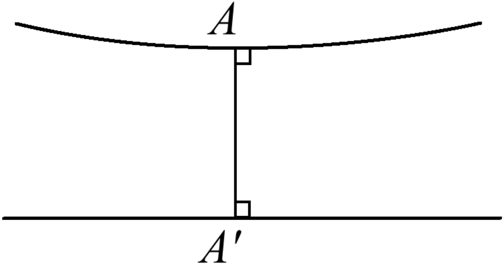
Откуда взялась неевклидова геометрия



Большинство современных изложений неевклидовой геометрии (под этим термином обычно понимают геометрию Лобачевского), начинаются с построения той или иной модели этой геометрии, на основании которой уже выводят различные формулы и доказывают теоремы. Между тем, исторически дело происходило с точностью до наоборот: лишь доказав огромное количество странных и удивительных теорем, математики приступили к построению моделей, в которых эти теоремы выполнялись бы. Можно сказать, что именно существование (точнее, доказательство) такого большого количества удивительных фактов привело к пониманию необходимости построения моделей, что, в свою очередь поменяло навсегда не только наше представление о том, что такое геометрия, но и вызвало к жизни новые взгляды на предмет изучения всей математики. Поскольку я считаю, что, как и в биологии, в математике *онтогенез повторяет филогенез*, то и свою лекцию я посвящаю краткому изложению истории этого „филогенеза“, что, я надеюсь будет полезно слушателям.

Как все обычно знают, появление неевклидовой геометрии тесно связано с пятым постулатом Евклида. Не все, однако, знают, что такое пятый постулат. Прежде всего, не надо путать *постулаты* (по-гречески αἰτήματα) – их Евклид предваряет словом „Допустим“, и *аксиомы*. На самом деле, слова ἀξιώματα, введенного и популяризованного Аристотелем, Евклид не использовал. Вместо этого он предпочитал говорить про *общие понятия*, по-гречески κοινοὶ ἔννοιαι.

Этих общих понятий у Евклида 9, и состоят они из утверждений типа

- Равные одному и тому же равны между собой.
- И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.
- И удвоенные одного и того же равны между собой.

И тому подобное (последнее утверждение носит номер 5).

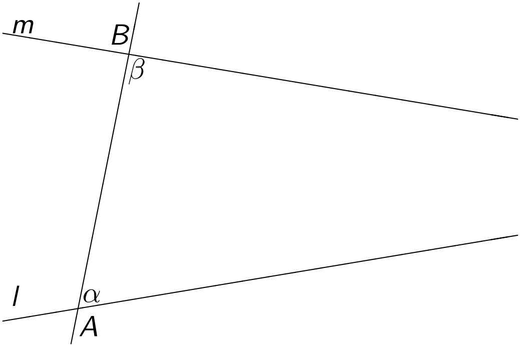
Постулатов у Евклида всего 5, и они описывают некоторые построения, которые Евклид считает возможными. Первые три штуки так и формулируются (они постулируют возможность провести единственную прямую через две точки и существование окружности любого радиуса и с любым центром). Четвертый утверждает равенство всех прямых углов. А пятый неожиданно формулируется довольно сложно. Вот он:

И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых.

Упражнение

Доказите эквивалентность этой формулировки и „школьной“: через точку вне прямой можно провести не более одной параллельной к ней.

Отметим, что последняя формулировка появилась гораздо позднее (в XVII веке).



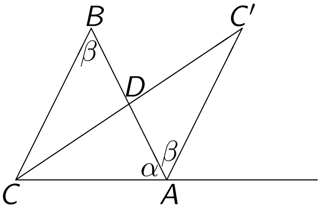
На этом рисунке прямая, „падающая“ на две прямые, называется AB, прямые, на которые она „падает“ – соответственно l и m, а „внутренние и по одну сторону углы“ – α и β. Постулат утверждает, что прямые l и m непременно пересекутся, если мы отойдем достаточно далеко вправо. Правда, никакой оценки того, как далеко надо будет отойти в нем не дается, что, в сиду бесконечности прямой, выглядит неприятно.

Уже сама громоздкость этой формулировки может не понравиться (остальные постулаты формулируются в одну строчку). Кроме того, не может не настораживать тот факт, что утверждение, обратное к только что сформулированному, а именно, в обозначениях с предыдущего слайда, что *при условии, что $\alpha + \beta \geq 180°$, прямые l и m не могут пересечься справа от AB*, может быть доказан на основании остальных постулатов Евклида.

Упражнение

Используйте это утверждение для доказательства существования параллельных прямых.

В самом деле: легко показать, что все три признака равенства треугольников никак не зависят от пятого постулата (то есть, что они выполняются, не зависимо от того, справедлив ли пятый постулат, или нет). Следовательно, все те утверждения, которые на них опираются (например, признак и свойство равнобедренного треугольника), тоже от пятого постулата не зависят.



Теперь мы можем воспользоваться стандартным приемом – „удвоением медианы“: проведем в треугольнике ABC медиану CD и продолжим ее за точку D до точки C' на расстояние, равное ей самой, то есть так, чтобы $CD = DC'$ (см. рисунок). Тогда $\angle DAC' = \angle DBC$ (в силу равенства соответствующих треугольников), поэтому

$$\angle CAC' = \alpha + \beta = \angle CAB + \angle CBA.$$

С другой стороны, точка C' лежит внутри угла BCA, и значит $\angle CAC' < 180^\circ$.

Обратите внимание, что в этом рассуждении мы негласно пользовались одним важным свойством прямой линии: удваивая медиану, мы считали, что *прямая имеет бесконечную длину*. Это свойство прямых не выполняется в сферической геометрии, несомненно, хорошо известной Евклиду.

Получается, что прямое утверждение: *в любом треугольнике сумма двух углов всегда меньше двух прямых*, можно доказать, а обратное, *если сумма двух углов меньше двух прямых, то существует треугольник* – приходится постулировать! Такую несимметричность древнегреческая наука, во всем искавшая совершенство, старалась не допустить! Поэтому с античных времен не прекращались попытки доказать пятый постулат, выведя его из остальных четырех.

Одна из первых попыток такого рода состояла в замене Евклидового определения параллельных (того, которым мы пользуемся сейчас), на более „удобное“. Ещё в I веке до нашей эры такую попытку предпринял Посидоний, предложивший называть параллельными *эквидистантные* прямые (то есть прямые l и m, такие, что каждая точка m удалена на одно и то же расстояние от l, и наоборот). Если только такие прямые считать параллельными, то трудностей удается избежать.

Однако, эквидистантность – совсем не то же самое, что параллельность в смысле отсутствия общих точек: античным ученым были хорошо известны примеры бесконечных кривых, которые никогда не встречаются с данной прямой, но и не являются эквидистантами (например, гипербола и ее асимптоты, или конхоида Никомеда и ее асимптота).

