Обобщенные теоремы о замыкании *

В.Ю. Протасов †

Аннотация

В работе получена теорема о замыкании для сфер в пространстве $\mathbb{R}^d$, из которой, в частности, следуют четыре классические теоремы о замыкании (теоремы типа Понселе). Мы также даем независимое и вполне элементарное доказательство теоремы Эмха, наиболее общей из классических теорем типа Понселе. Метод доказательства позволяет получить ее обобщение для пучков окружностей – аналог большой теоремы Понселе.

УДК 514

I. Введение

Теоремы о замыкании, или теоремы типа Понселе, по праву считаются одними из красивейших теорем геометрии. Различные подходы к их доказательствам, а также связи с задачами классической геометрии, теории алгебраических кривых, дифференциальных уравнений и т.д., изучались во многих работах (см. [1]–[5] и библиографию в этих статьях). Среди теорем о замыкании наиболее известны четыре: Понселе, Штейнера, о зигзаге, и Эмха. Мы не упоминаем несколько других теорем, являющихся, по существу, переформулировками одной из этих четырех (такие как, например, теорема Понзага).

Данная работа состоит из двух частей. Сначала (§ II) мы сформулируем и докажем общую теорему о замыкании для сфер в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, затем, в §3 и §4 получим некоторые ее следствия. Первое из них (Теорема 2) дает общий принцип замыкания для сфер в пространстве $\mathbb{R}^3$. Четыре классические теоремы о замыкании являются ее прямыми частными случаями. Второе следствие (теорема 3) обобщает теорему Эмха на сферы в пространстве $\mathbb{R}^d$. Далее мы сосредоточимся на элементарном доказательстве наиболее общей из четырех теорем – теоремы Эмха. Теорема Понселе в случае двух окружностей, плоский вариант теоремы о зигзаге, а также теорема Штейнера напрямую из нее следуют (см. § V). Поэтому было бы интересно получить независимое (не

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 05-01-00066 и гранта НШ-5813.2006.1.

†Московский Государственный Университет, Механико-математический факультет, Воробьевы Горы, Москва, 119992, e-mail: vladimir_protassov@yahoo.com

опирающееся на теорему Понселе) доказательство теоремы Эмха, использующее только средства элементарной геометрии. Такое доказательство представлено в § IV. Для простоты мы рассмотрели только один случай взаимного расположения трех окружностей: когда они вложены одна в другую. Доказательство основано на одном геометрическом факте, представляющим, возможно, и самостоятельный интерес (теорема 4). Наконец, в § VI мы получим обобщение теоремы Эмха на пучки окружностей.

Введем необходимые определения. В пространстве $\mathbb{R}^d$ дана окружность δ и семейство сфер $\mathcal{M}$. При этом гиперплоскость и точка также считаются сферами. Точку $z \in \mathbb{R}^d$ назовем *особой* для семейства $\mathcal{M}$, если через нее проходят более двух сфер из $\mathcal{M}$. Предположим, что выполнены два условия:

(**a**) *окружность δ не содержит особых точек для семейства $\mathcal{M}$;*

(**b**) *никакая сфера семейства $\mathcal{M}$ не содержит δ.*

Рассмотрим следующий процесс. На окружности δ берется точка D_1 и через нее проводится сфера $v_1 \in \mathcal{M}$ (предполагается, что таковая существует; если таких сфер две, то берем любую). Обозначаем через D_2 вторую точку пересечения v_1 и δ (если имеет место касание, то $D_2 = D_1$). Через D_2 проводим сферу $v_2 \in \mathcal{M}$, отличную от v_1 (если ее не существует, то полагаем $v_2 = v_1$), обозначаем через D_3 вторую точку пересечения v_2 и δ, и т.д. Получаем цепочку сфер $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$. Процесс имеет период n если $v_{n+1} = v_1$ (или, что то же, $D_{n+1} = D_1$).

Определение 1 *Семейство сфер $\mathcal{M}$ обладает свойством замыкания на окружности δ, если оно удовлетворяет условиям* (**a**), (**b**) *и следующему условию:*

если для некоторой начальной точки D_1 процесс имеет период $n \geq 3$, причем все точки $D_1, \ldots, D_n$ различны, то и для любой точки $D_1 \in \delta$, через которою проходит сфера семейства $\mathcal{M}$, процесс имеет тот же период.

Теперь напомним формулировки классических теорем о замыкании.

Теорема A [`Понселе [6]`] *На плоскости дана квадрика α и окружность δ. Тогда семейство прямых, касающихся α, обладает свойством замыкания на δ.*

Под квадрикой в $\mathbb{R}^d$, как обычно, понимается множество точек $x \in \mathbb{R}^d$, удовлетворяющих уравнению $(x, Ax) + (b, x) + c = 0$, где A – самосопряженный оператор $b \in \mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}$, через $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ обозначено стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$. Мы рассматриваем только действительные непустые квадрики. Квадрику в $\mathbb{R}^2$ будем называть плоской. Если в теореме A квадрика α – вырожденная (пара прямых, одна прямая или точка), то вместо касательных берутся параллельные прямые (в случае прямой или пары прямых), или, в случае точки, прямые проходящие через эту точку. Теорема Понселе формулируется обычно для пары квадрик α и δ. Мы, не ограничивая общности, будем считать, что δ – окружность (общий случай либо сводится к данному проективным преобразованием, если квадрика δ невырожденная, либо тривиален, если δ – вырожденная).

Касание двух окружностей на плоскости будем называть внутренним, если одна из окружностей лежит внутри другой. Пусть на плоскости даны две окружности α_0, α_1. Для данной окружности β, касающейся α_0 и α_1 *индекс касания* равен 0 если, из двух касаний (β с α_0 и β с α_1) четное число внутренних, а если нечетное – то индекс равен 1. Индекс касания стандартным образом обобщается на случай, когда одна или обе окружности α_j обращаются в прямые (индекс касания зависит от ориентации прямой). Для данного $i = 0, 1$ обозначим через $\mathcal{M}_i$ множество окружностей, касающихся α_0 и α_1 с индексом i. Если α_0 или α_1 вырождается в точку, то $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1$. Те же обозначения будут использованы для семейств сфер, касающихся двух данных сфер.

На плоскости даны окружности α_0 и α_1, причем α_0 лежит внутри α_1. *Процессом Штейнера* назовем построение цепочки окружностей $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_1$, в которой $v_1 \in \mathcal{M}_1$ – произвольная начальная окружность, v_{k+1} касается v_k при любом $k \in \mathbb{N}$ и отлична от v_{k-1} при любом $k \geq 2$. Процесс имеет период $n \geq 3$ если $v_{n+1} = v_1$.

