равна BN. Следовательно стороны прямоугольного треугольника BNL равны медианам треугольника ABM.

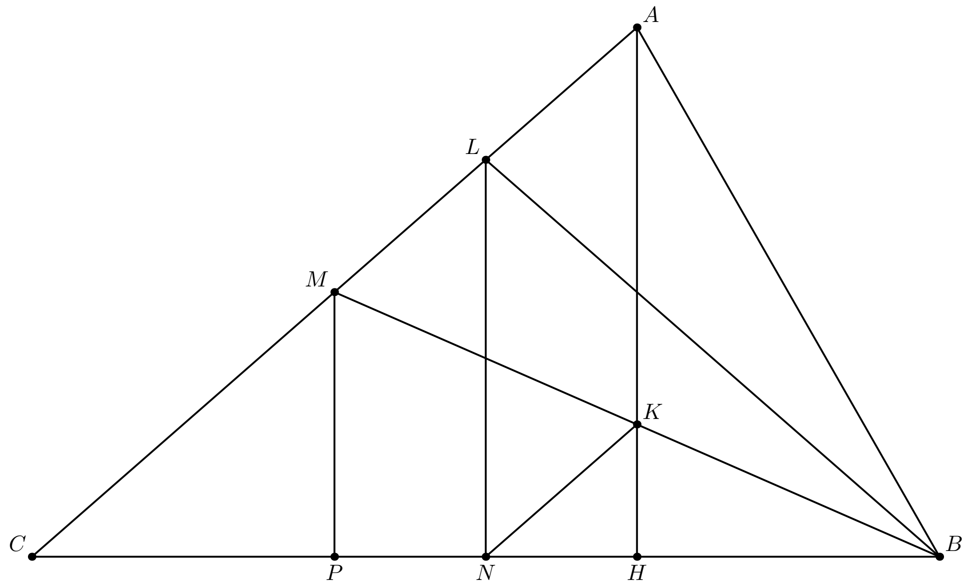

Рис. 8.1

2. (Е.Бакаев) Описанная окружность треугольника ABC пересекает стороны AD и CD параллелограмма $ABCD$ в точках K и L. Пусть M — середина дуги KL, не содержащей точку B. Докажите, что $DM \perp AC$.

   Первое решение. Из условия следует, что четырехугольник $ALCB$ — равнобедренная трапеция, т.е $AL = AD$ (рис.8.2). При этом в равнобедренном треугольнике ALD AM является биссектрисой, а значит, и высотой. Поэтому $AM \perp CD$. Аналогично $CM \perp AD$. Следовательно, M — ортоцентр треугольника ACD и $DM \perp AC$.

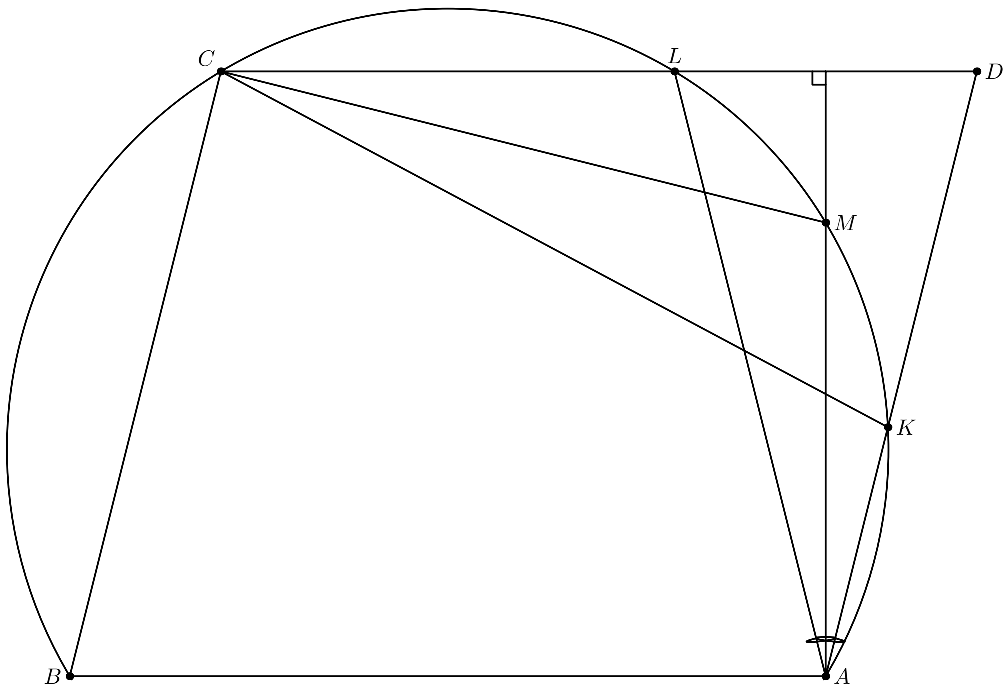

Рис. 8.2

Второе решение. Рассмотрим дуги окружности, описанной около треугольника ABC. Из равенства вписанных углов BAK и BCL следует равенство дуг BAK и BCL. Также равны дуги LM и KM, а в совокупности эти 4 дуги дают всю окружность, значит BM — диаметр. Тогда треугольники BAM и BCM прямоугольные, значит $BA^2 + AM^2 = BM^2 = BC^2 + CM^2$. Преобразуем в вид $BA^2 - BC^2 = CM^2 - AM^2$, затем изменим левую часть, используя равенство противоположных сторон параллелограмма: $CD^2 - AD^2 = CM^2 - AM^2$. По принципу Карно это утверждение равносильно перпендикулярности прямых DM и AC.

3. (Д.Прокопенко) Даны трапеция $ABCD$ и перпендикулярная ее основаниям AD и BC прямая l. По l движется точка X. Перпендикуляры из A на BX и из D на CX пересекаются в точке Y. Найдите ГМТ Y.

Ответ. Прямая l', перпендикулярная основаниям трапеции и делящая отрезок AD в таком же отношении, в каком l делит CB.

Первое решение. Пусть XU, YV — высоты треугольников BXC, AYD (рис.8.3.1). Тогда $\angle YAV = \angle BXU$ и $\angle YAD = \angle CXU$ как углы с перпендикулярными сторонами. Следовательно, треугольник AVY подобен треугольнику XUB, а треугольник DVY — треугольнику XUC. Отсюда получаем, что отношение $AV : VD = CU : UB$ не зависит от точки X, т.е. Y лежит на прямой l'. Легко видеть, что все точки этой прямой принадлежат искомому ГМТ.

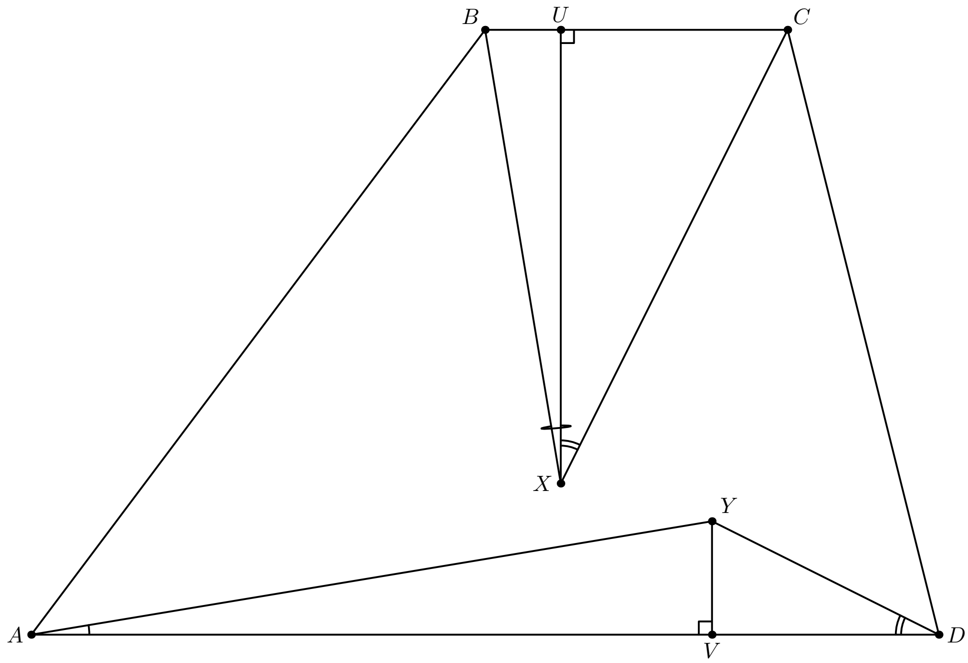

Рис. 8.3.1

Второе решение. Геометрическое место точек, разность квадратов расстояний от которых до концов отрезка постоянна, есть прямая, перпендикулярная данному отрезку. Поэтому достаточно доказать, что разность $YB^2 - YC^2$ постоянна.

Так как прямые BX и AY перпендикулярны, то $YB^2 - AB^2 = YX^2 - AX^2$. Аналогично, $DC^2 - YC^2 = DX^2 - YX^2$. Сложив эти равенства, получим, что $YB^2 - YC^2 = (DX^2 - AX^2) + (AB^2 - DC^2)$. Разность в первой скобке постоянна по определению точки X. Следовательно, все точки Y лежат на прямой, перпендикулярной BC.