Кроме того, доказательство эквиваилентности свойства эквидистантности и параллельности для прямых, опирается на пятый постулат. Более того, чтобы даже просто *доказать существование эквидистантных прямых*, требуется пятый постулат (или же надо постулировать такое существование). Все это тоже не могло понравиться древним геометрам.

Главным источником сведений о первых попытках доказательства пятого постулата, из которого и взяты вышеизложенные сведения являются знаменитые *Комментарии* Прокла Диадоха к „Началам“ Евклида.

Среди античных ученых, пытавшихся доказать пятый постулат, был, например, знаменитый математик и астроном Клавдий Птолемей. Он выводил постулат из следующего самоочевидного (с его точки зрения) утверждения: *если для какой-то пары параллельных линий и секущей сумма внутренних углов меньше, больше или равна двум прямым, то то же самое неравенство выполняется для любой другой пары параллельных прямых и секущей.*

Прокл отвергает доказательство Птолемея, справедливо полагая, что наложенное требование совсем не очевидно, и приводит свое собственное доказательство, основанное на постулате (или, лучше сказать, предположении), что *расстоние между двумя параллельными прямыми всегда конечно, а расстояние между пересекающимися прямыми растет неограниченно.*

Упражнение

Выведите пятый постулат из этих утверждений.

Попытки доказать пятый постулат продолжались в средние века, прежде всего в исламском мире (который, как известно, хранил античные традиции в те времена, когда о просвещении в Европе и не задумывались).

В своих исследованиях арабские и персидские ученые (например, Насир ад Дин Туси) использовали различные утверждения, эквивалентные пятому постулату, например *если отрезок AB перпендикулярен прямой r и образует наклон с прямой s, то перпендикуляры, окпущенные из точек s на r меньше, чем AB со стороны, где угол острый, и больше, чем AB с той стороны, где он тупой.*

Из этого утверждения несложно вывести существование прямоугольника, а из этого факта – справедливость пятого постулата.

Упражнение

Докажите пятый постулат (начните со случая, когда один из двух внутренних углов – прямой).

В Европе внимание к пятому постулату, по понятным причинам, отсутствовало вплоть до конца эпохи Возрождения, то есть до XVI-XVII веков. Первый в новое время латинский перевод (с арабского) „Начал“ Евклида появился лишь в 1482 году. Зато, начиная с середины XVI века, работы по этой теме начали появляться регулярно; можно назвать имена Ф.Коммандино, К.С.Клавио, П.Катальди, Дж.А.Борелли, Дж.Витали, Л.Валерио, Г.Сэвила, А.Таке, А.Арно. Все эти работы использовали вместо пятого постулата утверждения, так или иначе базирующиеся на понятии эквидистанты, точнее говоря, утверждение, что *множество точек, равноудаленных от некоторой прямой – прямая*, или какое-то эквивалентное построение (например, Дж.Борелли постулирует, что линия, которую прочерчивает конец отрезка постоянной длины, перпендикулярного данной прямой, пока второй его конец движется по прямой – прямая).

Упражнение*

Покажите эквивалентность пятого постулата гипотезе о существовании эквидистантной прямой.

Остановимся вкратце на одном важном утверждении, которое доказал Джордано Витали в своей работе, посвященной пятому постулату. У самого автора оно формулируется примерно так:

Теорема

Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AD = BC$ и $\angle A = \angle B = 90^\circ$. Тогда $\angle C = \angle D$. Кроме того, пусть на отрезке CD отмечена точка H, из которой опущен перпендикуляр HK на AB. Тогда, если $HK = AD$, то $\angle C = \angle D = 90^\circ$ и расстояние от любой точки на CD до AB равно AD.

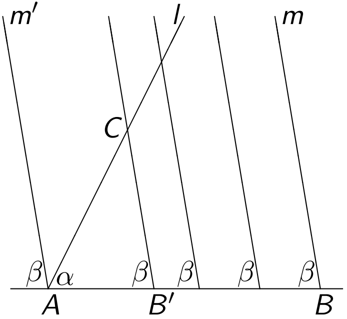
По-существу, существование эквидистанты и прямоугольника выводится из существования хотя бы одной точки, лежащей на CD, удаленной от AB на расстояние, равное сторонам $AD = BC$. Позднее это утверждение будет использовано во многих работах по этой теме (см. ниже рассказ о работе Саккери).

Упражнение*

Докажите теорему Витали, не используя пятого постулата.

Еще одна важная работа, в которой дается „доказательство“ пятого постулата – это работа английского математика XVII века Дж.Валлиса. В нем он доказывает пятый постулат на основании совсем другого утверждения, не связанного с используемого предшественниками понятия эквидистанты. Этим и ценна его работа.

Вот та аксиома (в современном смысле слова), которую он использует: *для каждой фигуры существует подобная ей фигура с произвольным коэффициентом подобия*. Таким образом он, по-существу, (как мы теперь знаем) доказывает эквивалентность существования подобных фигур пятому постулату (а следовательно, как мы позднее увидим, отсутствие подобных фигур в геометриях, где пятый постулат нарушен, например, в геометрии Лобачевского!) Более того, на самом деле чтобы доказать постулат Евклида достаточно доказать существование хотя бы одной пары подобных треугольников.



Вот вкратце доказательство Валлиса: пусть прямые l и m пересекают прямую AB (в точках A и B соответственно) под углами α и β такими, что $\alpha + \beta < 180°$. Проведем прямую m' через точку A такк, чтобы она образовывала с AB угол, равный β. В силу условия, она не может лежать внутри угла, образованного l и AB. Начнем сдвигать ее непрерывно в направлении B; в силу непрерывности, сначала прямые l и m' пересекаются, так что образуется треугольник $AB'C$. Используя постулат о существовании подобных фигур, мы можем построить треугольник, подобный $AB'C$ так, чтобы AB' стало равным AB; на самлм деле, можно даже считать, что AB' совпадает с AB. Третья вершина этого ового подобного треугольника и будет искомой точкой C' пересечения l и m.

Таким образом за XVI-XVII века в европейской науке появилось много работ, посвященных проблеме пятого постулата, содержащих те или иные его „доказательства“ (ошибочные, или опирающиеся на какое-то эквивалентное утверждение). Следующий значительный шаг к современному пониманию проблемы был сделан в XVIII веке, в работах итальянца Джироламо Саккери (1667-1733), швейцарца Иоганна Ламберта (1728-1777), и француза Адриана-Мари Лежандра (1752-1833). Эти авторы тоже пытались тем или иным способом доказать утверждение Евклида, но они пошли в своих попытках гораздо дальше своих предшественников. А именно, пытаясь доказать пятый постулат при помощи *reductio ad absurdum*, (как говорят в школе „от противного“), они основывали свои рассуждения на отрицании пятого постулата и далеко продвигались по пути, как теперь понятно, построения неевклидовой геометрии. Правда, никто из них не отважился сделать последний шаг на этом пути – все они в какой-то момент находили некое „противоречие“ и объявляли постулат доказанным.