Теорема B [Штейнер.] *Если процесс Штейнера периодичен для некоторой начальной окружности v_1, то и для любой $v_1 \in \mathcal{M}_1$ он будет иметь тот же период.*

Дано число $\rho > 0$ и две окружности s и δ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Пусть данная пара окружностей удовлетворяют условию:

(c) *проекция одной из окружностей на двумерную плоскость, содержащую вторую окружность, не содержит центра второй окружности.*

Если взять любую из окружностей и в ее центре восставить перпендикуляр к плоскости, то он не пересечет другую окружность.

Возьмем произвольную точку $D_1 \in \delta$. Если сфера с радиусом ρ и центром D_1 пересекает s, то берем любую из двух точек пересечения и назовем ее S_1. Далее берем точку $D_2 \in \delta$ такую, что $D_2S_1 = \rho$ и $D_2 \neq D_1$ (если таковой не существует, то полагаем $D_2 = D_1$). Далее, точка $S_2 \in s$ такова, что $S_2D_2 = \rho$, $S_2 \neq S_1$ (если таковой не существует, то $S_2 = S_1$), и т.д. Назовем *зигзаг-процессом* построение последовательностей $\{D_k\}$ и $\{S_k\}$ для данного начального отрезка $D_1S_1 = \rho$. Зигзаг имеет период n если $D_{n+1} = D_1$. Зигзаг-процесс можно интерпретировать как прыжки блохи с одной окружности на другую, длина прыжка постоянна и равна ρ.

Теорема C [о зигзаге.] *Если зигзаг имеет период $n \geq 3$ для некоторой начальной точки $D_1 \in \delta$, причем все промежуточные точки различны, то он имеет тот же период для любой точки $D_1 \in \delta$, из которой можно сделать первый шаг.*

Теорема C восходит к работе [7]. Ее доказательства, базирующиеся на различных идеях, можно найти в [3, 4]. В [8] установлена равносильность теоремы о зигзаге и теоремы Понселе.

Теорема D [Эмх [9].] *На плоскости даны окружности α_0, α_1 и δ, каждая из них может вырождаться в точку. Тогда для любого $i \in \{0, 1\}$ семейство $\mathcal{M}_i$ обладает свойством замыкания на δ при условии, что $\delta \notin \mathcal{M}_i$.*

Доказательство теоремы D можно найти в [4]. В [10] она элементарными средствами выведена из теоремы Понселе.

II. Общий принцип замыкания

В данном параграфе мы получим общую теорему о замыкании, которая дает в качестве прямых частных случаев классические теоремы A - C и их многомерные обобщения. Далее будем обозначать через $S(z,r) = \{x \in \mathbb{R}^d\,,\ |x-z| = r\}$ сферу в $\mathbb{R}^d$ радиуса r с центром в точке z; через $P(n,c) = \{x \in \mathbb{R}^d\,,\ (n,x) = c\}$ – плоскость, n – направляющий вектор, $|n| = 1, c \in \mathbb{R}$. Последовательность сфер $S(z_k, r_k), k \in \mathbb{N}$ сходится к плоскости $P(n,c)$ если $r_k \to \infty$, $z_k/|z_k| \to n$ и $(|z_k|^2 - r_k^2)/2|z_k| \to c$ при $k \to \infty$. Далее под сферой мы будем подразумевать также точку (когда $r = 0$) или плоскость, кроме случаев когда оговорено обратное (например, если явно указан радиус сферы). В частности через $S(z,r)$ обозначаются сферы или точки, но не плоскости.

Дано множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$, являющееся либо плоской квадрикой, либо подмножеством прямой линии. Для данных $a \in \mathbb{R}^d$ и $b \in \mathbb{R}$ рассмотрим семейство сфер $\{\, S(z,r) \subset \mathbb{R}^d \,\}$, заданное соотношениями

$$r^2 \;=\; |z-a|^2 + b\,, \qquad z \,\in\, \Gamma\,. \tag{1}$$

Если множество Γ неограничено, то к данному семейству добавляются одна или две предельные плоскости: если Γ – гипербола или пара прямых, то добавляются плоскости $P(n_k, c_k)$, $k = 0, 1$, где n_k – направляющие векторы асимптот гиперболы, либо пары прямых, $c_k = (n_k, a)$; если Γ – подмножество прямой, то добавляется одна плоскость $P(n,c)$, где n – направляющий вектор прямой, $c = (n,a)$.

Теорема 1 *Семейство (1) обладает свойством замыкания на любой окружности $\delta \subset \mathbb{R}^d$, которая не содержит особых точек для семейства (1) и не содержится ни в какой его сфере.*

`Доказательство` сведем к случаю $d = 2$. Все рассуждения будем проводить для сфер семейства (1), для плоскостей они доказываются предельным переходом. Считаем, что начало координат лежит на двумерной аффинной плоскости K, содержащей окружность δ. Если некоторая сфера $S(z,r)$ семейства (1) высекает на K окружность с центром z_1 и радиусом r_1, то $r^2 - |z|^2 = r_1^2 - |z_1|^2$. Следовательно, z_1, r_1 удовлетворяют условиям (1), где вместо a и Γ берутся их ортогональные проекции на K, и соответствующим образом заменяется параметр b. Таким образом, семейство окружностей, высекаемых на плоскости K сферами семейства (1), задается аналогичными условиями на K, и мы можем ограничиться случаем $d = 2$. Пусть q – центр окружности δ, R – ее радиус. Возьмем произвольную окружность γ семейства (1), пересекающую δ. Прямая l – общая хорда δ и γ. Любая точка $x \in l$ имеет равные степени относительно δ и γ, следовательно $|x-q|^2 - R^2 \;=\; |x-z|^2 - r^2$. Выражая r^2 из (1), получаем после преобразований $(x-a, z-q) \;=\; k$, где $k = \frac{R^2 - |a|^2 - |q|^2 - b}{2} + (a,q)$. Данное уравнение нетривиально ($z-q$ и k не обращаются в ноль одновременно), иначе окружность γ совпадает с δ, что по условию невозможно. Итак, получаем семейство прямых $\mathcal{L} \;=\; \{\, l(z),\ z \in \Gamma \}$, где $l(z) = l = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, (x-a, z-q) \;=\; k \,\}$. Если Γ – подмножество прямой, то все прямые $\mathcal{L}$ пересекаются в одной точке, либо все параллельны. В этом случае утверждение тривиально: для любой точки $D_1 \in \delta$, из которой можно начать процесс, период равен 2. Если Γ – квадрика, то прямые семейства $\mathcal{L}$ касаются квадрики α, которая получается из двойственной квадрики $(\Gamma - q)^*$, умножением на скаляр k и переносом на вектор a. Таким образом, в этом случае теорема следует из теоремы Понселе.