Третье решение. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке P. Рассмотрим гомотетию с центром в точке P, переводящую отрезок BC в отрезок AD. Пусть X' — образ X. Прямые BX и CX переходят в параллельные прямые AX' и DX'. Следовательно, углы $X'AY$ и $X'DY$ — прямые, а четырехугольник $X'AYD$ — вписанный. При этом точка X' движется по фиксированной прямой l', параллельной l.

Пусть Q, R — проекции точек X', Y на AD (рис.8.3.2). Поскольку середина диаметра $X'Y$ проецируется в середину хорды AD, по теореме Фалеса получаем, что $AQ = DR$. Точка Q фиксирована, следовательно, Y движется по прямой, проходящей через точку R и перпендикулярной основаниям.

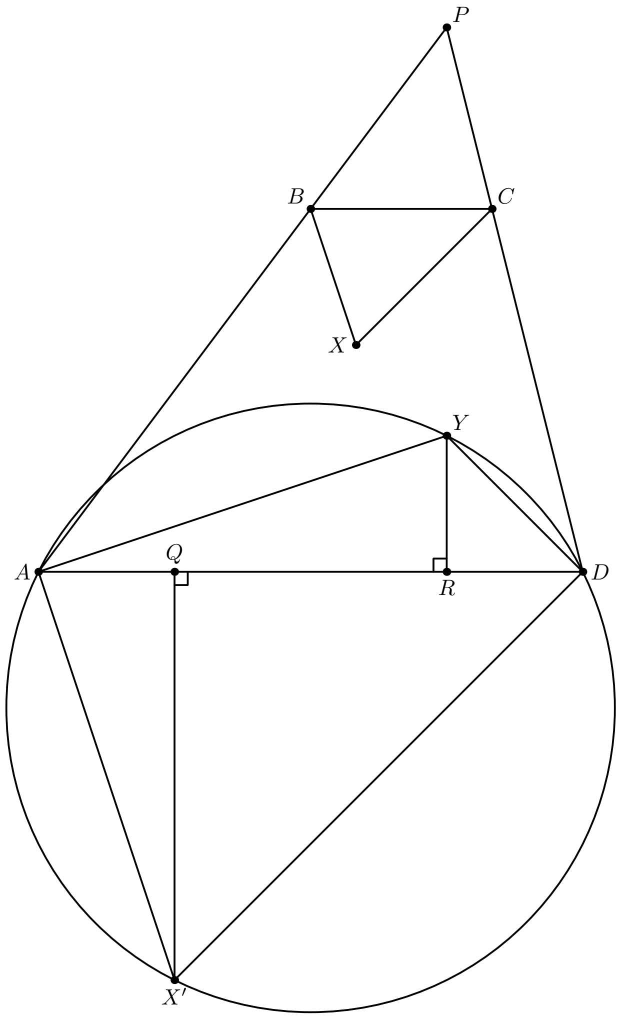

Рис. 8.3.2

4. (Н.Белухов) Можно ли разрезать правильный десятиугольник по нескольким диагоналям и сложить из получившихся кусков два правильных многоугольника?

   Ответ. Да, см. рис.8.4

   Примечание. Приведенный способ применим к любому правильному $2n$-угольнику, где $n \geq 3$.

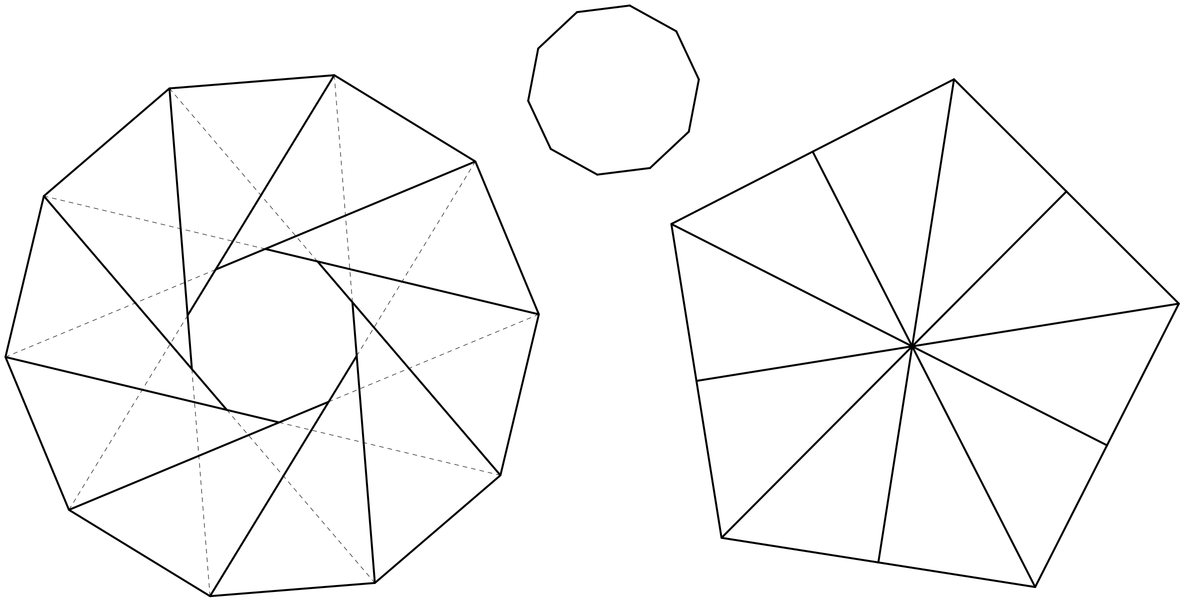

Рис.8.4

XII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. Второй день. 8 класс

Ратмино, 1 августа 2016 г.

5. (А.Хачатурян) На прозрачном листе бумаги отмечены три точки. Докажите, что лист можно согнуть по некоторой прямой так, чтобы эти точки оказались в вершинах равностороннего треугольника.

   Решение. Пусть A, B, C — данные точки, AB — наименьшая сторона треугольника ABC, D — вершина равностороннего треугольника ABD, l — серединный перпендикуляр к отрезку CD. Так как $AD = AB \le AC$ и $BD = AB \le BC$, точки A, B лежат по ту же сторону от l, что и точка D. Поэтому, если перегнуть лист по прямой l, то точки A и B останутся на месте, а точка C совместится с D.

6. (Е.Бакаев) В треугольнике ABC $\angle A = 60°$, точки M и N на сторонах AB и AC соответственно таковы, что центр описанной окружности треугольника ABC делит отрезок MN пополам. Найдите отношение $AN : MB$.

   Ответ. 2.

   Первое решение. Пусть P, Q — проекции соответственно точки N и центра O описанной окружности на AB (рис.8.6). Тогда по условию $MQ = QP$. С другой стороны, Q — середина AB, следовательно, $BM = AP$. Но в прямоугольном треугольнике APN $\angle A = 60°$. Значит, $BM = AP = AN/2$.

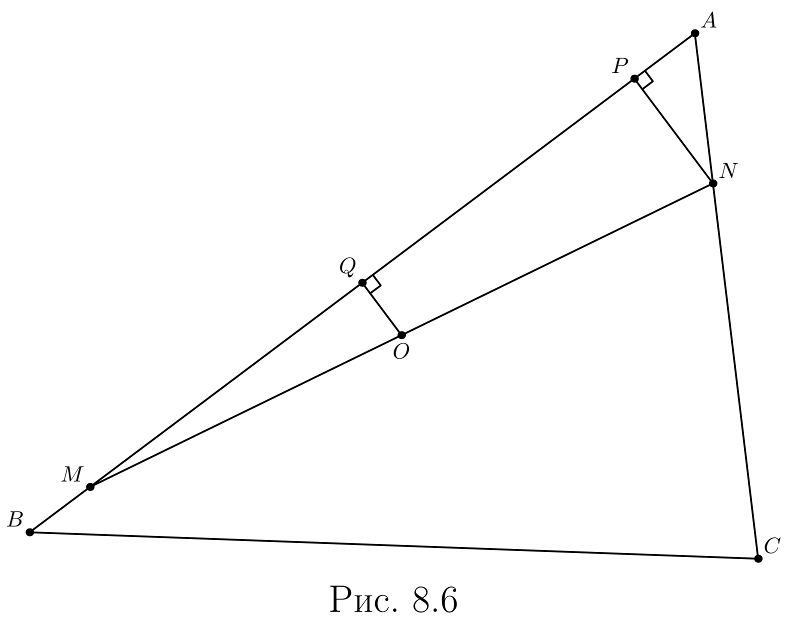

Рис. 8.6

Второе решение. Пусть P — точка на описанной окружности треугольника ABC, диаметрально противоположная точке A. Точка O делит пополам отрезки AP и MN, значит $AMPN$ — параллелограмм. Углы BAC и BMP равны, т.к. $AC \parallel MP$. Угол ABP прямой, так как опирается на диаметр AP. Итак, треугольник BMP прямоугольный с углом $60°$, значит отношение его сторон $MP : MB$ равно 2. Отрезки MP и AN равны как стороны параллелограмма, откуда следует, что искомое отношение $AN : MB$ равно 2.

