Десятая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Десятой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

В олимпиаде могут участвовать школьники последних четырех классов средней школы. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов российской школы (на момент проведения олимпиады) она предназначена. В тех странах, где количество классов в школе другое, ученики последнего класса решают задачи 11 класса, ученики предпоследнего класса — задачи 10 класса и т.д. Можно решать задачи и для более старших классов (решенные задачи для более младших классов при подведении итогов не учитываются).

Полное решение любой задачи или любого ее пункта, если задача имеет пункты, оценивается в 7 баллов. Неполное решение, в зависимости от степени продвижения, оценивается от 1 до 6 баллов. При отсутствии заметного продвижения ставится 0 баллов. Результатом участника является сумма баллов по всем задачам.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая отчетливые чертежи достаточного размера. Если в задаче требуется дать ответ на некоторый вопрос (например, найти значение какой-нибудь величины), то этот ответ следует привести перед решением. Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении каким-то фактом из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и не обязательно) указать в работе, какие задачи Вам понравились. Нам будет интересно узнать Ваше мнение.

Решения задач на русском или английском языке должны быть представлены в электронной форме не позднее 1 апреля 2014 года. Для этого нужно зайти на сайт
http://olimpsharygin.olimpiada.ru и следовать приведенным там инструкциям. **Загружать задачи можно, начиная со 2 января 2014 г.**
Внимание: решение каждой задачи должно содержаться в отдельном файле формата pdf, doc или jpg. Желательно выполнять работу на компьютере или сканировать, а не фотографировать. В последних двух случаях необходимо убедиться, что файл хорошо читается.

При возникновении технических проблем с загрузкой работы обращайтесь по адресу **geomolymp@mccme.ru**.

Допускается также присылка решений по электронной почте на адрес
geompapers@yandex.ru. В этом случае необходимо соблюдать следующие правила.

1. Каждую работу следует посылать отдельным письмом с уведомлением о прочтении. Объем письма не должен превышать 10 Мб.

2. Если работа содержится в нескольких файлах, следует присылать их в виде архива.

3. Если объем работы превышает 10 Мб, разбейте ее на несколько писем.

4. В теме письма нужно написать "олимпиада Шарыгина" и указать фамилию и имя участника, а в тексте должны содержаться следующие сведения об участнике:
— фамилия, имя, отчество;
— E-mail, телефон, полный почтовый адрес с индексом;
— класс, в котором сейчас учится школьник;
— количество классов при школьном обучении;
— номер и адрес школы;
— ФИО учителей математики и/или руководителей кружка.

При невозможности представить работу в электронной форме сообщите об этом в оргкомитет, вопрос будет решен индивидуально.

Победители заочного тура — учащиеся 8–10 классов будут приглашены на финальный тур, который состоится летом 2014 года в г. Дубна под Москвой. Победители заочного тура — выпускники школ получат грамоты оргкомитета олимпиады. Списки победителей будут опубликованы на сайте **www.geometry.ru** не позднее конца мая 2014 г. Свои результаты Вы сможете узнать в это же время по адресу **geomolymp@mccme.ru**.

1. (8) Дан прямоугольный треугольник ABC. На катете AB во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник ADB, а на гипотенузе AC во внутреннюю сторону – равносторонний треугольник AEC. Прямые DE и AB пересекаются в точке M. Весь чертеж стерли, оставив только точки A и B. Восстановите точку M.

2. (8) Есть бумажный квадрат со стороной 2. Можно ли вырезать из него 12-угольник, у которого длины всех сторон равны 1, а все углы кратны $45°$?

3. (8) Вокруг равнобедренного треугольника ABC с основанием AB описана окружность и в точке B проведена касательная к ней. Из C проведен перпендикуляр CD к касательной, также проведены высоты AE и BF. Докажите, что D, E, F лежат на одной прямой.

4. (8) В треугольник вписан квадрат (две вершины на одной стороне и по одной на остальных). Докажите, что центр вписанной окружности треугольника лежит внутри квадрата.

5. (8) В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM, биссектриса AL и высота AH (H лежит между L и B). При этом $ML = LH = HB$. Найдите отношение сторон треугольника ABC.

6. (8–9) Дана окружность с центром O и не лежащая на ней точка P. Пусть X — произвольная точка окружности, Y — точка пересечения биссектрисы угла POX и серединного перпендикуляра к отрезку PX. Найдите геометрическое место точек Y.

7. (8–9) Перпендикуляр, восстановленный в вершине C параллелограмма $ABCD$ к прямой CD, пересекает в точке F перпендикуляр, опущенный из вершины A на диагональ BD, а перпендикуляр, восстановленный из точки B к прямой AB, пересекает в точке E серединный перпендикуляр к отрезку AC. В каком отношении отрезок EF делится стороной BC?

8. (8–9) Дан прямоугольник $ABCD$. Через точку B провели две перпендикулярные прямые. Первая прямая пересекает сторону AD в точке K, вторая прямая пересекает продолжение стороны CD в точке L. Пусть F — точка пересечения KL и AC. Докажите, что BF перпендикулярно KL.