□

В следующих двух параграфах мы получим основные следствия из теоремы 1. Начнем с евклидовых пространств малых размерностей.

III. Теорема о замыкании в $\mathbb{R}^3$ и четыре классические теоремы

Пусть в $\mathbb{R}^3$ дана сфера Q и ориентированные сферы S_0, S_1, не являющиеся симметричными относительно Q (т.е. не переходят друг в друга при инверсии относительно Q). Сфера Q, а также одна из сфер S_0, S_1 могут вырождаться в точки. Рассмотрим семейство $\mathcal{M}$ сфер, касающихся S_0, S_1 и ортогональных Q. Для этого семейства в $\mathbb{R}^3$ существует не более двух особых точек (замечание 1).

Теорема 2 *Семейство $\mathcal{M}$ обладает свойством замыкания на любой окружности $\delta \subset \mathbb{R}^3$, которая не проходит через особые точки и не содержится в сфере семейства $\mathcal{M}$.*

В доказательстве будут использованы несколько известных фактов элементарной геометрии. Любая пара сфер разных радиусов S_0, S_1 имеет два центра гомотетии h_0, h_1. Для любого $i = 0, 1$ прямая, соединяющая точки касания любой сферы семейства $\mathcal{M}_i$ со сферами S_0 и S_1 проходит через h_i. Кроме того, точка h_i имеет одну и ту же степень p_i относительно всех сфер семейства $\mathcal{M}_i$.

`Доказательство теоремы 2.` С возможной инверсией можно считать, что Q, S_0 и S_1 являются сферами (не плоскостями), причем $r_0 \neq r_1$, где мы обозначаем $S_k = S(z_k, r_k)$, $k = 0, 1$. Выберем $i \in \{0, 1\}$ и рассмотрим произвольную сферу $S(z, r) \in \mathcal{M}$. Степень точки h_i относительно этой сферы равна p_i, поэтому $|z - h_i|^2 - r^2 = p_i$. Следовательно, сфера $S(z, r)$ удовлетворяет уравнению (1) при $a = h_i, b = -p_i$. Поскольку эта сфера ортогональна Q, имеем $|z - z_2|^2 = r^2 + r_2^2$, где z_2 – центр сферы Q и r_2 – ее радиус. Вычитая это уравнение из предыдущего, получаем линейное уравнение для z, определяющее некоторую плоскость $L \subset \mathbb{R}^3$. С другой стороны, центры всех сфер семейства $\mathcal{M}_i$ описывают квадрику в $\mathbb{R}^3$ с фокусами z_0, z_1. Поэтому центры z всевозможных сфер $S(z, r) \in \mathcal{M}$ лежат на пересечении данной квадрики с плоскостью L, т.е., описывают некоторую плоскую квадрику Γ. Остается применить теорему 1.

□

Элементарно показывается, что теоремы A – C являются частными случаями теоремы 2.

теорема 2 $\Rightarrow$ теорема A. В качестве S_0, S_1 берем любую пару сфер, вписанных в конус, плоским сечением которого является квадрика α, в качестве Q берется бесконечно удаленная точка.

теорема 2 $\Rightarrow$ теорема C. В этом случае Q – плоскость, в которой лежит окружность s, а сферы S_i концентричны s и имеют радиусы $|r \pm \rho|$, где r – радиус s.

теорема 2 $\Rightarrow$ теорема D. Положим Q – плоскость, в которой лежат окружности $\alpha_0, \alpha_1, \delta$, сфера S_i имеет центр на плоскости Q и пересекает ее по окружности α_i, $i = 0, 1$.

теорема 2 $\Rightarrow$ теорема B. Теорема B – частный случай теоремы D (см. § V).

Итак, теорема Понселе соответствует случаю теоремы 2, в котором Q – бесконечно удаленная точка; теорема о зигзаге – случаю, когда сферы S_0, S_1 не пересекаются и обе ортогональны сфере Q; наконец, теорема Эмха соответствует другому частному случаю, когда окружность δ лежит на сфере Q, а сферы S_0 и S_1 ортогональны Q.

Замечание 1 Для семейства $\mathcal{M}$ существует не более двух особых точек. С возможной инверсией считаем, что радиусы сфер S_0, S_1 различны. Если точка z – особая для $\mathcal{M}$, то $z \notin Q$, и прямая, соединяющая z с точкой $\tilde{z}$, инверсным образом z относительно сферы Q, проходит через h_i, причем $(h_i - z, h_i - \tilde{z}) = p_i$. Для доказательства проведем инверсию с центром в точке z (инверсные образы обозначаем штрихом). Сферы из $\mathcal{M}$, проходящие через z, переходят в плоскости, проходящие через центр сферы Q' (перпендикулярные плоскости Q' в случае $z \in Q$), касающиеся сфер S_0', S_1'. Таких плоскостей не более двух, за исключением, возможно, случая, когда центр Q' совпадает с центром гомотетии сфер S_0', S_1'. Этот случай соответствует описанному выше свойству точки z. Таких точек z – не более двух.

Отметим еще одно прямое следствие теоремы 1 – обобщение теоремы о зигзаге на пространства любой размерности.

Следствие 1 *Теорема C верна для любой пары окружностей в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющей условию **(c)**.*

`Доказательство.` Пусть s, δ – произвольная пара окружностей в $\mathbb{R}^d$, и $\rho > 0$ – длина шага зигзага. Рассмотрим семейство сфер радиуса ρ с центрами на окружности s. Оно задается уравнением (1), где $\Gamma = s$, $b = \rho^2 - r^2$, a – центр окружности s и r – ее радиус. $\square$

Замечание 2 Произвольная пара окружностей в евклидовом пространстве может быть изометрически вложена в пространство $\mathbb{R}^5$, поэтому следствие 1 достаточно было сформулировать для $d = 5$.

IV. Теорема о замыкании для сфер в $\mathbb{R}^d$

В данном параграфе мы рассмотрим другое применение теоремы 1 и получим обобщение теоремы D на пространство $\mathbb{R}^d$. Для формулировки результатов необходимо преодолеть одну техническую сложность. В теореме D фигурируют два семейства окружностей, касающихся двух данных окружностей. Для d сфер в пространстве $\mathbb{R}^d$ могут существовать уже 2^{d-1} подобных семейств сфер. Для того, чтобы их выделять будет удобнее перейти к ориентированным сферам и ориентированным плоскостям.

Ориентированной сферой $S(z, r)$ с центром $z \in \mathbb{R}^d$ и радиусом $r \in \mathbb{R}$ назовем множество точек $x \in \mathbb{R}^d$, для которых $|x - z| = |r|$. Радиус ориентированной сферы может, таким образом, принимать любые действительные значения, при этом $S(z, r)$ и $S(z, -r)$ для $r \neq 0$ считаются разными сферами, хотя соответствующие множества точек в $\mathbb{R}^d$ совпадают. Через $P(n, c)$ обозначаем ориентированную плоскость, состоящую из точек $x \in \mathbb{R}^d$, для которых $(n, x) = c$, где n – направляющий вектор, $|n| = 1, c \in \mathbb{R}$.