7. (А.Заславский) Диагонали четырехугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P, а серединные перпендикуляры к сторонам BC и AD — в точке Q. Найдите угол POQ.

   Ответ. $90°$.

   Решение. Так как $PA = PB$ и $PC = PD$, треугольники PAC и PBD равны по трем сторонам (рис.8.7). Следовательно, точка P равноудалена от прямых AC и BD, т.е. лежит на биссектрисе одного из образованных этими прямыми углов. Аналогично точка Q лежит на биссектрисе одного из этих углов. Докажем, что эти точки лежат на разных биссектрисах. Биссектриса угла AOB пересекает серединный перпендикуляр к AB в середине дуги AB описанной окружности треугольника AOB. Эта же биссектриса пересекает серединный перпендикуляр к CD в середине дуги CD описанной окружности треугольника COD. Эти точки лежат по разные стороны от O, значит P лежит на биссектрисе угла AOD. Аналогично Q лежит на биссектрисе угла AOB. Очевидно, что эти биссектрисы перпендикулярны.

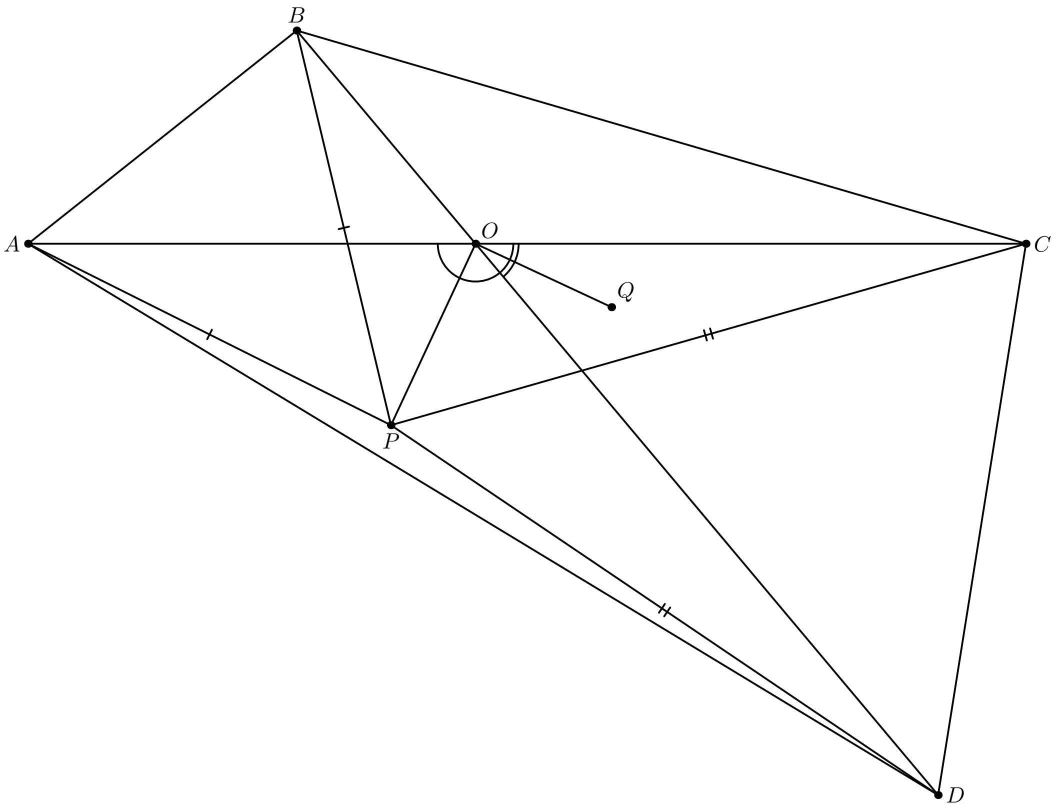

Рис. 8.7

8. (В.Протасов) В точке X сидит преступник, а три полицейских, находящихся в точках A, B и C, блокируют его, т.е., точка X лежит внутри треугольника ABC. Новый полицейский сменяет одного из них следующим образом: он занимает точку, равноудаленную от всех трех полицейских, после чего один из троих уходит, и оставшаяся тройка по-прежнему блокирует преступника. Так происходит каждый вечер. Может ли случиться, что через какое-то время полицейские вновь займут точки A, B и C (известно, что точка X ни разу не попала на сторону треугольника)?

Ответ. Нет.

Первое решение. Очевидно, что в первый вечер полицейские окажутся в вершинах равнобедренного треугольника и в дальнейшем это условие будет всегда выполнено. Поэтому можно считать, что в начале $AC = BC$. Пусть O, R — центр и радиус описанной окружности треугольника ABC. Тогда, так как $OC \perp AB$, а X лежит внутри треугольника ABC, то проекция X на высоту CD треугольника лежит между C и D. Поэтому $XC^2 - XO^2 < CD^2 - DO^2 = AC^2 - AO^2$ или $XC^2 - AC^2 < XO^2 - R^2$. Аналогично получаем, что $O'X^2 - R'^2 < OX^2 - R^2$, где O', R' — центр и радиус описанной окружности нового треугольника, образованного полицейскими. Таким образом, степень точки X относительно описанной окружности образованного полицейскими треугольника каждый вечер уменьшается, следовательно полицейские не могут вернуться в исходные точки.

Второе решение. Пусть A — вершина исходного треугольника, ближайшая к X, а O — центр описанной окружности. Легко видеть, что X не может принадлежать треугольнику OBC, т.е. A является вершиной нового треугольника, содержащего X. Следовательно, при переходе к новому треугольнику расстояние от X до ближайшей вершины не увеличивается. То же будет и на следующих шагах. Если последовательность треугольников замыкается, то расстояние остается постоянным и A является вершиной всех последовательных треугольников, содержащих X. Эти треугольники равнобедренные, причем A является вершиной основания, т.е. угол в этой вершине острый. Поэтому один из лучей BO, CO проходит внутри треугольника.

Продолжим отрезок AX до пересечения с BC в некоторой точке Y. Поскольку один из лучей BO, CO пересекает отрезок AY, то расстояние XY при переходе к следующему треугольнику уменьшается, следовательно процесс не может замкнуться.

XII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс

Ратмино, 31 июля 2016 г.

1. (Д.Швецов) Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Касательная, проведённая к описанной окружности треугольника BOC в точке O, пересекает луч CB в точке F. Окружность, описанная вокруг треугольника FOD, повторно пересекает прямую BC в точке G. Докажите, что $AG = AB$.

   Решение. Из условия касания следует, что $\angle FOB = \angle BCO = \angle GCA$, а из вписанности четырехугольника $FGOD$: $\angle FOB = \angle DGC$.

   Получаем $\angle GCA = \angle DGC$, откуда $AGCD$ — равнобокая трапеция и $AG = DC = AB$.

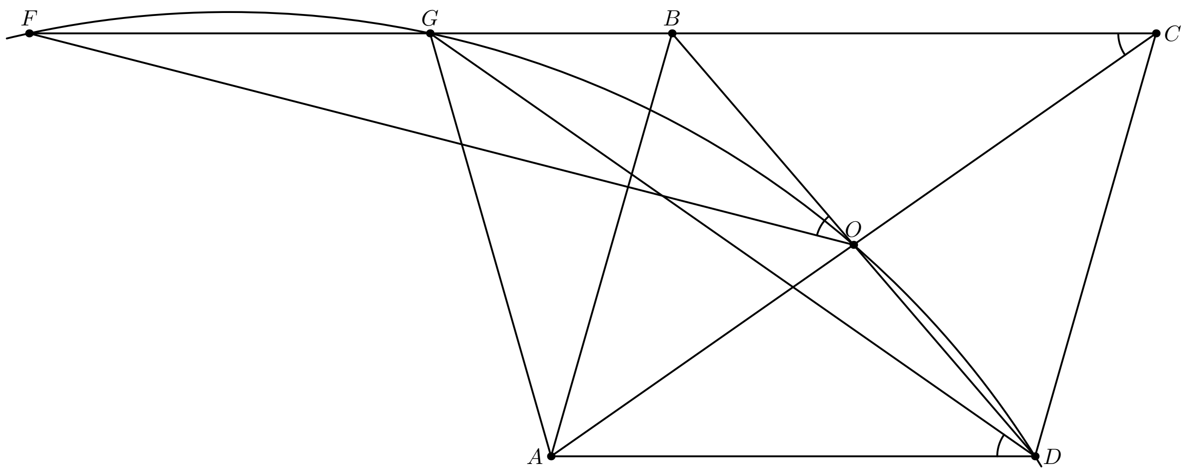

Рис. 9.1

2. (Д.Хилько) Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. На касательной в точке H к описанной окружности BHC взята точка X_A, что $AH = AX_A$ и $H \neq X_A$. Аналогично определены точки X_B и X_C. Докажите, что треугольник $X_AX_BX_C$ и ортотреугольник треугольника ABC подобны.

   Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC (рис.9.2). Докажем, что $AO \perp HX_A$. Действительно, окружность BHC получена из окружности ABC параллельным переносом на вектор AH. Поэтому касательная в точке H параллельна касательной в точке A, следовательно, перпендикулярна радиусу OA. Далее, треугольник HAX_A равнобедренный, поэтому его высота совпадает с его медианой. Значит

AO — серединный перпендикуляр отрезка HX_A. Аналогично, BO, CO — серединные перпендикуляры отрезков HX_B, HX_C соответственно. Поэтому точки H, X_A, X_B, X_C лежат на одной окружности с центром в O. Тогда, посчитав углы, получаем $\angle X_AX_CX_B = \angle X_AHX_B = \angle CHX_A + \angle X_BHC = 2(90^\circ - \angle C) = \angle H_1H_3H_2$. Аналогично, $\angle X_AX_BX_C = \angle H_1H_2H_3$ и $\angle X_BX_AX_C = \angle H_2H_1H_3$. Значит у треугольников $X_AX_BX_C$ и $H_1H_2H_3$ соответствующие углы равны, значит треугольники подобны.

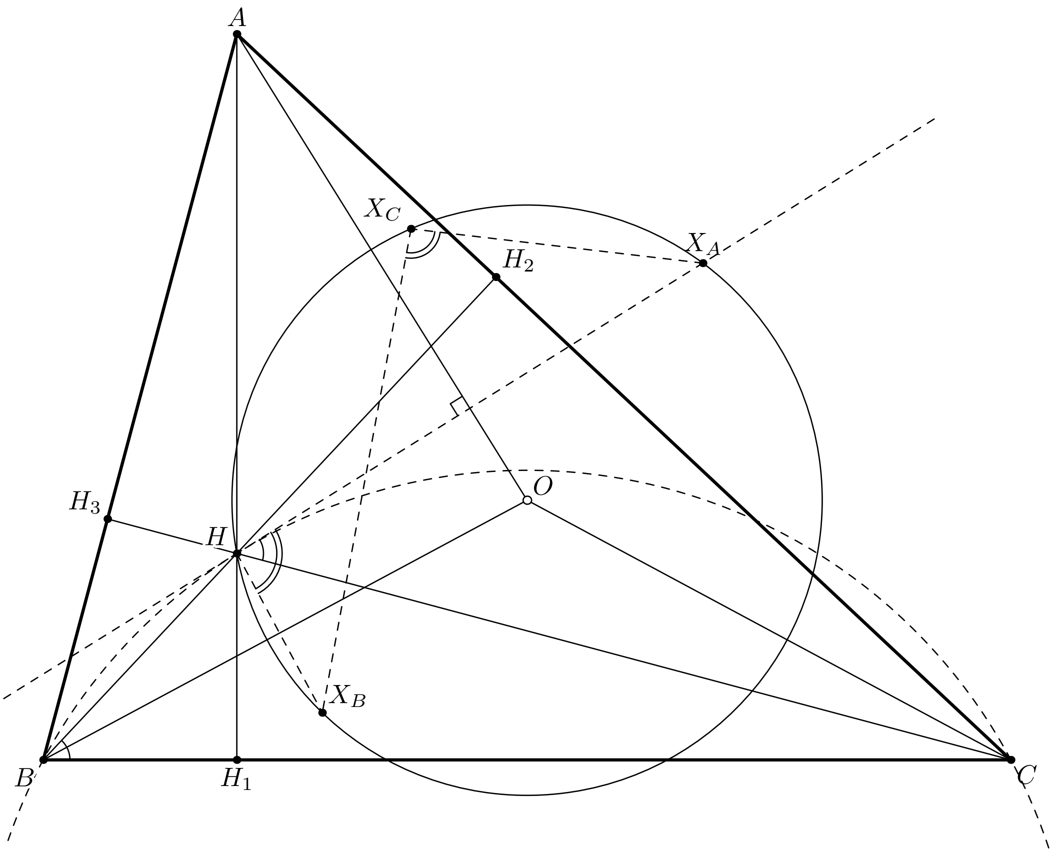

Рис. 9.2.

Примечание. Приведенное рассуждение можно изложить немного иначе. Середины отрезков HX_A, HX_B, HX_C лежат на окружности с диаметром OH и образуют треугольник, подобный ортотреугольнику (доказательство аналогично приведенному выше). Проведя рассуждение в таком виде, можно доказать более общее утверждение: если P и Q — изогонально-сопряженные точки, а A_1, B_1, C_1 — проекции точки P на AQ, BQ и CQ, то треугольник $A_1B_1C_1$ подобен педальному треугольнику точки P.

3. (В.Калашников) В треугольнике ABC O — центр описанной окружности, I — центр вписанной. Прямая, проходящая через I и перпендикулярная

OI, пересекает AB в точке X, а внешнюю биссектрису угла C — в точке Y. В каком отношении I делит отрезок XY?

Ответ. $1 : 2$.

Первое решение. Пусть I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC. Тогда для треугольника $I_aI_bI_c$ треугольник ABC является ортотреугольником, а его описанная окружность окружностью девяти точек. Поэтому центр описанной окружности треугольника $I_aI_bI_c$ находится в точке, симметричной I относительно O, а ее радиус равен удвоенному радиусу описанной окружности ABC. В эту же окружность вписан треугольник $A'B'C'$, полученный из ABC гомотетией с центром I и коэффициентом 2. Прямая l, проходящая через I перпендикулярно OI, высекает в этой окружности хорду с серединой в I, также через I проходят хорды I_aA' и I_bB' (рис.9.3). По теореме о бабочке прямые I_aI_b и $A'B'$ пересекают l в точках, симметричных относительно I, следовательно, $IX : IY = 1 : 2$.

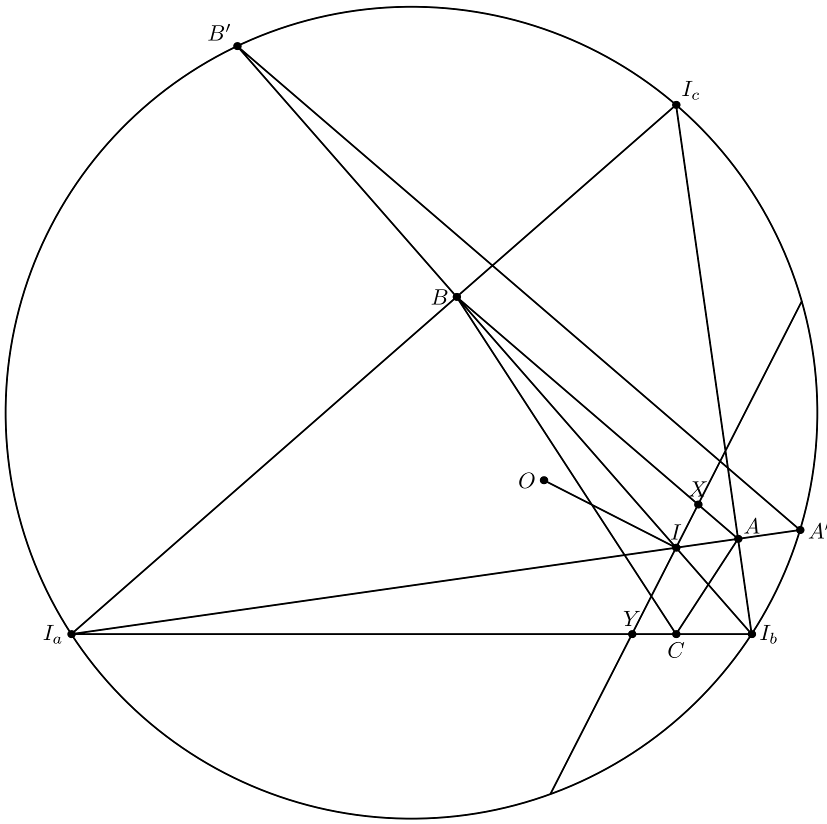

Рис. 9.3

Второе решение. Рассмотрим ГМТ, для которых сумма ориентированных расстояний до сторон треугольника ABC равна $3r$, где r — радиус вписанной окружности треугольника. Так как ориентированное расстояние является линейной функцией координат точки, этим ГМТ будет проходящая через I прямая. Поскольку сумма проекций вектора OI на ориентированные прямые AB, BC, CA равна нулю, то эта прямая перпендикулярна OI. Так как точка Y лежит на внешней биссектрисе угла C, сумма расстояний от нее до прямых AC и BC равна нулю. Значит, расстояние от Y до AB равно $3r$, т.е. $YX = 3IX$.

4. (Н.Белухов) Есть 101 жук, среди которых некоторые являются друзьями. Известно, что любые 100 жуков могут расположиться на плоскости так, что любые два из них будут друзьями тогда и только тогда, когда расстояние между ними равно 1. Верно ли, что все жуки тоже могут расположиться таким же образом?

Ответ. Нет.

Первое решение. Пусть два жука дружат тогда и только тогда, когда соответствующие точки на рис. 9.4 соединены сплошным отрезком.

