Девятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2013 г.

Решения задач

8 класс. Первый день

8.1. (*Н. Москвитин*) В пятиугольнике $ABCDE$ углы ABC и AED — прямые, $AB = AE$ и $BC = CD = DE$. Диагонали BD и CE пересекаются в точке F. Докажите, что $FA = AB$.

Решение. *Первый способ.* Из условия задачи следует, что прямоугольные треугольники ABC и AED равны, то есть треугольник ACD — равнобедренный (см. рис. 8.1а). Тогда $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = \angle EDA + \angle ADC = \angle CDE$. Следовательно, равнобедренные треугольники BCD и CDE равны. Таким образом, $\angle CBD = \angle CDB = \angle ECD = \angle DEC$.

Из того, что треугольник CFD — равнобедренный, и из равенства отрезков BD и CE получим, что $BF = FE$. Следовательно, $\triangle ABF = \triangle AEF$. Тогда $\angle AFB = \frac{\angle BFE}{2} = \frac{180^\circ - 2\angle FCD}{2} = 90^\circ - \angle ECD = 90^\circ - \angle DBC = \angle ABF$, откуда $AB = AF$, что и требовалось.

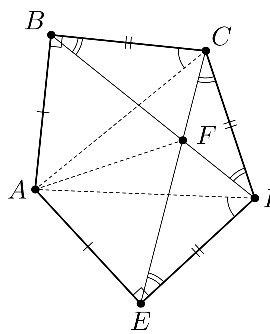


Рис. 8.1а

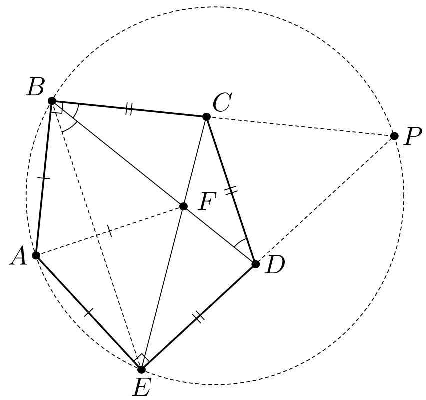


Рис. 8.1б

Второй способ. Пусть BC пересекает DE в точке P (см. рис. 8.1б). Треугольник ABE — равнобедренный, следовательно, $\angle ABE = \angle AEB$. Тогда в четырехугольнике $BCDE$ равны стороны BC и DE и углы CBE и DBE, поэтому этот четырехугольник — равнобокая трапеция. Следовательно, $\angle CBD = \angle CDB = \angle DBE$, то есть BD — биссектриса $\angle CBE$. Значит, F — инцентр $\triangle PBE$. Из симметрии и вписанности $PBAE$ получаем, что точка A — середина дуги BE описанной окружности $\triangle PBE$, а, значит, по лемме о трезубце $AF = AB$, что и требовалось.

8.2. (*Д. Швецов*) Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Биссектриса угла O_1AO_2 повторно пересекает окружности в точках C и D. Докажите, что центр описанной окружности треугольника CBD равноудалён от точек O_1 и O_2.

Решение. *Первый способ.* Не умаляя общности предположим, что C лежит на отрезке AD. Пусть P — точка пересечения прямых O_1C и O_2D (см. рис. 8.2). Треугольник AO_1C — равнобедренный, поэтому $\angle O_1CA = \angle O_1AC = \angle CAO_2$, следовательно, $O_1C \parallel AO_2$. Аналогично получаем, что $O_1A \parallel O_2D$. Таким образом, O_1AO_2P — параллелограмм.

Докажем, что четырехугольник $BCPD$ — вписанный, а O_1O_2PB — равнобокая трапеция, из чего и будет следовать утверждение задачи. Действительно, тогда точка O (центр описанной окружности треугольника BCD) будет равноудалена от точек B и P, а, следовательно, равноудалена и от точек O_1 и O_2.