При этом $P(n, c)$ и $P(-n, -c)$ считаются разными плоскостями. В данном параграфе все сферы и плоскости считаем ориентированными. Сфера $S(z, r)$ касается сферы $S(z_0, r_0)$ если $|z - z_0| = |r + r_0|$, и касается плоскости $P(n, c)$, если $(z, n) + r = c$. Далее под сферой мы будем подразумевать также точку (когда $r = 0$) или плоскость, кроме случаев когда оговорено обратное (например, если явно указан радиус сферы). В частности через $S(z, r)$ обозначаются сферы или точки, но не плоскости. Набор сфер $S_i = S(z_i, r_i),\ i = 1, \ldots, d$ находится *в общем положении*, если аффинная оболочка точек $(z_i, r_i)^T \in \mathbb{R}^{d+1},\ i = 1, \ldots, d$ имеет размерность $d - 1$. Это означает, что точки $(z_i, r_i)^T$ являются вершинами $(d-1)$-мерного симплекса. Свойство общего положения инвариантно относительно сдвигов и ортогональных преобразований $\mathbb{R}^d$, однако не инвариантно относительно инверсий. Будем называть два набора сфер (среди которых могут быть плоскости) *эквивалентными*, если один получается из другого применением конечного числа движений и инверсий.

Пусть дан набор из d сфер $S_i = S(z_i, r_i)$, $i = 1, \ldots, d$. Некоторые из них, но не все одновременно, могут вырождаться в точки. Рассмотрим семейство $\mathcal{M}$ сфер, касающихся всех сфер S_i. Заметим, что при $d \geq 3$ данное семейство для некоторых наборов может быть пусть. У набора из d обычных (неориентированных) может быть вплоть до 2^{d-1} подобных семейств (в зависимости от ориентации сфер).

Теорема 3 *Дан набор из d сфер в $\mathbb{R}^d$, эквивалентный набору общего положения; пусть семейство сфер $\mathcal{M}$, касающихся данных сфер, непусто. Если окружность $\delta \subset \mathbb{R}^d$ не имеет особых точек и не содержится ни в какой сфере семейства $\mathcal{M}$, то $\mathcal{M}$ обладает свойством замыкания на δ.*

В частности, теорема верна для наборов сфер общего положения. Только для них и достаточно провести доказательство, поскольку свойство замыкания инвариантно относительно инверсий. Вначале убедимся, что “типичное” множество из d сфер и одной окружности в $\mathbb{R}^d$ удовлетворяет условиям теоремы. Для этого установим ряд вспомогательных утверждений. Любая сфера $S(z, r) \in \mathcal{M}$ удовлетворяет системе уравнений

$$r^2 \;=\; |z|^2 \,-\, 2\,(z_i, z) \,-\, 2\,r_i\,r \,+\, |z_i|^2 - r_i^2, \qquad i = 1, \ldots, d; \tag{2}$$

а плоскость $P(n, c) \in \mathcal{M}$ удовлетворяет системе

$$(z_i, n) \,+\, r_i = c, \qquad i = 1, \ldots, d. \tag{3}$$

Лемма 1 *Для набора сфер общего положения семейство $\mathcal{M}$ содержит не более двух плоскостей.*

`Доказательство.` Вычитая первое уравнение системы (3) из остальных, получаем линейную систему $(z_i - z_1, n) = r_i - r_1,\ i = 2, \ldots, d$ ранга $d - 1$. Ее решения n образуют прямую в $\mathbb{R}^d$. Прямая содержит не более двух точек таких, что $|n| = 1$.

□

Плоскости семейства $\mathcal{M}$ (если есть) являются пределами для сфер этого семейства.

Лемма 2 *Пусть $L \subset \mathbb{R}^{d+1}$ – аффинная плоскость ($\dim L \geq 1$), обладающая следующим свойством: существует сфера (или точка) $S_0 \subset \mathbb{R}^d$, касающаяся любой сферы семейства $\mathcal{L} = \left\{ S(z,r) \,\middle|\, (z,r)^T \in L \right\}$. Тогда L – прямая линия, а $\mathcal{L}$ – пучок касающихся в одной точке сфер, причем $S_0 \in \mathcal{L}$.*

`Доказательство.` Если $\dim L = 1$, то центры z всех сфер семейства $\mathcal{L}$ лежат на некоторой прямой $b \subset \mathbb{R}^d$, а радиус r линейно зависит от z. Если все сферы из $\mathcal{L}$ касаются S_0, то центр S_0 также лежит на b (иначе зависимость r от z нелинейна), следовательно, $\mathcal{L}$ – пучок касающихся сфер. В частности, сама сфера S_0 принадлежит $\mathcal{L}$. Если же $\dim L \geq 2$, то все прямые из L пересекаются в одной точке, соответствующей сфере S_0, что невозможно.

$\square$

Лемма 3 *Для набора из d сфер общего положения все особые точки семейства $\mathcal{M}$ лежат в некоторой аффинной плоскости E размерности $d-2$. В случае, когда $\mathcal{M}$ содержит две плоскости, их пересечение совпадает с E.*

`Доказательство.` Достаточно показать, что если z_0 – особая точка, то точка $(z_0, 0)^T$ принадлежит плоскости $E_0 \subset \mathbb{R}^{d+1}$ – аффинной оболочке точек $(z_i, r_i)^T,\ i = 1, \ldots, d$. Для сферы $S(z,r)$, проходящей через точку z_0, имеем $r^2 = |z|^2 - 2(z_0, z) + |z_0|^2$. Вычитая это уравнение из каждого уравнения системы (2), получаем систему

$$(z_i - z_0, z) + r_i r = \frac{1}{2}\big(|z_i|^2 - r_i^2 - |z_0|^2\big), \qquad i = 1, \ldots, d. \tag{4}$$

Если $\big(z_0, 0\big)^T \notin E_0$, то матрица этой системы имеет полный ранг d. Следовательно ее решения – точки $(z,r)^T$ образуют прямую линию $l \in \mathbb{R}^{d+1}$. Подставляя решения в первое уравнение (2), получаем квадратное уравнение. Если все его коэффициенты равны нулю, то все сферы, соответствующие решениям $(z,r)^T$, касаются сферы S_1, значит (лемма 2) они образуют пучок касающихся сфер. Тогда и все сферы S_i принадлежат этому пучку, поэтому точки $(z_i, r_i)^T$ лежат на одной прямой, что противоречит общему положению. Следовательно, полученное квадратное уравнение нетривиально и имеет не более двух решений. Поэтому существует не более двух сфер из $\mathcal{M}$, проходящих через z_0. Таким образом, если точка z_0 не принадлежит плоскости из $\mathcal{M}$, то она – неособая. Если же она принадлежит плоскости из $\mathcal{M}$, то эта плоскость, в силу (3) удовлетворяет системе уравнений: $(z_i - z_0, n) - r_i = 0,\ i = 1, \ldots, d$. Система имеет полный ранг d, а значит – не более одного решения n. Сравнив эту систему с системой (4), получаем, что прямая l параллельна вектору $(n, 1)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$. Подставляя решения $(z, r) \in l$ в первое уравнение (2) и учитывая, что $|n| = 1$, получим линейное уравнение (квадратичные члены сократятся), имеющее одно решение. Таким образом, через z_0 проходит одна плоскость и не более одной сферы из $\mathcal{M}$.