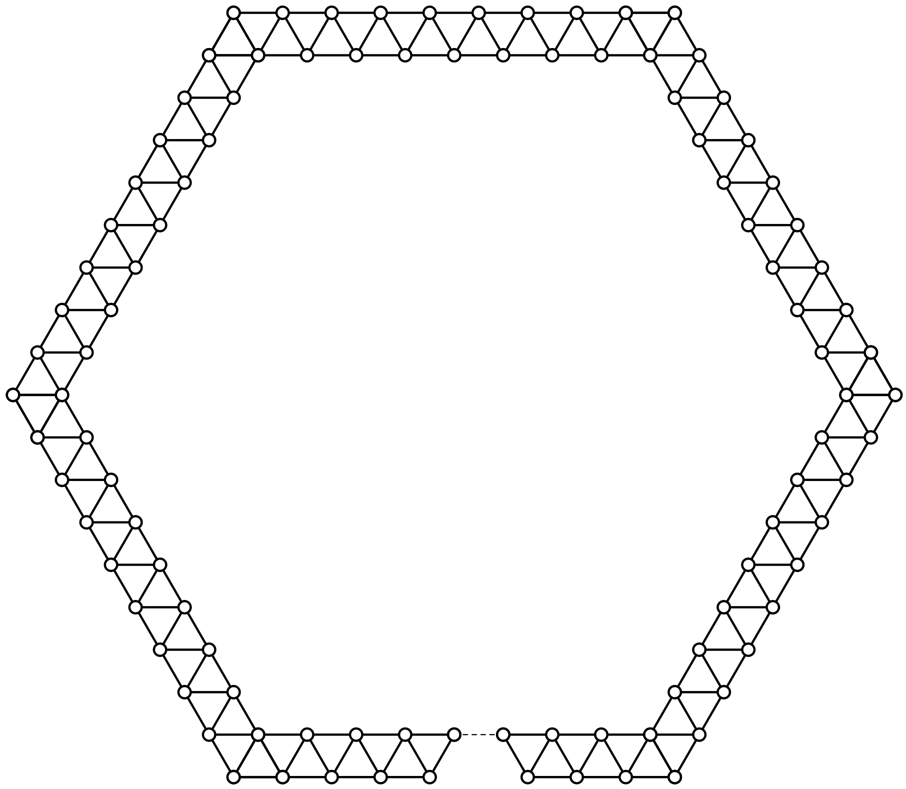

Рис. 9.4.

Легко видеть, что расположить жуков на плоскости так, чтобы расстояние между любыми двумя друзьями равнялось 1, можно только изображенным на рис. 9.4 способом. Но тогда пунктирный отрезок тоже равен 1, а соединенные им жуки друзьями не являются. С другой стороны, если удалить любого жука, то можно повернуть часть рисунка вокруг одной из соседних точек, обеспечив выполнение условий задачи.

Второе решение. Рассмотрим следующий граф: трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 33$ и $AD = 34$ высоты $\sqrt{3}/2$, составленная из 67 правильных треугольников со стороной 1, и A и D соединены путем длины 33. Очевидно, его нельзя нарисовать на плоскости, соблюдая условие задачи, а граф, полученный из него удалением любой вершины, можно.

XII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс

Ратмино, 1 августа 2016 г.

5. (Ф.Нилов) Центр окружности ω_2 лежит на окружности ω_1. Из произвольной точки X окружности ω_1 проведены касательные XP и XQ к окружности ω_2 (P и Q — точки касания), которые повторно пересекают ω_1 в точках R и S. Докажите, что прямая PQ проходит через середину отрезка RS.

   Первое решение. Пусть O — центр ω_2. Так как XO — биссектриса угла PXQ, то $OR = OS$. Значит, прямоугольные треугольники OPR и OQS равны по катету и гипотенузе, т.е. $PR = QS$ (рис.9.5). Поскольку $\angle XPQ = \angle XQP$, то из этого равенства следует, что точки R и S равноудалены от прямой PQ, что равносильно утверждению задачи.

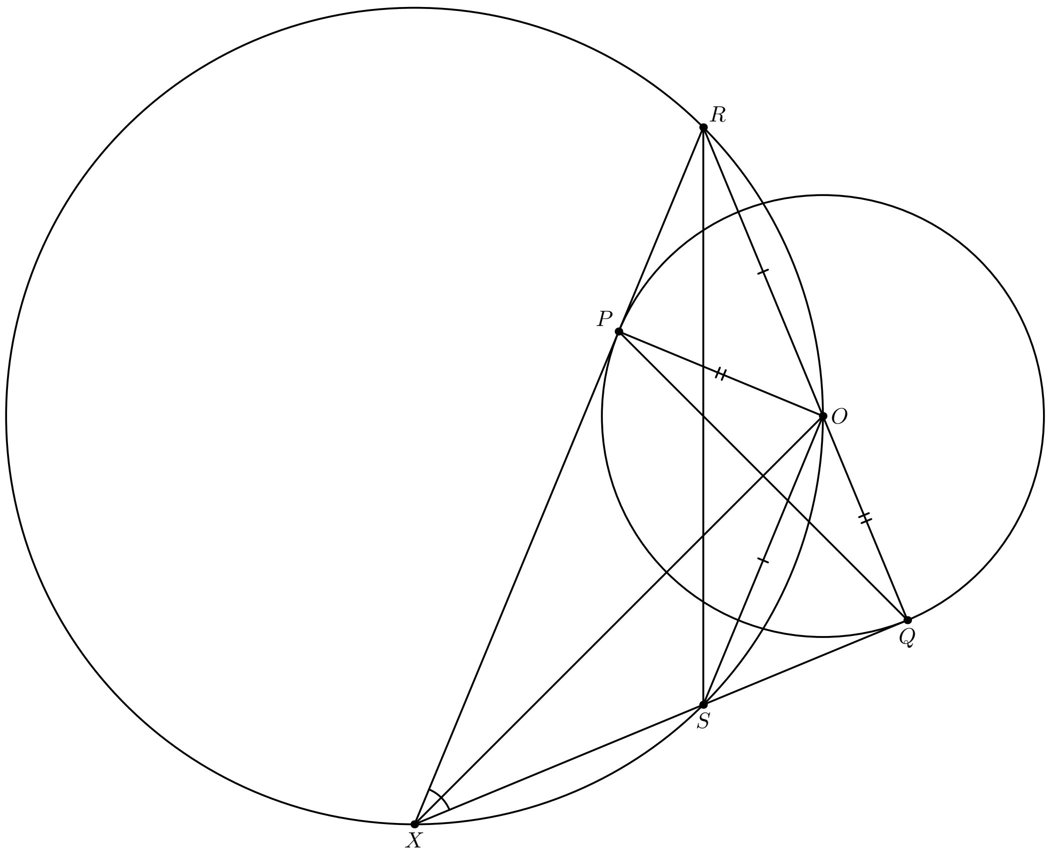

Рис. 9.5

Второе решение. Пусть O — центр ω_2. Так как XO — биссектриса угла PXQ, то O — середина дуги RS. Значит середина K отрезка RS — это проекция O на прямую RS. Точки P, Q и K лежат на одной прямой — прямой Симсона точки O.

6. (М.Тимохин) Продолжения боковых сторон трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а ее диагонали — в точке Q. Точка M на меньшем основании BC такова, что $AM = MD$. Докажите, что $\angle PMB = \angle QMB$.

Первое решение. Пусть X, Y — точки пересечения прямых PM, QM с AD, а U — середина AD. Так как $AX : XD = BM : MC = YD : AY$, получаем, что $AX = YD$ и $XU = UY$ (рис. 9.6). Поэтому серединный перпендикуляр UM к отрезку AD является биссектрисой равнобедренного треугольника XMY, а перпендикулярная ему прямая BC — биссектрисой угла PMQ.

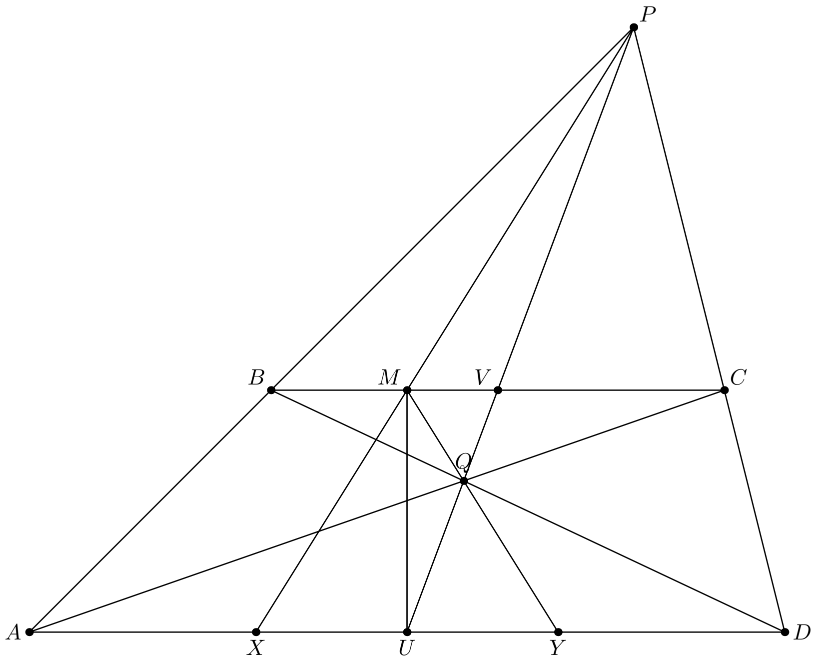

Рис. 9.6

Второе решение. Прямая PQ проходит через U и середину V отрезка BC (рис. 9.6), причем точки P, Q, U, V образуют гармоническую четверку. Поскольку прямые MU и MV перпендикулярны, они являются внешней и внутренней биссектрисами угла PMQ.