Опишем вкратце результаты, полученные ими на таком пути. Начнем с *Джироламо Саккери*, чья книга *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia* была опубликована посмертно в 1733 году в Милане.

Он начинает с рассмотрения фигуры, уже втречавшейся в нашей лекции – с четырехугольника $ABCD$, в котором два угла A и B – прямые и $AD = BC$. Как мы уже знаем, из этого следует, что $\angle C = \angle D$, а евклидов пятый постулат эквивалентен существованию такого четырехугольника, в котором при этом оба указанных ула – прямые.

Для начала Саккери уточняет это утверждение: *если $AD \neq BC$, то больший угол лежит против большей стороны*.

Упражнение

Докажите это свойство.

Таким образом Саккери приходит к следующему утверждению (в обозначениях предыдущего слайда): *В четырехугольнике $ABCD$ выполнено одно из слеующих трех условий*

Гипотеза прямого угла $\angle C = \angle D = 90^\circ$.

Гипотеза тупого угла $\angle C = \angle D > 90^\circ$.

Гипотеза остого угла $\angle C = \angle D < 90^\circ$.

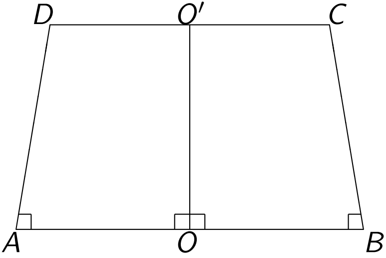
Довольно быстро ему удается доказать, что *если первая гипотеза выполнена хотя бы для одного четырехугольника $ABCD$, то она выполняется для любого четырехугольника указанного типа; более того, в этом случае будет выполняться евклидов пятый постулат.* Последнее утверждение нам уже было известно.

Его рассуждения опираются на следующую лемму:

Лемма

В зависимости от того, какая гипотеза выполнена, справедливо одно из следующих неравенств: $AB = CD$, $AB > CD$ или $AB < CD$ соответственно.

Наметим доказательство этого факта: проведем перпендикуляр к отрезку AB в его середине O; пусть O' – точка пересечения этого перпендикуляра и CD (см. рисунок).



Тогда четырехугольники $AOO'D$ и $BOO'C$ равны (что легко проверить, совместив отрезки AO и BO так, чтобы совпали AD и BC; в силу равенства углов $\angle C = \angle D$, оставшиеся вершины четырехугольников тоже совпадут). Значит, $OO' \perp CD$. Теперь утверждение следует из леммы Витали, описанной ранее, примененной к четырехугольникам $AOO'D$ и $BOO'C$.

Из этой же леммы можно вывести и то, что *если гипотеза тупого, соотв. острого угла выполнена хотя бы для одного четырехугольника $ABCD$, то она же будет выполнена для любого другого четырехугольника $ABCD$ указанного типа.*

Упражнение*

Докажите это утверждение для гипотезы прямого угла.

Из этих утверждений Саккери выводит следующее важное утверждение про сумму углов треугольника (которое позднее будет переоткрыто Лежандром):

Теорема

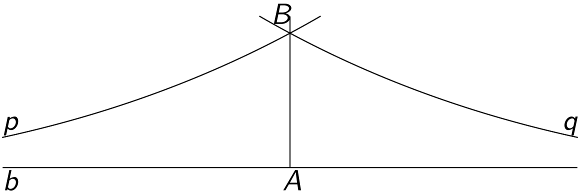
В зависимости от того, какая из трех гипотез (прямого, тупого или острого угла) выполняется, сумма углов любого треугольника будет равна, больше или меньше 180° соответственно.

Таким образом, чтобы доказать или опровергнуть пятый постулат, достаточно отыскать хотя бы один теугольник с нужной суммой углов.

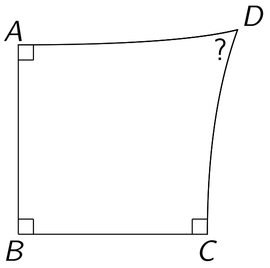
Заметим, что утверждение про сумму углов треугоьника обладает тем же свойством, что и гипотезы Саккери: *если хотя бы для одного треугольника сумма углов равна, больше или меньше 180°, то такое же неравенство будет выполняться для любого другого треугольника.* Как несложно понять, это утверждение эквивалентно соответветствующим гипотезам Саккери.

Установив эти свойства, и доказав, что гипотеза прямого угла эквивалентна пятому постулату, Саккери пытается „устранить“ оставшиеся две гипотезы. С гипотезой тупого угла ему удается справиться довольно бысто: он показывает, что из нее тоже следует пятый постулат, а значит, получается противоречие – ведь при выполнении пятого постулата все углы должны быть прямыми!

Итак, для окончательно „победы“ над пятым постулатом Саккери нужно было только избавиться от гипотезы острого угла. И он пытался сделать это, получив противоречия между выводами из нее и известными геоетрическими фактами, не связанными с постулатом Евклида.



На этом пути он доказал массу удивительных (и непривычных) утверждений: оказалось, что если выполняется гипотеза острого угла, то *существуют непересекающиеся прямые, не имеющие общего перпендикуляра; расстояние между такими прямыми становится сколь угодно маленьким, если идти в одном направлении, и сколь угодно большим, если идти в противоположном направлении*. Оказалось, что *при данном катете AB в прямоугольном треугольнике ABC, $(\angle A = 90^\circ)$, угол B не может быть сколь угодно близок к прямому – существует верхний предел такого угла, после которого прямые перестают пересекаться!* На рисунке изображена прямая b и две такие „предельные“ прямые p и q. Саккери посчитал, что такая ситуация невозможна, поскольку она „противоречит природе прямой линии“.



Основной труд швейцарского математика *Иоганна Ламберта*, под названием *Theorie der Parallellinien* тоже был опубликован посмертно, в 1777 году. Вероятно, это связано с тем, что самому автору результаты казались неокончательными и неполными. В самом деле, рассуждая на основе четырехугольника с тремя прямыми углами (см. рисунок), он приходит, как и Саккери к трем возможным гипотезам, касающимся величины четвертого угла: *гипотезе прямого угла*, *гипотезе тупого угла* и *гипотезе острого угла*. Также, как и Саккери, он довольно быстро доказывает, что гипотеза прямого угла эквивалентна пятому постулату, а гипотеза тупого угла противоречит известным утверждениям: несложно показать, что расстояние между BC и AD (см. рис) в этом случае убывает с ограниченной снизу скоростью, а значит BC пересечет AD, что противоречит утверждению о сумме двух углов треугольника (правда, Ламберт отмечает, что получающаяся теория весьма напоминает сферическую геометрию).