$\square$

Таким образом, если окружность δ не пересекает $(d-2)$-мерной плоскости E, то она не содержит особых точек. Взяв произвольную точку $z \in \delta$, получаем не более двух сфер из $\mathcal{M}$, проходящих через z. Если окружность δ не содержится ни в одной из них, то она не лежит ни в какой сфере из $\mathcal{M}$. Итак, в общем положении множество из d сфер и одной окружности в $\mathbb{R}^d$ действительно удовлетворяет условиям теоремы 3. Теперь мы готовы привести доказательство теоремы 3.

`Доказательство теоремы 3`. Мы покажем что семейство $\mathcal{M}$ задается соотношениями (1). Проведем доказательство для сфер семейства $\mathcal{M}$, для плоскостей (если таковые есть) оно будут следовать из предельного перехода. Предположим сначала, что среди сфер S_i найдутся две с разными радиусами (с учетом знака). Вычитая первое уравнение системы (2) из оставшихся, получим $d-1$ линейных уравнений $2(z_1-z_i,z)+2(r_1-r_i)r = \alpha_i,\ i=2,\dots,d$, где α_i – константы. Коэффициент r_1-r_i не обращается в ноль в одном из уравнений. Выразив из этого уравнения $r=r(z)$ и подставив в остальные, получим, что z удовлетворяет системе из $d-2$ линейных уравнений (ранга $d-2$). Следовательно, решения z образуют двумерную аффинную плоскость $L_0 \subset \mathbb{R}^d$. Поскольку функция $r(z)$ линейна, точки $\big(z, r(z)\big)^T$ образуют двумерную аффинную плоскость $L \subset \mathbb{R}^{d+1}$. Подставив $r(z)$ в первое уравнение системы (2), получим квадратичное, либо линейное уравнение на z. Если все точки плоскости L_0 удовлетворяют этому уравнению, то все сферы, соответствующие точкам $(z,r)^T \in L$, касаются сферы S_1, что невозможно (лемма 2). Следовательно, точки $z \in L_0$, удовлетворяющие данному уравнению, образуют плоскую квадрику (либо прямую) $\Gamma \subset L_0$. Подставив теперь $r(z)$ в правую часть первого уравнения системы (2), получим $r^2 = |z|^2 - (a,z) + c$, где $a \in \mathbb{R}^d$ и $c \in \mathbb{R}$. Выделяя полный квадрат, получаем уравнение (1). Наконец, если все r_i равны, то центры сфер семейства $\mathcal{M}$ лежат на прямой Γ и легко выписывается уравнение (1). Теперь остается применить теорему 1.

$\square$

Посмотрим теперь, что означает теорема 3 при малых размерностях d.

$\mathbf{d=2}$. Любая пара окружностей на плоскости имеет общее положение, поэтому теорема 3 дает теорему Эмха.

$\mathbf{d=3}$. Теорема 3 верна для любой тройки сфер в $\mathbb{R}^3$. Если тройка сфер $S(z_i,r_i)$, $i=1,2,3$ не имеет общего положения, то точки $(z_i,r_i)^T \in \mathbb{R}^4$ лежат на одной прямой. Тогда и центры z_i лежат на одной прямой. В этом случае, сделав инверсию относительно любой точки, не лежащей на линии центров, получаем сферы общего положения.

V. Элементарное доказательство теоремы D

Из четырех классических теорем о замыкании наиболее общей является теорема Эмха. Три другие теоремы есть, по существу, ее частные случаи. В самом деле, если окружность α_1 вырождается в точку, то после инверсии с центром в этой точке, получаем теорему A для двух окружностей. Если окружность α_0 лежит внутри α_1, а окружность δ ортогональна всем окружностям семейства $\mathcal{M}_1$, то получаем теорему B. Мы использовали тот факт, что точка h_1, центр гомотетии окружностей α_0 и α_1, имеет одинаковую степень p_1 относительно всех окружностей семейства $\mathcal{M}_1$. Поэтому окружность δ с центром h_1 и радиусом $\sqrt{p_1}$ ортогональна всем окружностям из $\mathcal{M}_1$ и содержит все их точки касания друг с другом. Наконец, если окружности α_0 и α_1 концентричны, то получаем теорему C в случае, когда окружности δ и s лежат в одной плоскости. Действительно, взяв в качестве α_0, α_1 окружности, концентрические s с радиусами $|r \pm \rho|$ (r – радиус окружности s), получаем теорему C.

Итак, для концентрических окружностей α_0, α_1 теорема D превращается в "плоский" вариант теоремы о зигзаге; в случае, когда α_0 является бесконечно удаленной точкой, получаем теорему Понселе для двух окружностей; наконец, если α_0 лежит внутри α_1, а δ ортогональна всем окружностям семейства $\mathcal{M}_1$, получаем теорему Штейнера.

В этой связи интересен вопрос о доказательстве теоремы D, которое было бы во-первых, независимым (не опиралось бы на теорему Понселе, как доказательства теоремы 3 и 2), и, во-вторых, элементарным. Мы дадим такое доказательство, использующее только средства элементарной геометрии, самыми сложными из которых будут инверсия и понятие пучка окружностей. Во избежание технических сложностей мы ограничимся следующим случаем расположения окружностей в теореме D:

(d) окружность δ лежит внутри α_1, окружность α_0 – внутри δ, и рассматривается семейство $\mathcal{M}_1$ окружностей, касающихся α_1 внутренним образом и α_0 – внешним.

Начнем с простого вспомогательного факта. Везде далее считаем, что дуга $\smile{AB}$ окружности проходится от A до B в положительном направлении, через $\overset{\smile}{AB}$ обозначаем ее угловую меру.