7. (А.Заславский) Из высот остроугольного треугольника можно составить треугольник. Докажите, что из его биссектрис тоже можно составить треугольник.

Решение. Пусть в треугольнике ABC $\angle A \geq \angle B \geq \angle C$. Тогда высоты h_a, h_b, h_c удовлетворяют неравенству $h_a \leq h_b \leq h_c$ и аналогичное неравенство выполнено для биссектрис l_a, l_b, l_c. Рассмотрим два случая.

1) $\angle B \geq 60^\circ$. Тогда $\angle A - \angle B \leq \angle B - \angle C$. Поэтому $h_c/l_c = \cos(\angle A - \angle B)/2 \geq h_a/l_a = \cos(\angle B - \angle C)/2$. Аналогично $h_c/l_c > h_b/l_b$. Значит, из неравенства $h_c < h_a + h_b$ следует, что $l_c < l_a + l_b$.

2) $\angle B \leq 60^\circ$. Тогда, так как $\angle A < 90^\circ$, $\angle C > 30^\circ$. Поэтому $l_a \geq h_a = AC \sin \angle C > AC/2$ и $l_b > BC/2$. Но биссектриса l_c не превосходит соответствующей медианы, которая меньше полусуммы сторон AC и BC. Следовательно, $l_c < l_a + l_b$.

Примечание. Заметим, что при разборе первого случая не использовалось условие остроугольности треугольника, а при разборе второго — то, что из высот можно сложить треугольник. Тем не менее, оба условия являются необходимыми. Пример тупоугольного треугольника, для которого из высот можно сложить треугольник, а из биссектрис нет, приводится в решении задачи 9.5 VII Олимпиады им. Шарыгина.

8. (И.Фролов) Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Окружность ω касается отрезка MA в точке P, отрезка MD в точке Q и окружности $ABCD$ в точке X. Докажите, что X лежит на радикальной оси окружностей ACQ и BDP.

   Первое решение. При инверсии с центром в точке X прямые AC и BD перейдут в окружности ω_1 и ω_2, пересекающиеся в точках X и M', окружность ω — в прямую, касающуюся этих окружностей в точках P', Q' соответственно, а окружность $ABCD$ — в прямую, параллельную $P'Q'$, пересекающую ω_1 в точках A', C', и ω_2 — в точках B', D' (рис. 9.8). Поскольку M лежит на радикальной оси окружностей ACQ и BDP, утверждение задачи равносильно тому, что радикальная ось окружностей $A'C'Q'$ и $B'D'P'$ совпадает с прямой XM'.

   Пусть K — точка пересечения XM' и $A'D'$. Так как $A'K \cdot KC' = XK \cdot KM' = B'K \cdot KD'$, точка K лежит на радикальной оси окружностей $A'C'Q'$ и $B'D'P'$. Кроме того, окружность $A'C'Q'$ вторично пересекает $P'Q'$ в точке, симметричной Q' относительно P', а окружность $B'D'P'$ — в точке, симметричной P' относительно Q'. Поэтому степени лежащей на $M'X$ середины отрезка $P'Q'$ относительно этих окружностей также равны, что и завершает доказательство.

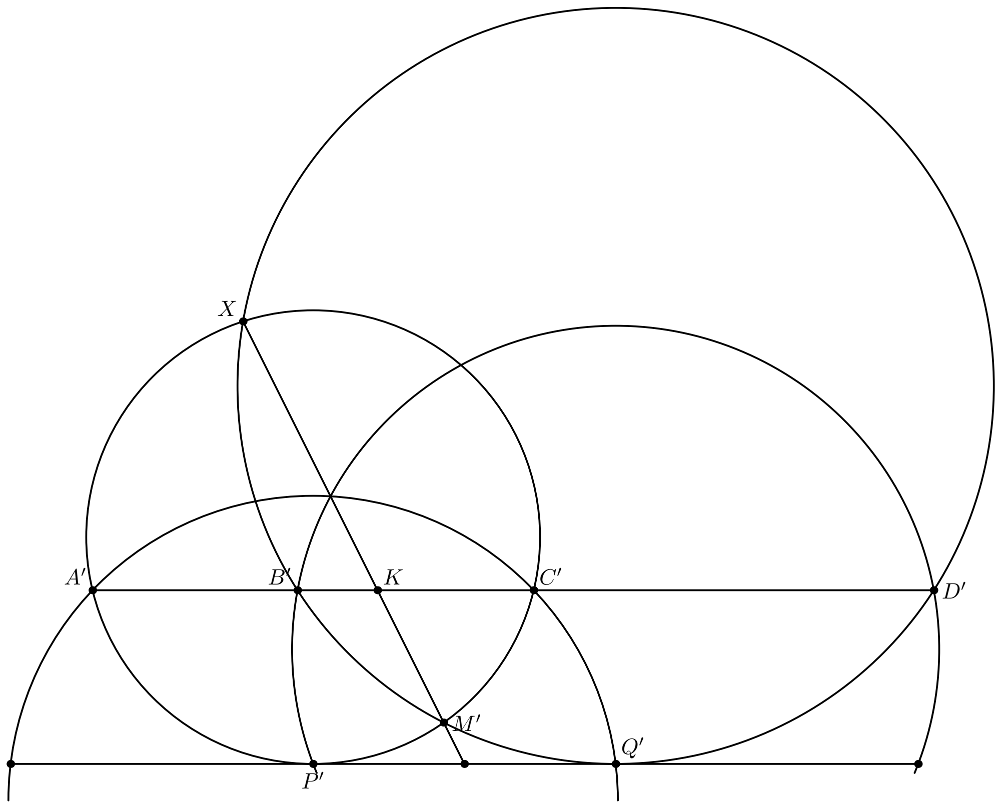

Рис. 9.8

Второе решение. Пусть l — касательная в точке X к окружности $ABCD$; l пересекает AC в точке S, а BD — в точке T. Тогда SM — радикальная ось окружностей $ABCD$ и ACQ, ST — радикальная ось окружностей $ABCD$ и ω, т.е. S — радикальный центр окружностей $ABCD$, ACQ и ω, т.е. SQ — радикальная ось окружностей ACQ и ω (т.к. Q лежит на окружностях ACQ и ω). Аналогично, TP — радикальная ось окружностей BDP и ω. Значит точка G пересечения SQ и TP — радикальный центр окружностей ACQ, BDP и ω. С другой стороны, M — радикальный центр окружностей ACQ, BDP и $ABCD$, т.е. MG — радикальная ось окружностей ACQ и BDP, причем MG проходит через X, т.к. G — точка Жергонна треугольника MST.

XII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс

Ратмино, 31 июля 2016 г.

1. $\boxed{\text{В.Ясинский}}$ Прямая, параллельная стороне BC треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Внутри треугольника APQ взята точка M. Отрезки MB и MC пересекают отрезок PQ в точках E и F соответственно. Пусть N — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников PMF и QME. Докажите, что точки A, M и N лежат на одной прямой.

   Первое решение. Обозначим через P' и Q' вторые точки пересечения окружности (PMF) с AB и окружности (QME) с AC. Тогда $\angle MP'A = \angle MFP = \angle MCB$, то есть точка P' лежит на окружности (BMC). Аналогично, точка Q' лежит на той же окружности. Значит, $AP'/AQ' = AC/AB = AQ/AP$, то есть степени A относительно двух данных окружностей равны. Это и означает, что A лежит на прямой MN.

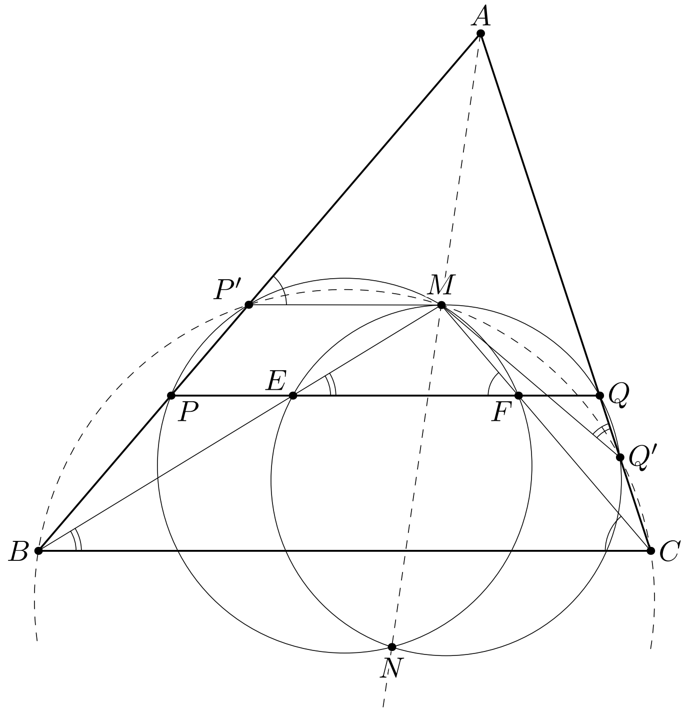

Рис. 10.1

   Второе решение. Пусть AM пересекает PQ в точке K, а BC — в точке L. Тогда $EK : FK = BL : CL = PK : QK$. Следовательно, $PK \cdot FK = QK \cdot EK$ и обе окружности пересекают AM в одной и той же точке.