Наконец, пытаясь опровергнуть гипотезу острого угла, Ламберт последовательно изучает следствия этого предположения. В добавок к результатам, полученным Саккери (чью работу он, судя по всему, знал), он доказывает следующий важный результат:

Теорема

В предположении, что выполнена гипотеза острого угла, сумма углов любого многоугольника строго меньше $(n-2)\pi$; при этом существует коэффициент пропорциональности p такой, что площадь многоугольников на плоскости в этом случае вычисляется по формуле:

$$S = p((n-2)\pi - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)).$$

Тут $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – внутренние углы нашего многоугольника.

Величина $\sigma(M) = (n-2)\pi - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$ называется (угловым) дефектом многоугольника M. Несложно показать, что она обладает свойством аддитивности, то есть, что $\sigma(M_1 \coprod M_2) = \sigma(M_1) + \sigma(M_2)$, откуда легко получить утверждение.

Обратите внимание (те, кто знает), что эта формула очень напоминает формулу для площади многоугольника на сфере:

$$S = R^2((\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) - (n-2)\pi),$$

так что Ламберт пишет буквально следующее: „*Исходя из этого, я почти готов заключить, что третья гипотеза соответствует геометрии на мнимой сфере*“. То есть, на сфере мнимого радиуса $r = R\sqrt{-1}$. Напомним, что комплексные числа в те времена уже были известны, хотя их законное и важнейшее для приложений положение в математике еще не все могли осознать.

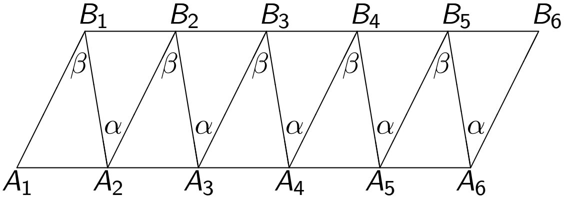
Далее он доказывает, что в разбираемом случае, угол равностороннего треугольника однозначно определяется длиной его стороны; мы можем использовать это наблюдение, чтобы измерять отрезки, сопоставляя им значение подходящей функции от угла (которую надо подобрать так, чтобы сумме отрезков сопоставлялась сумма длин). То есть, длина отрезка оказывается независимой от системы измерения! Это даёт Ламберту повод „опровергнуть“ оставшуюся гипотезу.

Последний из упомянутых математиков-предтеч неевклидовой геометрии, Антуан-Мари Лежандр гораздо более известен, чем первые два (многие слышали про его результаты, например, в теории чисел или в математическом анализе). Его работа по теории параллельных, *Refléxions sur différent manières de démontrer la théorie des paralleles ou le théorème sur le somme de trois angles du triangle* вышла тоже в год его смерти, 1833 году (однако, работать над этой темой он начал намного раньше, в 1794 году).

Лежандр с самого начала опровергает то, что у его предшественников называлось гипотезой тупого угла, доказав следующие утверждения (которые, правда, встречалась у них тоже):

Теорема

Сумма углов любого треугольника не может быть больше 180°. При этом, если она равна 180° хотя бы в одном треугольнике, то она равна той же величине во всех треугольниках (и выполняется пятый постулат).



Воспроизведем доказательство первой части: отложим на прямой n равных отрезков A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и т.д. Построим на них равные треугольники $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$, и т.д. Соединим точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ последовательно отрезками. Тогда треугольники $B_1B_2A_2$, $B_2B_3A_3$ и т.д. равны по третьему признаку (см. рис.). Обозначим углы α, β, как указано. Если бы было $\beta > \alpha$, то получилось бы, что $A_kA_{k+1} > B_kB_{k+1}$. Но

$$A_1B_1 + (B_1B_2 + \cdots + B_nB_{n+1}) + B_{n+1}A_{n+1} > A_1A_2 + \cdots + A_nA_{n+1},$$

откуда, в силу равенств треугольников $2A_1B_1 > n(A_1A_2 - B_1B_2)$, для любого n – противоречие.

Упражнение

Докажите вторую часть теоремы Лежандра.

Далее Лежандр (как и Ламберт до него) показывает, что при выполнении гипотезы острого угла будет существовать универсальная единица длины – то есть, способ измерения отрезков, не зависящий от выбора единицы измерения. Такое наблюдение дает ему повод считать эту гипотезу опровергнутой. Но, очевидно, чувствуя слабость такого аргумента, Лежандр приводит еще одно доказательство невозможности выполнения такой гипотезы. На этот раз он пользуется следующим постулатом: *через любую точку нутри угла можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла*. Отметим, что угол можно считать сколь угодно острым.

Упражнение*

Докажите, что при выполнении этого постулата, гипотеза острого угла не может выполняться.

Итак, к началу XIX века у математиков накопился достаточно большое количество утверждений и сведений по неевклидовой геометрии, но им не хватало смелости (именно смелости!) сформулировать то, о чем сейчас ззнают многие мат-школьники: неевклидова геометрия – такая же законная часть математики, как и геометрия Евклида!

И такие смельчаки нашлись. Как это часто бывает с математическими идеями, они часто приходят одновременно нескольким людям. Так и в случае неевклидовой геометрии, сразу нескольких выдающихся математиков можно по праву считать ее первооткрывателями. Главными создателями новой геометрии принято считать трех людей. Это великий Карл Фридрих Гаусс (1777-1855), наш соотечественник Николай Иванович Лобачевский (1793-1856) и Янош Больяи (1802-1860). К ним можно добавить еще несколько имен, например, Фердинанда Карла Швейкарта (1780-1859) и его племянника Франца Адольфа Тауринуса (1794-1874).

Все эти ученые проводили исследования по проблемам параллельных прямых. И все они пришли к заключению, что *от постулата Евклида можно отказаться и получить при этом непротиворечивую теорию, которая может оказаться полезной для приложений.*

Правда, разной была судьба их исследований. Гаусс был, пожалуй первым, пришедшим к вышеуказанному выводу. Еще в 1799 году он не сомневался в Евклиде – в переписке с Вольфгангом Больяи (отцом Яноша) он писал: „*Если бы только я знал, что площадь прямоугольного треугольника может быть сделана сколь угодно большой, то мне это было бы достаточно, чтобы доказать пятый постулат.*“ Но уже в 1816 году он обсуждал новую теорию с Фридрихом Вахтером. Само название *неевклидова геометрия* было придумано Гауссом (интересно, что сначала он хотел назвать свою теорию анти-евклидовой геометрией, затем, под влиянием Швейкарта – астральной, и только в 1831 году он придумал современный термин).

Но Гаусс не опубликовал почти ничего из своих наблюдений: сначала из опасений быть не понятым, потом он был отвлечен другими идеями, а когда в 1831 году он собрался, наконец, записать свои мысли, он обнаружил, что аналогичную работу уже опубликовали Лобачевский и Больяи[1].

Николай Иванович Лобачевский учился в новообразованном в то время Казанском императорском университете под руководством прфессора Иоганна Бартельса, друга и соотечественника Гаусса. Так что не исключено, что исследованиями по проблемам параллельных он занялся как раз под влиянием последнего.