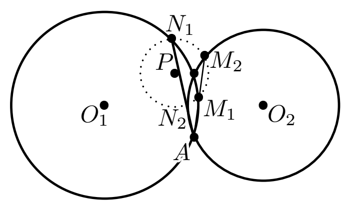

рис. 1

Лемма 4 *Две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами r_1, r_2 соответственно, пересекаются в точках A и B. Пусть P - четвертая вершина параллелограмма O_2AO_1P. Тогда для любой окружности с центром в точке P, пересекающей обе окружности (первую - в точках M_1, N_1, вторую - в точках M_2, N_2, рис. 1) имеем*

а) прямые M_1M_2 и N_1N_2 пересекаются в точке A;

б) $\frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{AN_1}{AM_2} = \frac{AM_1}{AN_2} = \frac{BM_1}{BM_2} = \frac{BN_1}{BN_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

`Доказательство.` а) Треугольники PO_1M_1 и M_2O_2P равны по трем сторонам, откуда $\angle M_1O_1P = \angle M_2O_2P$. Кроме того, $\angle PO_1B = \angle PO_2B$, поскольку O_2O_1PB - равнобедренная трапеция. Вычитая из первого равенства второе, получаем $\angle M_1O_1B = \angle M_2O_2B$, поэтому $\overset{\smile}{BM_1} = \overset{\smile}{BM_2}$. Следовательно, $\angle M_1AB = \angle M_2AB$, и значит прямая M_1M_2 проходит через точку A. С прямой N_1N_2 – аналогично.

б) Из пункта (а) следует, что хорды M_1N_1 и M_2N_2 стягивают на двух окружностях одинаковые углы $\angle M_1AN_1 = \angle M_2AN_2$, следовательно $\frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Аналогично $\frac{BM_1}{BM_2} =$

$\frac{BN_1}{BN_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Наконец, поскольку четырехугольник $M_1M_2N_1N_2$ вписанный, треугольники M_1AN_1 и N_2AM_2 подобны с коэффициентом $\frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{r_1}{r_2}$, следовательно $\frac{AN_1}{AM_2} = \frac{AM_1}{AN_2} = \frac{r_1}{r_2}$. $\square$

Напомним, что *пучком окружностей* называется множество окружностей на плоскости, ортогональных двум данным окружностям (напомним, что все окружности могут вырождаться в прямые и точки, если не оговорено обратное). В трехмерном пространстве окружностей пучки являются прямыми линиями. Любая пара окружностей $\mathbf{b}, \mathbf{c} \subset \mathbb{R}^2$ содержится ровно в одном пучке, который мы будем обозначать $\mathcal{P}\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. Для любого $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ множество точек плоскости, отношение степеней которых относительно окружностей $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ равно t, либо пусто, либо является окружностью пучка $\mathcal{P}\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

Теперь мы установим основное утверждение, имеющее, возможно, и самостоятельный интерес.

Рассмотрим две окружности с общим центром P, будем называть их большей и меньшей окружностью, а также семейства касающихся их окружностей $\mathcal{M}_j$, $j = 0, 1$. Возьмем произвольные окружности $\beta_0, \beta_1 \in \mathcal{M}_0$ и $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{M}_1$. Точки пересечения β_i и γ_k обозначим A^0_{ik} и A^1_{ik} (первая точка находится дальше второй от центра P). Проведем еще одну окружность с центром P, она пересекает каждую из окружностей β_i и γ_k в двух точках b^s_i, $s = 0, 1$ (соответственно c^s_k). При обходе окружности β_i в положительном направлении, начиная с точки ее касания с большей окружностью, сначала идет b^0_i, потом b^1_i. С точками c^s_k аналогично (рис. 2). В обозначениях теоремы 4 все верхние индексы берутся по модулю 2, например $A^2_{10} = A^0_{10}$, $c^3_1 = c^1_1$.

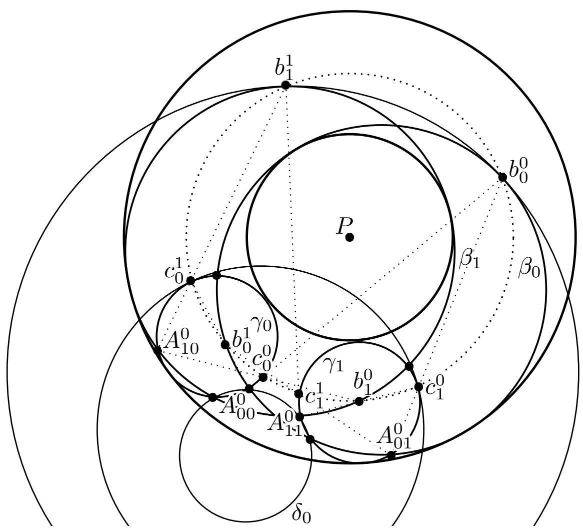

рис. 2

Теорема 4 *Рассмотрим пару окружностей с общим центром P, возьмем произвольные окружности $\beta_i \in \mathcal{M}_0, \gamma_k \in \mathcal{M}_1,\ i, k = 0, 1$. Пусть A^s_{ik} - соответствующие 8 точек их пересечения. Тогда* *а) 4 точки A_{ik}^{i+k}, $i,k \in \{0,1\}$ лежат на одной окружности (обозначим ее δ_0). То же про 4 точки A_{ik}^{i+k+1}, $i,k \in \{0,1\}$ (окружность δ_1).*

б) Проведем любую окружность с центром P; она пересекает окружности β_i, γ_k в точках b_i^s, c_k^s соответственно. Тогда для любых $i,k \in \{0,1\}$ прямые $b_i^0 c_k^0$ и $b_i^1 c_k^1$ проходят через точку A_{ik}^0.

в) Выберем $q,j \in \{0,1\}$, проведем окружность, касающуюся окружностей β_i в точках b_i^{i+q}, $i=0,1$, и окружность, касающуюся γ_k в точках $c_k^{k+q+j+1}$, $k=0,1$. Тогда эти две окружности и окружность δ_j принадлежат одному пучку.

Итак, если четыре окружности β_i, γ_k, $i,k \in \{0,1\}$ касаются двух концентрических окружностей, то восемь точек их пересечения A_{ik}^s разбиваются на две четверки, точки в каждой четверке лежат на одной окружности. При проведении третей концентрической окружности возникает еще 8 точек пересечения b_i^s, c_k^s, и выделяются 8 троек коллинеарных точек (рис. 2). Наконец, если провести две пары окружностей, касающихся β_i, γ_k в точках их пересечения с третьей окружностью, то получаем 4 тройки окружностей, принадлежащих одному пучку. Таким образом, данной конфигурации из семи окружностей соответствуют две окружности, 8 прямых и 4 пучка окружностей.