2. (П.Кожевников) В треугольнике ABC I и I_a — центры вписанной и вневписанной окружностей, A' точка описанной окружности, диаметрально противоположная A, A_1 — основание высоты. Докажите, что $\angle IA'I_a = \angle IA_1I_a$.

   Решение. Поскольку $\angle A_1AB = \angle CAA'$ и $\angle ACA' = 90°$, треугольники ACA' и AA_1B подобны. Следовательно, $AA_a \cdot AA' = AB \cdot AC$. С другой стороны, $\angle AI_aC = \angle ABI$, значит треугольники AIB и ACI_a подобны и $AI \cdot AI_a = AB \cdot AC$.

   Пусть точка A_2 симметрична A_1 относительно биссектрисы угла A. Тогда A_2 лежит на AA' и, как показано выше, $AA_2 \cdot AA' = AI \cdot AI_a$. Поэтому четырехугольник $IA_2A'I_a$ вписанный и $\angle IA'I_a = \angle IA_2I_a = \angle IA_1I_a$ (рис. 10.2).

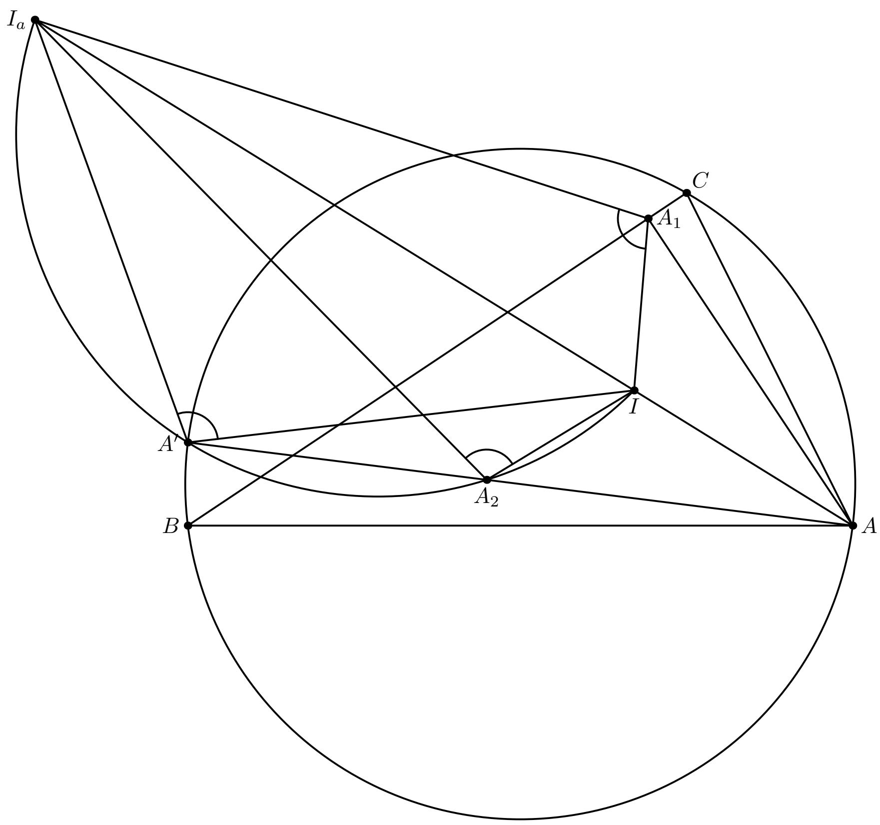

Рис. 10.2

3. (В.Калашников) Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$, имеющие общие описанную и вписанную окружности, и точка P, лежащая внутри обоих треугольников. Докажите, что сумма расстояний от P до сторон треугольника ABC равна сумме расстояний от P до сторон треугольника $A'B'C'$.

Решение. Как показано в решении задачи 9.3 геометрическим местом точек с постоянной суммой ориентированных расстояний до сторон треугольника ABC является прямая, перпендикулярная прямой OI, где O, I — центры описанной и вписанной окружностей. При этом для точки I сумма расстояний до сторон обоих данных треугольников равна $3r$, а для точки O — $R+r$ (формула Карно), где R, r — радиусы описанной и вписанной окружностей. Поэтому суммы расстояний до сторон обоих треугольников равны для всех точек плоскости.

Примечание. Можно показать, что утверждение задачи остается верным при замене треугольников вписанно-описанными многоугольниками с любым числом сторон.

4. (Н.Белухов) Дьявол предлагает Человеку сыграть в следующую игру. Сначала Человек платит некоторую сумму s и называет 97 троек $\{i, j, k\}$, где i, j, k — натуральные числа, не превосходящие 100. Затем Дьявол рисует выпуклый 100-угольник $A_1A_2\dots A_{100}$ с площадью, равной 100, и выплачивает Человеку выигрыш, равный сумме площадей 97 треугольников $A_iA_jA_k$. При каком наибольшем s Человеку выгодно согласиться?

   Ответ. $s = 0$.

   Первое решение. *Лемма.* Пусть T множество из не более, чем $n-3$ треугольников, вершины которых выбираются из вершин выпуклого n-угольника $P = A_1A_2\dots A_n$. Тогда можно раскрасить вершины P в три цвета так, что вершины каждого цвета образуют непустое множество подряд идущих вершин P и множество T не содержит треугольников с разноцветными вершинами.

   Доказательство леммы проведем индукцией по n.

   При $n = 3$ утверждение верно так как T пусто.

   Пусть $n > 3$. Если A_1A_n не является стороной никакого треугольника из T, покрасим A_1 и A_n в два разных цвета, а остальные вершины в третий цвет.

   Пусть A_1A_n является стороной хотя бы одного треугольника из T. Образуем множество U, удалив из T все такие треугольники и заменив в остальных A_n на A_1. Используя предположение индукции для многоугольника $Q = A_1A_2\dots A_{n-1}$ и множества U, раскрасим вершины Q. Теперь, раскрасив A_n в тот же цвет, что A_1, получим искомую раскраску P. $\square$

   Пусть теперь Дьявол строит раскраску, соответствующую названным Человеком тройкам, и рисует выпуклый 100-угольник P площади 100, вписанный в окружность k так, что все вершины P цвета i лежат на дуге c_i с градусной мерой ε°, а середины дуг c_1, c_2, и c_3 образуют правильный треугольник. Если ε стремится к нулю, то площади всех названных Человеком треугольников, а значит, и их сумма тоже стремятся к нулю.

Второе решение. Для каждой тройки (i, j, k) запишем в вершину A_i количество сторон, покрытых углом $A_jA_iA_k$ (оно не зависит от выбора 100-угольника), то же сделаем с вершинами A_j и A_k. Сумма записанных чисел для одной тройки равна 100, поэтому общая сумма всех чисел равна $97 \cdot 100$, а значит, в какой-то вершине (скажем, A_1) сумма чисел не больше 97; это значит, что есть сторона A_kA_{k+1}, не содержащая A_1 и такая, что ни один из углов с вершиной в A_1 не покрывает эту сторону. Теперь Дьявол может, нарисовав 100-угольник, в котором вершины $A_2, \ldots, A_{k-1}$ близки к A_k, а вершины $A_{k+2}, \ldots, A_{100}$ близки к A_{k+1}, сделать площади всех 97 треугольников, а значит, и их сумму сколь угодно малой.

XI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 10 класс

Ратмино, 1 августа 2015 г.

5. (А.Блинков) Существует ли выпуклый многогранник, у которого ребер столько же, сколько диагоналей? (*Диагональю многогранника называется отрезок, соединяющий две вершины, не лежащие в одной грани.*)

   Ответ. Да. Например, в шестиугольной призме из каждой вершины верхнего основания идут три диагонали в не лежащие с ней в одной боковой грани вершины нижнего. Поэтому общее количество диагоналей равно 18, как и число ребер.

6. (И.Богданов) Дан треугольник ABC. Точка K — основание биссектрисы внешнего угла A. Точка M — середина дуги AC описанной окружности. Точка N выбрана на биссектрисе угла C так, что $AN \parallel BM$. Докажите, что точки M, N и K лежат на одной прямой.

   Первое решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника. Тогда точки K, M, N лежат на прямых, содержащих стороны треугольника BIC (рис. 10.6). При этом $KB/KC = AB/AC$, $NC/IN = AC/AB' = (BC+AB)/AB$ (B' — основание биссектрисы из B), $MI/MB = MC/MB = AB'/AB = AC/(AB+BC)$ (второе равенство следует из подобия треугольников BMC и BAB'). По теореме Менелая получаем утверждение задачи.

