Одиннадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Одиннадцатой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

В олимпиаде могут участвовать школьники последних четырех классов средней школы. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов российской школы (на момент проведения олимпиады) она предназначена. В тех странах, где количество классов в школе другое, ученики последнего класса решают задачи 11 класса, ученики предпоследнего класса — задачи 10 класса и т.д. Можно решать задачи и для более старших классов (решенные задачи для более младших классов при подведении итогов не учитываются).

Полное решение любой задачи или любого ее пункта, если задача имеет пункты, оценивается в 7 баллов. Неполное решение, в зависимости от степени продвижения, оценивается от 1 до 6 баллов. При отсутствии заметного продвижения ставится 0 баллов. Результатом участника является сумма баллов по всем задачам.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая отчетливые чертежи достаточного размера. *Если в задаче требуется дать ответ на некоторый вопрос (например, найти значение какой-нибудь величины), то этот ответ следует привести перед решением.* Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении каким-то фактом из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и не обязательно) указать в работе, какие задачи Вам понравились. Нам будет интересно узнать Ваше мнение.

Решения задач на русском или английском языке должны быть представлены в электронной форме не раньше 8 января и не позднее 1 апреля 2015 года. Для этого нужно зайти на сайт **http://geom.informatics.msk.ru** и следовать приведенным там инструкциям. **Внимание:** решение каждой задачи должно содержаться в отдельном файле формата pdf, doc или jpg. Желательно выполнять работу на компьютере или сканировать, а не фотографировать. *В последних двух случаях необходимо убедиться, что файл хорошо читается.*

При возникновении технических проблем с загрузкой работы обращайтесь по адресу **geomolymp@mccme.ru**.

Допускается также присылка решений по электронной почте на адрес **geompapers@yandex.ru** (*в случае присылки на любой другой адрес нет гарантии, что работа будет получена оргкомитетом*). В этом случае работа все равно будет загружена на сервер. Чтобы не усложнять процесс, рекомендуем авторам работ сделать это самим. Если все же работа послана по электронной почте, то необходимо соблюдать следующие правила.

1. Каждую работу следует посылать отдельным письмом с уведомлением о прочтении.

2. Если работа содержится в нескольких файлах, следует присылать их в виде архива.

3. В теме письма нужно написать "олимпиада Шарыгина" и указать фамилию и имя участника, а в тексте должны содержаться следующие сведения об участнике:

— фамилия, имя, отчество;

— E-mail, телефон, полный почтовый адрес с индексом;

— класс, в котором сейчас учится школьник;

— количество классов при школьном обучении;

— номер и адрес школы;

— ФИО учителей математики и/или руководителей кружка.

При невозможности представить работу в электронной форме сообщите об этом в оргкомитет, вопрос будет решен индивидуально.

Победители заочного тура — учащиеся 8–10 классов будут приглашены на финальный тур, который состоится летом 2015 года под Москвой. Победители заочного тура — выпускники школ получат грамоты оргкомитета олимпиады. Списки победителей будут опубликованы на сайте **www.geometry.ru** не позднее 1 июня 2015 г. Свои результаты Вы сможете узнать в это же время по адресу **geomolymp@mccme.ru**.

1. (8) Таня вырезала из бумаги выпуклый многоугольник и несколько раз его согнула так, что получился двухслойный четырехугольник. Мог ли вырезанный многоугольник быть семиугольником?

2. (8) В треугольнике ABC O — центр описанной окружности, H — ортоцентр. Через середину OH параллельно BC проведена прямая, пересекающая стороны AB и AC в точках D и E. Оказалось, что O — центр вписанной окружности треугольника ADE. Найдите углы треугольника ABC.

3. (8) На стороне AD квадрата $ABCD$ во внутреннюю сторону построен тупоугольный равнобедренный треугольник AED. Вокруг него описана окружность и проведен ее диаметр AF, на стороне CD выбрана точка G так, что $CG = DF$. Докажите, что угол BGE меньше половины угла AED.

4. (8) В параллелограмме $ABCD$ провели трисектрисы углов A и B. Трисектрисы, ближние к стороне AB, пересекаются в точке O. Обозначим пересечение трисектрисы AO со второй трисектрисой угла B через A_1, а пересечение трисектрисы BO со второй трисектрисой угла A через B_1. Пусть M — середина отрезка A_1B_1 . Проведем прямую MO, которая пересекает сторону AB в точке N. Докажите, что треугольник A_1B_1N — равносторонний.

5. (8–9) Дан треугольник ABC. Две окружности, проходящие через вершину A, касаются стороны BC в точках B и C соответственно. Пусть D — вторая точка пересечения этих окружностей (A лежит ближе к BC, чем D). Известно, что $BC = 2BD$. Докажите, что $\angle DAB = 2\angle ADB$.

6. (8–9) В остроугольном треугольнике ABC AA', BB' и CC' — высоты. Точки C_a, C_b симметричны C' относительно AA' и BB'. Аналогично определены точки A_b, A_c, B_c, B_a. Докажите, что прямые A_bB_a, B_cC_b и C_aA_c параллельны.