`Доказательство теоремы 4.` Пусть R и r – радиусы окружностей β_0 и γ_0 соответственно, а O_1, O_2 – их центры. Тогда $O_2 A_{00}^0 O_1 P$ – параллелограмм, длины его сторон – r и R. По лемме 4, прямые $b_0^0 c_0^0$ и $b_0^1 c_0^1$ пересекаются в точке A_{00}^0. Это доказывает пункт б) для $i=k=0$, для других индексов – аналогично.

Обозначим через $\mathbf{b}$ окружность, касающуюся β_0 и β_1 в точках b_0^0 и b_1^1 соответственно, а через $\mathbf{c}$ – окружность, касающуюся γ_0 и γ_1 в точках c_0^1 и c_1^0 соответственно. Предполагаем, что $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не вырождаются в прямые. Пусть x – радиус окружности $\mathbf{b}$, взятый со знаком плюс, если эта окружность касается β_0 внешним образом, и со знаком минус, если внутренним. Аналогично, y – радиус окружности $\mathbf{c}$, взятый со знаком. Пусть также B – вторая точка пересечения прямой $b_0^0 A_{00}^0$ с окружностью $\mathbf{b}$, а C – вторая точка пересечения прямой $c_0^1 A_{00}^0$ с окружностью $\mathbf{c}$. В силу подобия окружностей имеем $b_0^0 B = \frac{x}{R} b_0^0 A_{00}^0$, следовательно, степень точки A_{00}^0 относительно $\mathbf{b}$ равна $A_{00}^0 b_0^0 \cdot A_{00}^0 B = \big(1+\frac{x}{R}\big)\big(A_{00}^0 b_0^0\big)^2$. Аналогично, степень точки A_{00}^0 относительно $\mathbf{c}$ равна $\big(1+\frac{y}{r}\big)\big(A_{00}^0 c_0^1\big)^2$. Согласно лемме 4 имеем $A_{00}^0 b_0^0 / A_{00}^0 c_0^1 = R/r$. Следовательно, отношение степеней точки A_{00}^0 относительно окружностей $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ равно $\frac{(R+x)R}{(r+y)r}$. Проведя то же рассуждение с точками $A_{11}^0, A_{10}^1, A_{01}^1$, получаем, что у каждой из них отношение степеней относительно $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ равно $\frac{(R+x)R}{(r+y)r}$. Следовательно, эти 4 точки лежат на одной окружности (δ_0), принадлежащей пучку $\mathcal{P}\{\mathbf{b},\mathbf{c}\}$. Это доказывает пункты а) и в) для $j,q=0$. С другими j,q – аналогично.

$\square$

Следствие 2 *Для каждого $j=0,1$ в условиях теоремы 4 верно следующее: для любой окружности $\mathbf{b}$, касающейся одинаковым образом (внутренним или внешним) β_0 и β_1 существует окружность $\mathbf{c} \in \mathcal{P}\{\delta_j, \mathbf{b}\}$, касающаяся одинаковым образом γ_0 и γ_1.*

Замечание 3 Через любую точку A окружности γ_0, отличную от точек ее касания с большей и меньшей окружностью, проходит две окружности семейства $\mathcal{M}_0$. Ровно для одной из них A является ближайшей к P точкой пересечения с γ_0.

Из теоремы 4 б), в частности, следует, что *для любых $i, k \in \{0, 1\}$ прямая, соединяющая точки касания окружностей β_i, γ_k с большей окружностью, проходит через точку A^0_{ik}.* То же верно и для меньшей окружности. Нам понадобится обратное утверждение, доказательство которого будет легким упражнением для читателя:

Лемма 5 *Через точку касания окружностей α и β проводится произвольная прямая, пересекающая α и β в точках A и B соответственно, и строится окружность s, проходящая через B и касающаяся α в точке A. Тогда все окружности s касаются фиксированной окружности, концентрической α, отличной от нее, и касающейся β.*

Теперь мы формулируем утверждение, из которого непосредственно следует теорема D. Рассмотрим произвольные окружности α_0, α_1 и δ удовлетворяющие условиям **(d)** и возьмем две цепочки окружностей $\{v_k\}, \{v'_k\} \subset \mathcal{M}_1$. Пусть $\{D_k\}$ и $\{D'_k\}$ – соответствующие последовательности точек на окружности δ. Обе последовательности обходят δ в положительном направлении, и точка D'_1 лежит на дуге D_1D_2. Пусть s_k – окружность, проходящая через точки D_k, D'_k и касающаяся α_0 внешним образом.

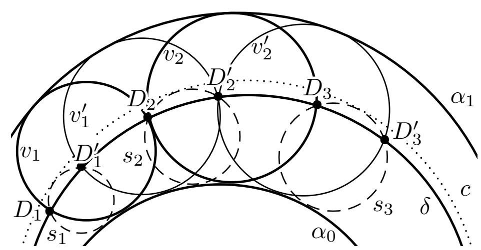

рис. 3

Предложение 1 *Все окружности $s_k, k \in \mathbb{N}$ касаются одной окружности, принадлежащей пучку $\mathcal{P}\{\delta, \alpha_1\}$.*

`Доказательство` состоит в последовательном применении теоремы 4 к парам окружностей v_k, v'_k и s_k, s_{k+1} для всех $k \geq 1$. Переводим инверсией две пары окружностей: v_1, v'_1 и s_1, s_2 в пары β_0, β_1 и γ_0, γ_1 из теоремы 4. Для этого сделаем инверсию с центром во второй точке пересечения окружностей MBK и MCL (первая точка пересечения – M), где K, M, L – точки касания окружности α_0 с s_1, s_2, v_1 соответственно, а B и C – вторые точки пересечения окружности v_1 с окружностями s_1 и s_2. Тогда (лемма 5) образы окружностей s_1, s_2, v_1 будут касаться двух концентрических окружностей, одна из которых – образ α_0. Для определенности считаем, что образ α_0 – меньшая из концентрических окружностей, а образы s_1, s_2 лежат между ними. Таким образом, s_1, s_2, v_1 перешли в окружности γ_0, γ_1 β_0, а точки D_1 и D_2 – в точки A^1_{00} и A^0_{01}. Пусть X_1, X_2 – образы точек D'_1, D'_2. Проведем через X_2 окружность β_1, касающуюся внутренним образом обеих концентрических окружностей, причем X_2 является ближайшей к центру точкой пересечения γ_1 и β_1 (замечание 3). Таким образом, $X_2 = A^1_{11}$. По теореме 4 а) точки $A^1_{00}, A^0_{01}, A^1_{11}, A^0_{10}$ лежат на одной окружности. По условию $A^1_{00}, A^0_{01}, A^1_{11}, X_1$ также лежат на одной окружности. Следовательно, $A^0_{10} = X_1$, и β_1 – образ окружности v'_1.