[1] Исследования Швейкарта (профессора юриспруденции Марбургского университета) известны главным образом благодаря записке, переданной по его просьбе Гауссу в 1818 году. В ней он постулирует существование „астральной“ геометрии, в которой высота равнобедренного прямоугольного треугольника не может превышать определенной величины. Его племянник Адольф Тауринус, не сомневаясь в правоте Евклида, развил, тем не менее, дядины идеи и построил то, что можно назвать „неевклидовой аналитической геометрией и тригонометрией“.

Лобачевский закончил университет в 1813 году и остался работать там, сперва в качестве ассистента, затем – профессора. Как профессор он читал лекци по математике, физике и астрономии. В 1815-17 году ему пришлось преподавать геометрию, и именно тогда он начал работать над проблемой параллельных – в его записках можно обнаружить несколько неудачных попыток доказать пятый постулат, приведшие его к исследованиям, напоминавшим исследования Лежандра.

К 1823 году Лобачевский, по-видимому, пришел к выводу, что получающаяся при отрицании пятого постулата теория непротиворечива. Он называл ее воображаемой геометрией (об этом свидетельствует рукопись его так и не опубликованного учебника по геометрии). В 1826 году, 24 февраля (12 февраля по старому стилю) он читает лекцию *Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles*, в которой впервые обнародует свои выводы. Через несколько лет, в 1829-1830 году он публикует новую работу *О гіпотезахъ, лежащихъ въ основаніи геометріи*, в которой развивает дальше свои идеи.

Всю оставшуюся жизнь Лобачевский занимался усовершенствованием своей теории. Новые труды по ней он публиковал в 1835, 1837, 1838, 1840 годах (последняя книга была написана по-немецки, чтобы привлечь внимание зарубежных математиков). Наконец, перед самой смертью, в 1855 году, будучи уже слепым, он надиктовал еще одну книгу на французском языке *Pangéométrie ou precis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles,* в которой подводил итог своих исследований. Много времени и внимания он уделял вопросу о соответствии своих выводов „физической реальности". В частности, он пытался использовать результаты астрономических наблюдений для вычисления ключевого параметра k, „радиуса кривизны пространства" (я постараюсь рассказать о нем позже). Увы, безрезультатно: каждый раз оказывалось (да и до сих пор, если не ошибаюсь, оказывается), что с точностью до погрешности, кривизна нашего пространства равна нулю, то есть, с точностью до погрешности, наше пространство – евклидово. Кроме того, он применил свою теорию для вычисления некоторого количества интегралов.

Наконец, третьим творцом неевклдовой геометрии был венгерский офицер армии Австро-Венгерской империи, Янош (Иоганн) Больяи (латиницей пишется Bolyai). Он был сыном довольно известного математика Вольфганга Больяи (1775-1856), который переписывался с Гауссом как раз по поводу доказательства пятого постулата (Вольфганг Больяи был уверен, что смог его строго доказать, но Гаусс с ним не согласился). Некоторые из вас, вероятно, знают про теорему Больяи-Гервина (об эквивалентности равносоставленности и равновеликости для многоугольников); именно Вольфганг Больяи был ее соавтором.

Янош заинтересовался пятым постулатом во время уроков геометрии, которые давал ему отец, но заниматься им он стал против воли последнего – Вольфганг пытался его отговорить тратить силы на такую сложную задачу. Первое время (до 1821 года) он занимался исследованиями совместно со своим приятелем по венской Императорской Школе военных инженеров, Карлом Сасом (Szasz) (1798-1853), так что, вероятно, некоторые идеи принадлежат последнему.

Еще в начале 1820-х годов Янош был уверен, что ему удастся доказать пятый постулат, о чем он сообщал отцу. Но в 1823 году его мнение переменилось и он приступил к построению „абсолютной теории пространства“. В ноябре того же года он пишет отцу: „Я решил опубликовать работу по теории параллельных, как только приведу в порядок свои записи, если позволят обстоятельства. Она еще не закончена, но путь, по которому я иду, дает мне уверенность в успехе, если он вообще может быть достигнут: хотя до цели я еще не добрался, но я уже сделал столь чудесные открытия, что сам был ими потрясен, и было бы страшно обидно их утратить. Когда ты их увидишь, ты с этим согласишься. А пока скажу только, что *я из ничего создал новую вселенную*.“

Однако работа по записи мыслей заняла у Яноша больше времени, чем он ожидал. Только в 1825 году он послал отцу и своему бывшему профессору в венской Военно-инженерной школе выдержки из книги, и только в 1829 году рукопись была готова к публикации. Хоть она и не совсем понравилась отцу, они решили опубликовать ее в виде приложения к книге Вольфганга.

Итак, в 1831 году это приложение, под длинным латинским названием *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adjecta ad casum falsitalis quadratura circuli geometrica*[2]. увидело свет.

В июне 1831 книга была послано Гауссу, но не дошла; ее послали снова в январе 1832 года. Скоро Гаусс прислал хвалебное письмо, замечая, что труд сына его старого друга избавил его самого от необходимости предавать бумаге свои мысли, которые он до сих пор опасался публиковать. Хоть Вольфганг был доволен таким ответом, Яноша он привел в ярость. Он был уверен, что отец сообщил Гауссу содержание его труда до публикации, и Гаусс теперь хочет присвоить себе славу первооткрывателя неевклидовой геометрии.

---

[2] Во многих латинских изданиях Евклида, начиная с XVI века, принята иная нумерация аксиом и постулатов, в которой пятый постулат становится аксиомой XI. Кроме того, обратите внимание на последнюю фразу: Больяи удалось в неевклидовой геометрии решить проблему квадратуры круга!

Конфликт между отцом и сыном был не шуточный (по некоторым источникам, дело дошло до вызова на дуэль). Лишь спустя некоторое время Янош признал, что его обвинения были необоснованы. Но до конца жизни его отношение к Гауссу было весьма неприязненным.

Позднее Янош Больяи продолжал заниматься неевклидовой геометрией. В частности, он вычислял объем неевклидова тетраэдра (совсем не элементарная задача). Одно время (из-за ошибки в вычислениях) он был уверен, что смог доказать пятый постулат (он сравнивал разные формулы расстояний между точками в неевклидовой плоскости). В конце жизни он взялся за написание труда об основаниях математики, но не преуспел.

Все эти люди построили неевклидову геометрию, но строгого доказательства непротиворечивости неевклидова набора аксиом они не дали (современное понимание того, что это такое, возникло на 50 лет позднее). Для этого нужно было построить „модель“ плоскости Лобачевского. Сейчас я вкратце об этом расскажу.

Не вдаваясь в логические подробности, скажу, что с начала XX века принято считать, что любая *математическая теория* состоит из некоторого количества неопределяемых объектов, основные свойства которых задаются при помощи набора аксиом (в современном смысле слово аксиома это полный синоним слова постулат).