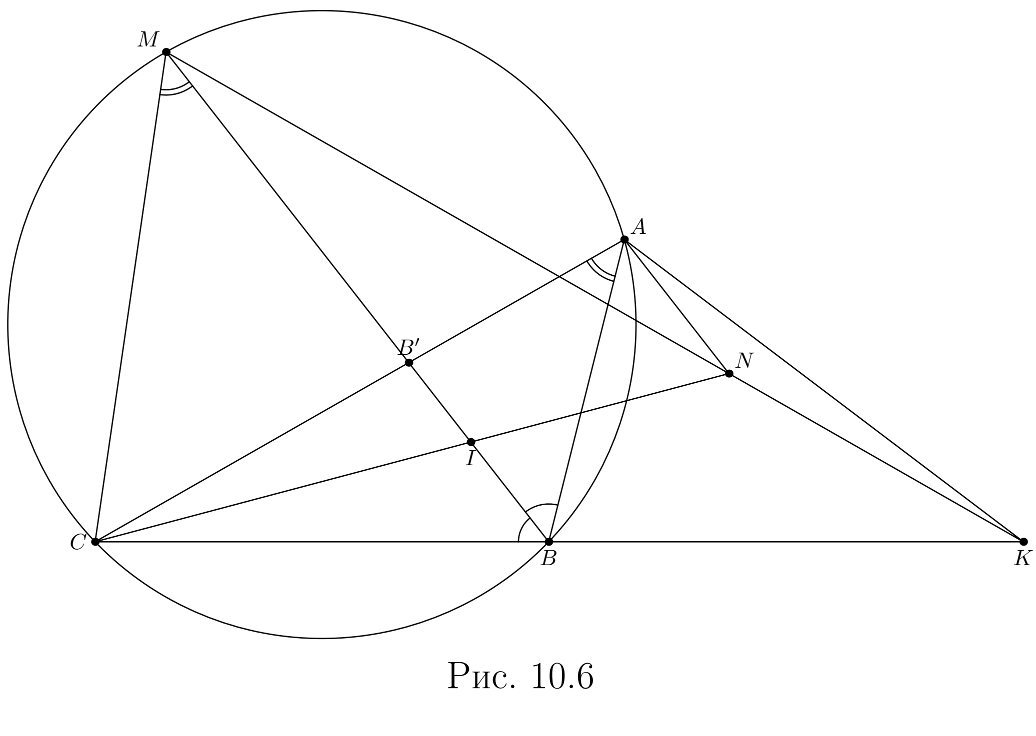

Рис. 10.6

Второе решение. Заметим, что $\angle MAC = \angle MBC = \angle ABM = \angle BAN$, т.е. прямые AI и AK являются внутренней и внешней биссектрисами треугольника AMN. Пусть AI пересекает MN и BC в точках P и Q соответственно, а AK пересекает MN в точке K'. Тогда четверки (B, C, K, Q) и (M, N, K', P) гармонические и, проецируя прямую MN на BC из точки I, получаем, что K' совпадает с K.

7. (А.Заславский) Постройте треугольник по одной из вершин, центру описанной окружности и точке Лемуана. (*Точкой Лемуана называется точка пересечения прямых, симметричных медианам треугольника относительно соответствующих биссектрис.*)

   Первое решение. Так как вершина A и центр O описанной окружности даны, можно построить эту окружность. Пусть XY — хорда окружности с серединой в точке Лемуана L, UV — параллельный этой хорде диаметр, а K — точка пересечения диагоналей трапеции с основаниями XY и UV. Рассмотрим преобразование, которое каждой точке P окружности ставит в соответствие вторую точку P' пересечения окружности с прямой KP. Оно сохраняет двойные отношения точек окружности и, следовательно, может быть продолжено до проективного преобразования плоскости. При этом преобразовании L переходит в O, значит, искомый треугольник переходит в треугольник, у которого точка Лемуана и центр описанной окружности совпадают, что возможно только в правильном треугольнике. Отсюда получаем следующее построение.

   Проведем прямую AK и найдем вторую точку A' ее пересечения с описанной окружностью. Впишем в окружность правильный треугольник $A'B'C'$ и найдем вторые точки B, C пересечения прямых BK, CK с окружностью. Треугольник ABC искомый.

   Второе решение. Воспользуемся следующим утверждением.

   Лемма. Дан треугольник ABC и точка P. При инверсии с центром A точки B, C, P переходят в B', C', P' соответственно. Окружность $B'C'P'$ повторно пересекает прямую AP в точке Q. Тогда подобие, переводящее треугольник $AC'B'$ в треугольник ABC, переводит Q в точку, изогонально сопряженную P.

   Утверждение леммы, очевидно, следует из равенств $\angle ABP = \angle B'P'A = \angle B'C'Q$.

   Вернемся к решению задачи. Пусть при инверсии с центром A точка L переходит в L', а описанная окружность искомого треугольника — в прямую l. Пусть прямая AL пересекает l в точке T, а точка M делит отрезок AT в отношении $2:1$. Тогда M — центр тяжести треугольника $AB'C'$, где B', C' — образы при инверсии вершин B и C. Согласно лемме M лежит на окружности $B'C'L'$, следовательно $KB'^2 = KC'^2 = KM \cdot KL'$. Таким образом, мы можем построить точки B', C', а значит, и B, C.

8. (С.Новиков) Дан неравнобедренный треугольник ABC, AA_1 — его биссектриса, A_2 — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Аналогично определяются точки B_1, B_2, C_1, C_2. Пусть O — центр описанной около треугольника окружности, I — центр вписанной в него окружности. Докажите, что радикальный центр окружностей, описанных около треугольников AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2, лежит на прямой OI.

   Первое решение. Пусть A' — середина дуги BC, не содержащей A. Так как инверсия с центром A' и радиусом $A'B$ меняет местами прямую BC и описанную окружность треугольника, точка A_1 переходит в A, а A_2 — в точку A'' пересечения прямой $A'A_2$ с описанной окружностью. Следовательно, точки A, A_1, A_2 и A'' лежат на одной окружности. Кроме того, так как $OA' \parallel IA_2$, прямые OI и $A'A_2$ пересекаются в точке K — центре гомотетии описанной и вписанной окружностей треугольника (рис. 10.8). Поэтому степень точки K относительно окружности AA_1A_2 равна

$$(\vec{KA_2}, \vec{KA''}) = \frac{r}{R}(\vec{KA'}, \vec{KA''}) = -\frac{r^3R}{(R-r)^2},$$

   поскольку $(\vec{KA'}, \vec{KA''})$ — это степень K относительно описанной окружности, равная $-R^2r^2/(R-r)^2$.

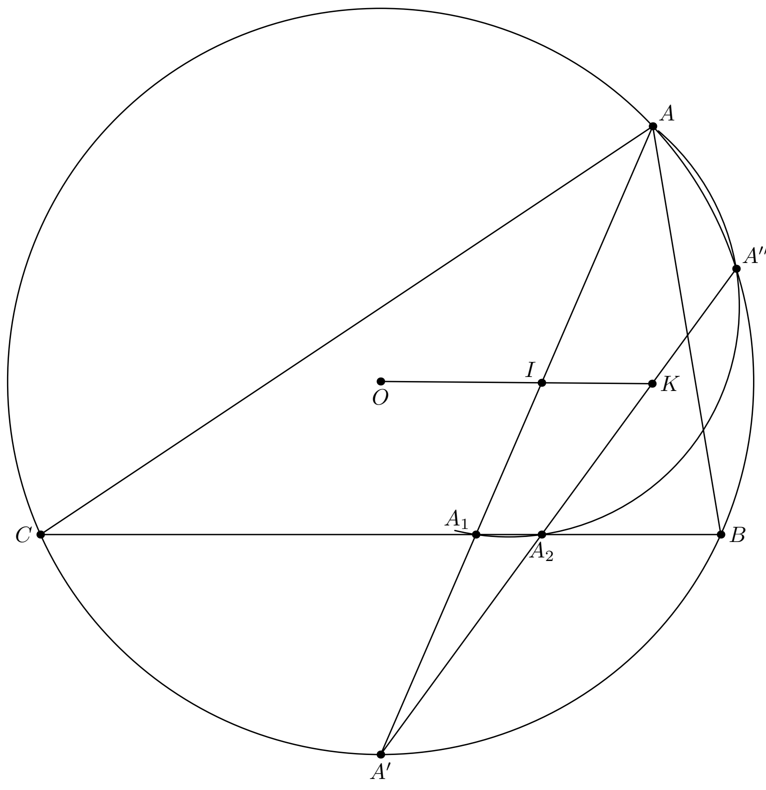

Рис. 10.8

Очевидно, степени K относительно окружностей BB_1B_2 и CC_1C_2 будут такими же, т.е. K — радикальный центр трех окружностей.

Второе решение. Пусть A', B', C' — середины дуг BC, CA, AB. Тогда треугольник $A'B'C'$ переводятся в $A_2B_2C_2$ гомотетией с положительным коэффициентом и центром K, т.е. $KA_2/A'A_2 = KB_2/B'B_2 = KC_2/C'C_2 = k$. Для точек прямой $A'A_2$ разность степеней относительно окружности AA_1A_2 и вписанной окружности треугольника является линейной функцией. В точке A_2 эта функция равна нулю, а в точке A' — r^2, поскольку $A'A_1 \cdot A'A = A'B^2 = A'I^2$. Значит, в точке K эта разность равна $-kr^2$. Другие аналогичные разности в точке K также равны $-kr^2$, откуда и следует требуемое.