Итак, инверсия переводит окружности v_1, v_1', s_1, s_2 в окружности $\beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1$ соответственно. Согласно следствию 2, пучок $\mathcal{P}\{\delta, \alpha_1\}$ содержит некоторую окружность $\mathbf{c}$, которая касается одинаковым образом окружностей s_1, s_2. Она лежит между окружностями δ и α_1. В самом деле, зафиксируем точки D_1, D_2, а точку D_1' будем перемещать по дуге D_1D_2. В крайних положениях имеем: $\mathbf{c} = \delta$ при $D_1' = D_1$, и $\mathbf{c} = \alpha_1$ при $D_1' = D_2$. Окружность $\mathbf{c}$ непрерывно меняется при движении точки D_1', оставаясь в пучке $\mathcal{P}\{\delta, \alpha_1\}$. Поэтому, если для некоторого D_1' окружность $\mathbf{c}$ не лежит между δ и α_1, то существует внутренняя точка D_1' дуги D_1D_2, для которой либо $\mathbf{c} = \delta$, либо $\mathbf{c} = \alpha_1$. Ни то ни другое невозможно: для внутренней точки дуги D_1D_2 окружность s_1 не может касаться ни δ ни α_1.

Рассмотрев следующие пары окружностей v_2, v_2' и s_2, s_3, получаем окружность пучка $\mathcal{P}\{\delta, \alpha_1\}$, лежащую между δ и α_1 и касающуюся окружностей s_2 и s_3. Эта окружность совпадает с $\mathbf{c}$, поскольку в пучке $\mathcal{P}\{\delta, \alpha_1\}$ есть ровно одна окружность, лежащая между δ и α_1 и касающаяся s_2. Итак, $\mathbf{c}$ касается s_3. Так последовательно доказываем, что $\mathbf{c}$ касается всех окружностей s_k. □

`Доказательство теоремы D в случае (d).` Пусть $v_1, \ldots, v_n$ – периодическая цепочка окружностей ($v_{n+1} = v_1$), $D_1, \ldots, D_n$ – соответствующие точки на δ. Возьмем произвольную цепочку $v_1', v_2', \ldots$; пусть $D_1', D_2', \ldots$ – соответствующие точки. Не ограничивая общности, с возможной перенумерацией, считаем, что последовательности обходят окружность δ в положительном направлении, и что точка D_1' лежит на дуге D_1D_2. Построив окружности s_k, $k \geq 1$ из предложения 1, заключаем, что все они касаются некоторой окружности $\mathbf{c} \in \mathcal{P}\{\delta, \alpha_1\}$. На дуге D_1D_2 найдется единственная точка D_1' такая, что окружность, проходящая через точки D_1' и $D_{n+1} = D_1$ и касающаяся внешним образом окружности α_0 касается также и $\mathbf{c}$. Поэтому $D_{n+1}' = D_1'$ и $s_{n+1} = s_1$, что и требовалось.

□

VI. Обобщение теоремы D

Метод, использованный нами в предыдущем параграфе, позволяет получить обобщение теоремы Эмха на несколько пучков окружностей, аналогичное большой теореме Понселе [11, теорема 16.6.7]. Мы сформулируем его только для одного случая взаимного расположения окружностей.

Пусть дана окружность δ и две последовательности окружностей $\{\alpha_0^k\}$ и $\{\alpha_1^k\}$. Каждая из последовательностей $\{\alpha_i^k\}$ принадлежит одному пучку $\mathcal{A}_i$, $i = 0, 1$, содержащему δ, при этом все окружности $\{\alpha_0^k\}$ лежат внутри δ, и δ лежит внутри всех окружностей $\{\alpha_1^k\}$. Обозначим через $\mathcal{M}_1^k$ семейство окружностей, касающихся α_1^k и α_0^k с индексом 1 (α_0^k извне и α_1^k изнутри).

Выбирается произвольная точка $D_1 \in \delta$ и через нее проводится окружность $v_1 \in \mathcal{M}_1^1$. Далее берем D_2 – вторую точку пересечения v_1 с окружностью δ и проводим через нее окружность $v_2 \in \mathcal{M}_1^2$ и т.д. На каждом шаге v_k выбирается таким образом, что последовательность $\{D_k\}$ обходит окружность δ в положительном направлении.

Теорема 5 *Если процесс, начинающийся в некоторой точке D_1, имеет период $n \geq 3$, причем все точки $D_1, \ldots, D_n$ различны, то он имеет тот же период для любой начальной точки.*

Доказательство проводится так же, как для теоремы D, с использованием следующего аналога предложения 1. Даны две цепочки окружностей $\{v_k\}$ и $\{v'_k\}$, где $v_k, v'_k \in \mathcal{M}_1^k$ $k \in \mathbb{N}$, и соответствующие последовательности точек $\{D_k\}$ и $\{D'_k\}$ на окружности δ, причем D'_1 лежит на дуге D_1D_2. Выберем произвольную окружность $\alpha_0 \in \mathcal{A}_0$, лежащую внутри δ и обозначим через s_k окружность, проходящую через точки D_k, D'_k и касающаяся α_0 внешним образом. Тогда все s_k, $k \in \mathbb{N}$ касаются одной окружности, принадлежащей пучку $\mathcal{A}_0$. Доказательство этого утверждения проводится так же как и для предложения 1, и мы оставляем его читателю.

Автор признателен А.Акопяну за помощь в подготовке рисунков для данной статьи.

Список литературы

[1] P.A.Griffiths and J.Haris, *On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism*, L'Enseigment Math., 24 (1978), 31-40.

[2] W.Barth and J.Michel, *Modular curves and Poncelet Polygons*, Mathem.Ann., 295 (1993), 25-49.

[3] W.L.Black, H.C.Howland and B.Howland, *A theorem about zigzags between two circles*, Amer. Math. Monthly, 81 (1974), 754-757.

[4] W.Barth and Th.Bauer, *Poncelet theorems*, Expositiones Mathematicae, 14 (1996), 125-144.

[5] V.Burskii and A.Zhedanov, *The Dirichlet and the Poncelet problems*, RIAM Symp., 2004, 22-24.

[6] J.V.Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris 1865, (first ed. in 1822).

[7] O.Bottema, *Ein Schliessungssatz für zwei Kreise*, Elem. Math., 20 (1965), 1-7.

[8] A.Hraskó, *Poncelet-type problems, an elementary approach*, Elem.Math., 55 (2000), 45-62.

[9] A.Emch, *An application of elliptic functions to Peaucellier's link-work (inversor)*, Ann.Math., ser. 2, vol. 2 (1901), 60-63.

[10] В.Протасов, *Об одном обобщении теоремы Понселе*, Успехи мат.наук, 61 (2006), No 6, 187-188.

[11] М.Берже, *Геометрия*, М. Мир (1984).