Остальные свойства объектов теории и соотношения между ними получаются как логические следствия исходных аксиом. Единственное требование, которое математик должен предъявлять к такой теории (согласно несколько „ортодоксальным“ представлениям, господствовавшим до середины прошлого века) это её *непротиворечивость*, то есть невозможность в рамках этой теории получить доказательства двух отрицающих друг друга утверждений. Эта точка зрения, распропагандированная великим Давидом Гильбертом (1869-1943), хоть и со многими оговорками (связанными с теоремой Курта Гёделя (1906-1978) о неполноте), является одной из основных и сегодня.

Но как доказать непротиворечивость теории? Иногда для этого достаточно средств чистой логики (например, так происходит для теории вещественных чисел и некоторых видов теории множеств). Но гораздо удобнее и проще — построить *модель* или *реализацию* данной теории в рамках другой теории. Это значит, что в новой теории (в непротиворечивости которой мы по тем или иным причинам не сомневаемся) выбирается некторый набор объектов, сопоставляемях неопределяемым объектам в исследуемой теории так, чтобы все аксиомы, накладываемые на них, выполнялись. Если это удается сделать, то непротиворечивость теории, которая нас интересует, становится следствием непротиворечивости той теории, в которой мы построили модель.

Например, вы все сталкивались с моделью евклидовой геометрии в рамках теории вещественных чисел — я имею в виду аналитическую геометрию, в которой точки реализованы парами чисел, прямые – множеством решений линейных уравнений от двух переменных и т.д.

Существует несколько такого рода моделей для *геометрии Лобачевского* (так принято сейчас называть теорию, происходящую из системы аксиом, в которой пятый постулат Евклида отменен), реализующих её в рамках обычной евклидовой геометрии. Вы все, наверное, слышали о некоторых из них. Прежде всего, это модель Э.Бельтрами (1835-1900), и обобщающая ее модель А.Келли (1821-1895) и Ф.Клейна (1849-1925); кроме того, очень популярны две модели, предложенные А.Пуанкаре (1854-1912) – „модель Пуанкаре в окружности“ и „модель Пуанкаре на верхней полуплоскости“. Эти модели тесно связаны между собою (модель Келли-Клейна может быть получена из модели Бельтрами проективным преобразованием, модель Пуанкаре получается из модели Бельтрами при помощи стереографической проекции). Поэтому я ограничусь описанием модели Бельтрами (и потом коротко скажу, что такое модель Пуанкаре). Во всех этих моделях можно вычислять длины отрезков, углы и расстояния, доказывать многочисленные теоремы. Я вместо этого расскажу о том, откуда они берутся.

В наше время существует много способов строить модели математических теорий, втом числе геометрии Лобачевского. Но в XIX веке, когда эта наука только создавалась, и когда само понятие „модели“ ещё по-существу не существовало, единственным способом изучать геометрию было последовательное изучение следствий данных аксиом, нахождение все новых и новых теорем обычным „синтетическим“ методом Евклида, тем самым, которым мы пользуемся в школе. И первые модели неевклидовой геометрии были получены именно так! Это может показаться удивительным, но это так.

Я постараюсь дать набросок такого пути, идя по которому можно, рассуждая „по-школьному“ прийти от аксиом к формулам неевклидовой тригонометрии и к модели плоскости Лобачевского. По этому пути шли Гаусс, Лобачевский и Больяи (я думаю, лишь отсутствие в их времена современного понимания того, что такое „модель математической теории“ не позволило им самим построить такую модель).

Уточним определение параллельных прямых на плоскости Лобачевского:

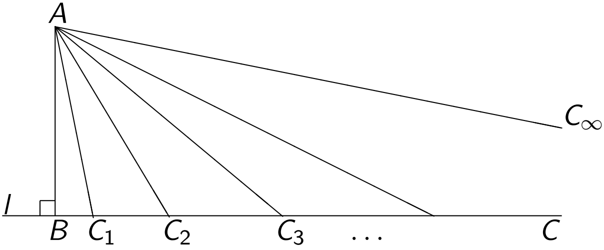
Определение

Пусть дана прямая l и точка A вне неё. Опустим из A перпендикуляр AB на l. Возьмем точку C на одном из лучей, на которые l делится точкой B. Проведем прямую AC и начнем двигать точку C по выбранному лучу все дальше и дальше от точки B. Тогда прямая, получающаяся в пределе этой процедуры из прямой AC называется прямой, параллельной l в направлении луча BC.

Упражнение

Докажите, что параллельная прямая AC' образует острый угол с AB, если выполнено отрицание пятого постулата.

Как видно, через любую точку вне l можно провести на плоскости Лобачевского ровно две параллельные (различающиеся выбором луча) и бесконечно много прямых не параллельных, но и не пересекающих l; они называются расходящимися с l.



На рисунке изображен процесс построения параллельной предельной прямой AC_∞. Понятие параллельности зависит от направления, т.е. $BC \parallel AC_\infty$, но $BC \nparallel C_\infty A$. Угол $\angle BAC < 90^\circ$ называется в этом случае *углом параллельности*. Он, очевидно, зависит только от расстояния AB и соответствующая функция (сопоставляющая длине отрезка угол параллельности) была впервые введена Лобачевским; она обозначается

$$\angle BAC = \text{П}(AB)$$

Отмечу, что тут стоит именно русская буква П, а не греческая $\prod$ – все-таки ввел эту функцию Лобачевский.

Из определения можно вывести следующий полезный критерий параллельности прямых в геометрии Лобачевского:

Утверждение

Пусть точка A не лежит на прямой BB' (B – произвольная точка на прямой BB'); прямая AA', проходящая через A, тогда и только тогда параллельна (в указанном направлении) прямой BB', когда она не пересекает BB', но любой луч, проходящий внутри угла $\angle BAA'$, пересекает BB'.

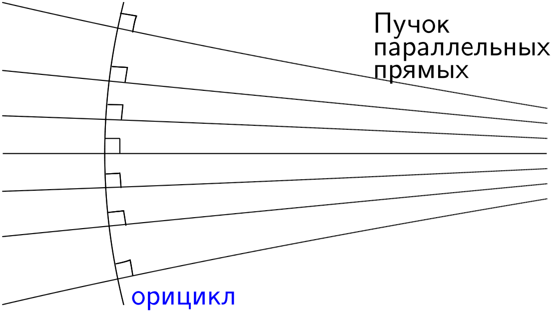
Упражнение

Докажите этот критерий.

Используя этот критерий можно доказать все обычные свойства параллельных линий на плоскости: то, что понятие параллельности не зависит от выбора точки, то, что понятие параллельности „рефлексивно“ (т.е. $AA' \parallel BB' \Leftrightarrow BB' \parallel AA'$) и „транзитивно“ (т.е. если $AA' \parallel CC'$ и $BB' \parallel CC'$, то $AA' \parallel BB'$).