9. (8–9) Окружности ω_1 и ω_2, касающиеся внешним образом в точке L, вписаны в угол BAC. Окружность ω_1 касается луча AB в точке E, а окружность ω_2 — луча AC в точке M. Прямая EL пересекает повторно окружность ω_2 в точке Q. Докажите, что $MQ \parallel AL$.

10. (8–9) В угол вписаны непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2. Рассмотрим все пары параллельных прямых l_1 и l_2 таких, что l_1 касается ω_1, l_2 касается ω_2 (ω_1, ω_2 между l_1 и l_2). Докажите, что средние линии всех трапеций, образованных прямыми l_1, l_2 и сторонами данного угла, касаются фиксированной окружности.

11. (8–9) Точки K, L, M и N на сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ образуют еще один квадрат. DK пересекает NM в точке E, а KC пересекает LM в точке F. Докажите, что $EF \parallel AB$.

12. (9–10) Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Пусть K_1 и K_2 — точки на ω_1 и ω_2 соответственно такие, что K_1A касается ω_2, а K_2A касается ω_1. Описанная окружность треугольника K_1BK_2 пересекает вторично прямые AK_1 и AK_2 в точках L_1 и L_2 соответственно. Докажите, что точки L_1 и L_2 равноудалены от прямой AB.

13. (9–10) В окружности ω с центром O фиксирована хорда AC. Точка B движется по дуге AC. Точка P — фиксированная точка хорды AC. Прямая, проходящая через P параллельно AO, пересекает прямую BA в точке A_1; прямая, проходящая через P параллельно CO, пересекает прямую BC в точке C_1. Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_1BC_1 движется по прямой.

14. (9–11) Постройте подмножество круга, площадью в половину площади круга, такое что его образ при симметрии относительно любого диаметра пересекается с ним по площади, равной четверти круга.

15. (9–11) В неравнобедренном треугольнике ABC высота из вершины A, биссектриса из вершины B и медиана из вершины C пересекаются в одной точке K.

    а) Какая из сторон треугольника - средняя по величине?

    б) Какой из отрезков AK, BK, CK средний по величине?

16. (9–11) Из некоторой точки D в плоскости треугольника ABC провели прямые, перпендикулярные к отрезкам DA, DB, DC, которые пересекают прямые BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.

17. (10–11) Дан прямоугольный треугольник с гипотенузой AC, проведена биссектриса треугольника BD; отмечены середины E и F дуг BD окружностей, описанных около треугольников ADB и CDB соответственно (сами окружности не проведены). Постройте одной линейкой центры окружностей.

18. (10–11) Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Касательные к окружности AIC в точках A, C пересекаются в точке X. Касательные к окружности BID в точках B, D пересекаются в точке Y. Докажите, что точки X, I, Y лежат на одной прямой.

19. (10–11) Окружности ω_1 и ω_2 касаются друг друга внешним образом в точке P. Из точки A окружности ω_2, не лежащей на линии центров окружностей, проведены касательные AB, AC к ω_1. Прямые BP, CP вторично пересекают ω_2 в точках E и F. Докажите, что прямая EF, касательная к ω_2 в точке A и общая касательная к окружностям в точке P пересекаются в одной точке.

20. (10–11) Дан четырехугольник $KLMN$. Окружность с центром O пересекает его сторону KL в точках A и A_1, сторону LM в точках B и B_1, и т.д. Докажите что

    а) если описанные окружности треугольников KDA, LAB, MBC и NCD пересекаются в одной точке P, то описанные окружности треугольников KD_1A_1, LA_1B_1, MB_1C_1 и NC_1D_1 также пересекаются в одной точке Q;

    б) точка O лежит на серединном перпендикуляре к PQ.

21. (10–11) В четырехугольнике $ABCD$ вписанная окружность ω касается сторон BC и DA в точках E и F соответственно. Оказалось, что прямые AB, FE и CD пересекаются в одной точке. Окружности, описанные около треугольников AED и BFC, вторично пересекают окружность ω в точках E_1 и F_1. Докажите, что прямые EF и E_1F_1 параллельны.

22. (10–11) Существует ли выпуклый многогранник, у которого есть диагонали и любая диагональ меньше любого ребра?

23. (11) Дана тригармоническая четверка точек A, B, C и D, то есть такая, что

    $$AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC.$$

    Пусть A_1 — отличная от A точка такая, что четверка точек A_1, B, C и D тригармоническая. Точки B_1, C_1 и D_1 определяются аналогично. Докажите, что

    а) A, B, C_1, D_1 лежат на одной окружности;

    б) точки A_1, B_1, C_1, D_1 образуют тригармоническую четверку.

24. (11) Дана описанная четырехугольная пирамида $ABCDS$. Противоположные стороны основания пересекаются в точках P и Q, причем точки A и B лежат на отрезках PD и PC. Вписанная сфера касается боковых граней ABS и BCS в точках K и L. Докажите, что если прямые PK и QL пересекаются, то точка касания сферы и основания лежит на BD.