7. (8–9) Высоты AA_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. H_A – точка симметричная H относительно A. H_AC_1 пересекает прямую BC в точке C'; аналогично определяется точка A'. Докажите, что $A'C'||AC$.

8. (8–9) В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали AC и BD перпендикулярны. Из точки D опущен перпендикуляр DE на сторону AB, а из точки C — перпендикуляр CF на прямую DE. Докажите, что угол DBF равен половине угла FCD.

9. (8–9) Дан остроугольный треугольник ABC. Постройте на сторонах BC, CA, AB точки A', B', C' так, чтобы выполнялись следующие условия:
   - $A'B' \parallel AB$;
   - $C'C$ — биссектриса угла $A'C'B'$;
   - $A'C' + B'C' = AB$.

10. (8–9) Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре подобных треугольника. Докажите, что в него можно вписать окружность.

11. (8–10) Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку BH пересекает стороны BA, BC в точках A_0, C_0 соответственно. Докажите, что периметр треугольника A_0OC_0 (где O — центр описанной окружности $\triangle ABC$) равен AC.

12. (8–11) Сколько (максимум) кругов можно расположить на плоскости так, чтобы любые два из них пересекались, а никакие три — нет?

13. (9–10) В треугольнике ABC проведены высоты AH_1, BH_2 и CH_3. Точка M — середина отрезка H_2H_3. Прямая AM пересекает отрезок H_2H_1 в точке K. Докажите, что точка K принадлежит средней линии треугольника ABC, проведенной параллельно AC.

14. (9–11) Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. Точки A_1, A_2 симметричны основаниям внутренней и внешней биссектрис угла A относительно середины стороны BC. На отрезке A_1A_2 как на диаметре построена окружность α. Аналогично определяются окружности β и γ. Докажите, что эти три окружности пересекаются в двух точках.

15. (9–11) Длины сторон треугольника ABC не превышают 1. Докажите, что $p(1-2Rr)$ не превышает 1, где p — полупериметр, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC.

16. (9–11) Выпуклый четырехугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Восстановите четырехугольник по центрам описанных окружностей двух соседних треугольников и центрам вписанных окружностей двух противоположных друг другу треугольников.

17. (10–11) Дан треугольник ABC, O — центр описанной окружности. Проекции точек D и X на стороны треугольника лежат на прямых l и L, причем $l \parallel XO$. Докажите, что прямая L образует равные углы с диагоналями четырехугольника $ABCD$.

18. (10–11) В окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$. Точки K, L, M, N — точки пересечения пар прямых AB и CD, AC и BD, AF и DE, AE и DF. Докажите, что если три из этих точек лежат на одной прямой, то и четвертая точка лежит на этой прямой.

19. (10–11) Пусть L — основание внутренней биссектрисы угла A треугольника ABC, а K – внешней. Пусть P — точка пересечения касательных к описанной окружности в точках B и C. Перпендикуляр в точке L к BC пересекает AP в точке Q. Докажите, что Q лежит на средней линии треугольника LKP.

20. (10–11) Даны окружность и лежащий внутри нее эллипс с фокусом C. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников ABC, где AB — хорда окружности, касающаяся эллипса.

21. (10–11) Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром O; M_1 и M_2 — середины отрезков AB и CD соответственно; Ω – окружность, описанная около треугольника OM_1M_2; X_1 и X_2 – точки пересечения ω и Ω, а Y_1 и Y_2 – вторые точки пересечения окружностей, описанных около треугольников CDM_1 и ABM_2 соответственно, с Ω. Докажите, что $X_1X_2||Y_1Y_2$.

22. (10–11) Грани икосаэдра окрасили в 5 цветов так, что две грани, окрашенные в один цвет, не имеют общих точек, даже вершин. Докажите, что для любой точки внутри икосаэдра сумма расстояний от нее до красных граней равна сумме расстояний до синих граней.

23. (11) Дан тетраэдр $ABCD$. В грани ABC и ABD вписаны окружности с центрами O_1, O_2, касающиеся ребра AB в точках T_1, T_2. Плоскость π_{AB} проходит через середину отрезка T_1T_2 и перпендикулярна O_1O_2. Аналогично определяются плоскости π_{AC}, π_{BC}, π_{AD}, π_{BD}, π_{CD}. Докажите, что все эти шесть плоскостей проходят через одну точку.

24. (11) В тетраэдр $ABCD$ вписана сфера с центром O, касающаяся его граней в точках A_1, B_1, C_1 и D_1.

    а) Пусть P_a — такая точка, что точки, симметричные ей относительно прямых OB, OC и OD, лежат в плоскости BCD. Точки P_b, P_c и P_d определяются аналогично. Докажите, что прямые A_1P_a, B_1P_b, C_1P_c и D_1P_d пересекаются в некоторой точке P.

    б) Пусть I — центр сферы, вписанной в тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$; A_2 — точка пересечения прямой A_1I с плоскостью $B_1C_1D_1$; B_2, C_2, D_2 определены аналогично. Докажите, что P лежит внутри тетраэдра $A_2B_2C_2D_2$.