Упражнение*

Докажите эти свойства.



Рассмотрим теперь пучок прямых, параллельных друг другу в одном и том же направлении. С этим пучком связана важная кривая в геометрии Лобачевского. Она определяется как множество точек, симметричных некоторой данной фиксированной точке относительно прямых этого пучка (по-другому, можно сказать, что это кривая, проходящая через данную точку и перпендикулярная всем прямым пучка). Эта кривая называется орициклом или предельной кривой (см. рисунок).

Конечно, в евклидовой геометрии орициклов нет (они превращаются в прямые линии). У орицикла много свойств. Например:

Утверждение

Все точки орицикла „равноправны“ (любая из них определяет тот же орицикл).

Орицикл можно рассматривать, как предел окружности, центр которой „убегает“ в бесконечность. Часть орицикла, заключенная между двумя прямыми пучка, называется дугой орицикла. Пучку параллельных прямых соответствует бесконечное множество орициклов, называемых „концентрическими“, также, как и дуги двух орициклов, лежащие между одной и той же парой прямых. Следующее свойство дуг орицикла – одно из ключевых.

Утверждение

Отношение длин концентрических дуг орициклов зависит только от расстояния между орициклами.

Упражнение

Докажите эти предложения.

Из сделанных наблюдений получаем следующую теорему, важную для построения неевклидовой тригонометрии:

Теорема

Отношение длин s_1 и s_2 двух концентрических дуг орициклов зависит от расстояния x между соответствующими орициклами по следующей формуле:

$$\frac{s_1}{s_2} = a^x, \ \textit{для некоторого } a > 0.$$

Доказательство.

Пусть $\frac{s_1}{s_2} = f(x)$; тогда для концентрических дуг s_2 и s_3, расстояние между которыми равно y, получится $\frac{s_2}{s_3} = f(y)$. С другой стороны

$$f(x+y) = \frac{s_1}{s_3} = \frac{s_1}{s_2} \cdot \frac{s_2}{s_3} = f(x) \cdot f(y).$$

□

Замечание

Показательная функция a^x легко определяется для целых и рациональных чисел x:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n\ \text{раз}},\ n > 0,\ a^p = \frac{1}{a^{-p}},\ p < 0,\ a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Для иррациональных x значение функции определяется как единственное число, к которому стремятся значения $a^{\frac{p}{q}}$, когда $\frac{p}{q}$ приближается к x.

Параметр a – один из важнейших во всей теории. Его принято записывать в виде $a = e^{\varkappa}$, где e – знакомое некоторым число Эйлера, называемое также основанием натуральных логарифмов. Это число ни от чего не зависит. А величина $\varkappa$ – называется *кривизной плоскости Лобачевского*, она измеряется в м^{-1}. Обратная к ней величина $k = \frac{1}{\varkappa}$ измеряется в метрах и носит название *радиус кривизны*.

В геометрии Евклида (то есть, если выполнен пятый постулам) кривизна пространства равна нулю (или, что эквивалентно, радиус кривизны равен бесконечности). Эта величина входит во все формулы неевклидовой тригонометрии – *теорему синусов*, *две теоремы косинусов*, *правила Непера* для неевклидова прямоугольного треугольника и многое другое, включая знаменитую *формулу Лобачевского для угла параллельности*:

Теорема

$$\operatorname{tg} \frac{\Pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}}.$$

При $k = \infty$, получим $\operatorname{tg} \frac{\Pi(x)}{2} = 1$, то есть $\Pi(x) = 90^\circ$.

Наиболее быстрый способ вывести такие формулы – рассмотреть неевкидову стереометрию, то есть продолжить рассуждать, предположив, что все обычные свойства прстврантсва, не связанные с пятым постулатом, дословно сохраняются.

Как и в планиметрии, к данной прямой через данную точку пространства можно провести роно две параллельные прямые – они лежат в одной плоскости с прямой и параллельными этой прямой в противоположных направлениях в смысле ранее данного определения. Все обычные свойства параллельности прямых, включая транзитивность понятия параллельности, при этом продолжают сохраняться. Чуть интереснее обстоят дела с параллельными плоскостями.

Определение

Две плоскости называются параллельными, если существует третья плоскость, перпендикулярная им обеим, и пересекающая их по параллельным прямым.

Большинство обычных свойств параллельных плоскостей при этом сохраняется. Например, если некоторая прямая в плоскости π параллельна прямой l, то $l \parallel \pi$. Также верно, что если две плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой, и что параллельные плоскости пересекаются с любой другой плоскостью по паре параллельных прямых.

Но в отличие от школьного курса, к плоскости π через точку A, не лежащую в π, можно провести бесконечно много параллельных плоскостей – по одной для каждой прямой, проходящей через A и параллельной π.

Упражнение*

Докажите перечисленные свойства плоскостей.

Рассмотрим пучок прямых в пространстве, параллельных друг другу в одном направлении. Для любой точки можно рассмотреть множество точек, симметричных ей относительно прямых пучка. Получающаяся поверхность – пространственный аналог орицикла, она называется *орисферой*. Любая плоскость, параллельная прямым пучка, пересекает эту поверхность по орициклу и наоборот – любой орицикл, лежащий на орисфере получается таким образом. Назовем эти орициклы прямыми на орисфере.

Теорема

В этих предположениях на орисфере выполнены все аксиомы геометрии Евклида на плоскости.

Это наблюдение можно использовать для вывода формул неевклидовой тригонометрии и для построения модели плоскости Лобачевского.

Например, рассмотрим орисферу, касающуюся плоскости в вершине острого угла прямоугольного треугольника. Если провести через вершины этого треугольника прямые, лежащие в пучке, задающем орисферу, то мы получим проекцию треугольника не орисферу, которая будет являться прямоугольным треугольником в смысле геометрии на орисфере, то есть её стороны будут дугами орициклов. Для проекции будет выполнена теорема Пифагора. Теперь, используя связь между длинами дуг орициклов и длин касательных отрезков, несложно вывести аналог этой теоремы в геометрии Лобачевского:

Теорема

В прямоугольном треугольнике с катетами a, b и гипотенузой c на плоскости Лобачевского выполняется соотношение:

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}.$$

Здесь функция $\operatorname{ch} x$ определена как

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Она называется *гиперболическим косинусом*. Кроме того, в неевклидовой геометрии часто используют *гиперболический синус*:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Эти функции – близкие аналоги обычных тригонометрических функций. Например:

Упражнение

Докажите следующие формулы для гиперболических функций:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1, \\ \operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \\ \operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

Тригонометрические формулы геометрии Лобачевского можно получить из тригонометрических формул сферической геометрии, заменив в них, грубо говоря, обыкновенные синусы и косинусы на гиперболические[3]. Например, *теоремы синусов и косинусов для сферического треугольника* выглядят следующим образом:

Теорема

Если a, b, c – стороны сферического треугольника, а α, β, γ – соответствующие противолежащие углы, то

$$\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin\alpha}=\frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin\beta}=\frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin\gamma},$$

$$\cos\frac{c}{R}=\cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R}+\sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos\gamma.$$

где R – радиус сферы.

---

[3] По этой причине геометрию Лобачевского часто называют еще *гиперболической геометрией*.

Сответствующие им *гиперболические теоремы синусов и косинусов* будут выглядеть так:

Теорема

Если a, b, c – стороны треугольника в геометрии Лобачевского, а α, β, γ – соответствующие противолежащие углы, то

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{sh}\frac{c}{R}}{\sin\gamma},$$

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k} - \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\cos\gamma,$$

где k – радиус кривизны плоскости Лобачевского.

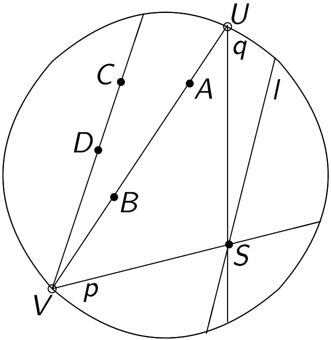
Как и в геометрии на плоскости эти равенства можно использовать для доказательства множества интересных теорем.

Упражнение*

Докажите при помощи этих теорем, что высоты и медианы треугольника на плоскости Лобачевского пересекаются в одной точке.

Тем же путём можно прийти к модели плоскости Лобачевского. А именно: рассмотрим орисферу, касающуюся плоскости в некоторой точке. Тогда через каждую точку плоскости можно провести прямую пучка, задающего эту орисферу. Точку, в которой эта прямая пересекает орисферу, будем считать проекцией точки. Проекцией прямой будет при этом дуга орицикла (заметим, что именно дуга, а не весь орицикл, так как далеко не все прямые пучка будут пересекать плоскость).

Напомним, что если считать орициклы прямыми, то геометрия на орисфере будет удовлетворять всем обычным аксиомам Евклида. Таким образом, мы получаем проекцию плоскости Лобачевского на плоскость Евклида, при которой точки переходят в точки, прямые переходят в отрезки прямых, углы – в углы. Несложно доказать, что образ плоскости при этом будет совпадать с внутренностью некоторой окружности на плоскости (опять-таки потому, что, начиная с некоторого момента, прямые пучка не пересекают плоскость).



Получающаяся модель носит название *модели Бельтрами*. Итак, плоскость Лобачевского в этой модели – это внутренность обычной евклидовой окружности, сама окружность не является частью плоскости и называется *абсолютом*; прямые – это хорды данной окружности. Прямые называются параллельными в данном направлении, если соответствующие хорды пересекаются на абсолюте (в данном направлении). На рисунке $AB \parallel CD$ но $AB \nparallel DC$. Также видно, что через точку S можно провести ровно две *параллельные прямые* к прямой-хорде UV (p, q на рисунке) и бесконечно много *расходящихся прямых*, (одна из которых l).

Зная, как построена модель Бельтрами, можно выразить расстояние между точками плоскости Лобачевского и углы между прямыми на этой плоскости в этой модели.

Например, если ρ_A, ρ_B – обычные (евклидовы) расстояния от центра O окружности (плоскости Лобачевского в модели Бельтрами) до точек A и B соответственно, θ – угол между OA и OB, а R – радиус окружности, образующей модель Бельтрами, то неевклидово расстояние d между A и B можно найти по формуле:

$$\operatorname{ch}\frac{d}{k} = \frac{R^2 - \rho_A\rho_B\cos\theta}{\sqrt{(R^2-\rho_A^2)(R^2-\rho_B^2)}}.$$

Аналогичное выражение можно написать и для угла между пересекающимися прямыми. Существует много эквивалентных способов писать эти формулы (например, можно переписать ее в декартовых координатах). Но красивее всего, по-моему, следующее выражение:

$$e^{\frac{2d}{k}} = (U : V : A : B),$$

где U, V – концы соответствующей хорды (см. рисунок), а $(U : V : A : B)$ – двойное отношение четырех точек.

Напомним, что двойным (или ангармоническим) отношением четырёх точек на прямой называют величину:

$$(U : V : A : B) = \frac{UA}{UB} : \frac{VA}{VB}.$$

Как известно, эта величина не меняется при *проективных преобразованиях*.

Аналогичные формулы с двойным отношением можно написать для величины угла между двумя пересекающимися прямыми, и для длины общего перпендикуляра между расходящимися прямыми. Более того, так как двойное отношение не изменяется при проективных преобразованиях, можно рассмотреть аналогичные модели, где вместо внутренности окружности, роль плоскости Лобачевского будет играть внутренность кривой, получающейся из окружности при помощи такого преобразования. Такие кривые хорошо известны, они называются *коническимим сечениями*, и бывают трех типов: *эллипс*, *парабола* и *гипербола*. Получаемая при этом модель называется *моделью Келли-Клейна*.

Наконец, из этой же модели можно получить *модель Пуанкаре в круге*: достаточно рассмотреть образ модели Бельтрами при следующих преобразованиях: сначала мы спроецируем все точки внутренности круга на верхнюю („северную“) полусферу, такую, что окружность абсолюта служит экватором сферы. Тут под проекцией точки на (полу)сферу понимается точка пересечения (полу)сферы и перпендикуляра, восставленного через данную точку к экваториальной плоскости. Затем нужно спроектировать точки со сферы обратно на экваториальную плоскость при помощи центральной проекции с вершиной в „южном полюсе“ нашей сферы. *При этих преобразованиях хорды исходной окружности перейдут в дуги окружностей, перпендикулярных абсолюту.* Эти дуги играют роль прямых в модели Пуанкаре.

Упражнение

Докажите это. Проверьте, что выполняются аксиомы плоскости Лобачевского.

Для доказательства потребуется знакомство со свойствами *стереографической проекции*.

Важной особенностью модели Пуанкаре является то, что *углы между прямыми на плоскости Лобачевского равны углам между соответствующими (изображающими их) дугами окружностей в модели Пуанкаре*. Это свойство часто коротко формулируют так: *модель Пуанкаре в круге – конформная*.

Наконец, применяя инверсию с центром на абсолюте, к модели Пуанкаре в круге, получают *модель Пуанкаре в (верхней) полуплоскости* (так как образом внутренности круги при этом будет одна из полуплоскостей, которуцю можно без ограничения общности считать верхней).

Упражнение

Докажите, что прямыми в модели Пуанкаре в поуплоскости будут полуокружности с центром на границе полуплоскости (абсолюте) и лучи, с вершиной на абсолюте, перпендикулярные абсолюту. Проверьте, что выполняются аксиомы плоскости Лобачевского. Убедитесьб в конформности этой модели.