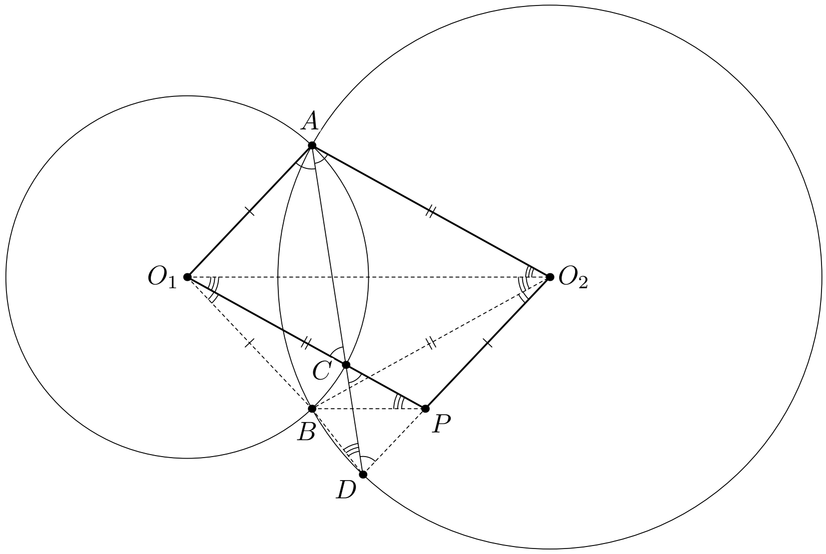


Рис. 8.2

Заметим, что $O_1P = AO_2 = BO_2$ и $O_1B = O_1A = O_2P$, то есть треугольники BO_1P и PO_2B равны. Следовательно, $\angle BO_1P = \angle PO_2B$, откуда O_1O_2PB — вписанный четырехугольник. Тогда $\angle O_1O_2B = \angle O_1PB$.

С другой стороны, $\angle BDA = \frac{1}{2}\angle AO_2B = \angle AO_2O_1 = \angle O_1O_2B$ и $\angle O_2O_1P = \angle AO_2O_1$. Следовательно, $\angle BDA = \angle O_1PB = \angle O_2O_1P$, то есть $BCPD$ — вписанный и $O_1O_2 \parallel BP$. Поскольку $O_1B = O_2P$, то O_1O_2PB — равнобокая трапеция.

Второй способ. Пусть O — центр описанной окружности треугольника CBD. Так как $OO_1 \perp BC$, $O_1O_2 \perp AB$, то $\angle OO_1O_2 = \angle ABC = \frac{\angle AO_1C}{2}$. Аналогично $\angle OO_2O_1 = \frac{\angle AO_2D}{2}$. Но, как показано в предыдущем решении, $\angle AO_1C = \angle AO_2D$.

8.3. (*Б. Френкин*) В выпуклом многоугольнике из каждой вершины опущены перпендикуляры на все не смежные с ней стороны. Может ли оказаться так, что основание каждого перпендикуляра попало на продолжение стороны, а не на саму сторону?

Ответ: нет.

Решение. Пусть AB — наибольшая сторона многоугольника. Спроецируем все вершины, отличные от A и B, на AB (см. рис. 8.3). Если ни одна из проекций не попадает на отрезок AB, то проекция некоторой стороны s, отличной от AB, строго содержит AB, следовательно $s > AB$ — противоречие.

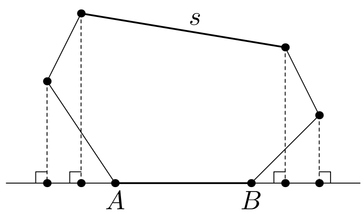


Рис. 8.3

8.4. (*А. Заславский*) Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке L. В треугольнике ABL отметили точку пересечения высот H, а в треугольниках BCL, CDL и DAL — центры O_1, O_2 и O_3 описанных окружностей. Затем весь рисунок, кроме точек H, O_1, O_2, O_3, стерли. Восстановите его.

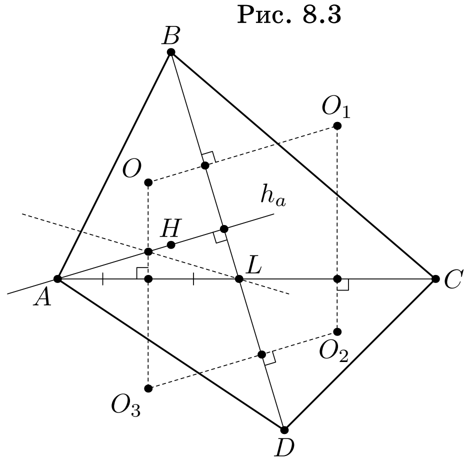


Рис. 8.4

Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника LAB (см. рис. 8.4). Тогда прямые OO_1 и O_2O_3 перпендикулярны BD, а прямые O_1O_2 и O_3O перпендикулярны AC. Следовательно, мы можем восстановить серединные перпендикуляры OO_1 и OO_3 к сторонам LB, LA треугольника LAB. Прямые h_a, h_b, проходящие через ортоцентр H этого треугольника и параллельные OO_1 и OO_3, являются высотами этого треугольника, то есть проходят через точки A и B соответственно. Поэтому прямые, симметричные h_a, h_b относительно соответственно OO_3, OO_1, пересекаются в точке L. Дальнейшее построение очевидно.

Девятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2013 г.

Решения задач

8 класс. Второй день

8.5. (*Б. Френкин*) Высота AA', медиана BB' и биссектриса CC' треугольника ABC пересекаются в точке K. Известно, что $A'K = B'K$. Докажите, что и отрезок $C'K$ имеет ту же длину.

Решение. Так как точка K лежит на биссектрисе угла C, расстояние от нее до прямой AC равно расстоянию до BC, то есть, KA' (см. рис. 8.5). Поскольку $KA' = KB'$, отсюда следует, что $KB' \perp AC$. Значит, медиана BB' является также высотой и $AB = BC$. Тогда BK и CK — биссектрисы треугольника, следовательно AK — тоже биссектриса, а поскольку AK — высота, то $AB = AC$. Таким образом, треугольник ABC — равносторонний и $A'K = B'K = C'K$.

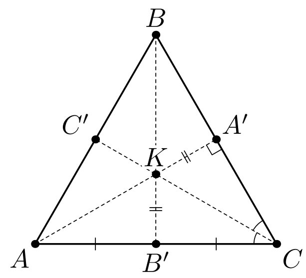
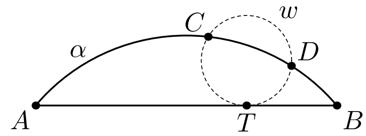


Рис. 8.5

8.6. (*Ф. Нилов*) На отрезке AB построена дуга α (см. рис.). Окружность ω касается AB в точке T и пересекает α в точках C и D. Лучи AC и TD пересекаются в точке E, лучи BD и TC — в точке F. Докажите, что прямые EF и AB параллельны.



Решение. Докажем, что четырехугольник $CDEF$ — вписанный (см. рис. 8.6), из чего будет следовать утверждение задачи. Действительно, тогда $\angle FEC = \angle FDC$ и $\angle FDC = 180^\circ - \angle BDC = \angle CAB$, то есть $FE \parallel AB$.

Поскольку AB — касательная к окружности ω, то $\angle TCD = \angle BTD$. Кроме того, $\angle FCE = \angle ACT = \angle ACD - \angle TCD = (180^\circ - \angle ABD) - \angle BTD = \angle TDB = \angle FDE$. Следовательно, $CDEF$ — вписанный четырехугольник, что и требовалось.

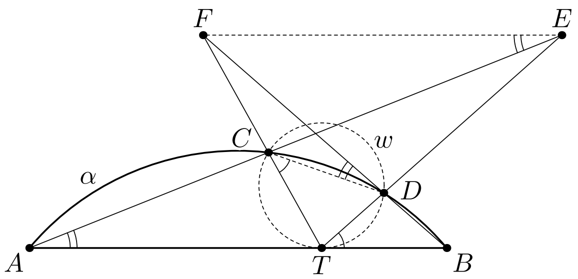


Рис. 8.6

8.7. (*Б. Френкин*) Три окружности касаются друг друга извне и касаются четвертой окружности изнутри. Их центры были отмечены, а сами окружности стерты. Оказалось, что невозможно установить, какая из отмеченных точек — центр объемлющей окружности. Докажите, что отмеченные точки образуют прямоугольник.

Решение. Пусть O_0 и R_0 — соответственно центр и радиус объемлющей окружности, O_1, O_2, O_3 и R_1, R_2, R_3 — центры и радиусы остальных. Тогда $O_0O_i = R_0 - R_i$ ($i = 1,\ 2,\ 3$), $O_iO_j = R_i + R_j$ ($i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ i \neq j$). Отсюда $O_0O_1 - O_2O_3 = O_0O_2 - O_3O_1 = O_0O_3 - O_1O_2 = R_0 - R_1 - R_2 - R_3 := d$.

Пусть d не равно нулю, например, $d > 0$. Тогда расстояние от O_0 до любой из точек O_1, O_2, O_3 больше, чем расстояние между остальными двумя точками. Это определяет O_0 однозначно, вопреки условию. Действительно, если в каждой из пар (O_0O_1, O_2O_3), (O_0O_2, O_1O_3), и (O_0O_3, O_1O_2) раскрасить длинный отрезок в красный цвет, а короткий — в синий, то O_0 — единственная точка, в которой сходятся три отрезка одного цвета. Аналогично, если $d < 0$.

Если же $d = 0$, то в несамопересекающемся четырёхугольнике, образованном данными точками, противоположные стороны равны и диагонали равны. Значит, это прямоугольник.

8.8. (*И. Дмитриев*) Пусть P — произвольная точка на дуге AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точки B. Биссектриса угла APB пересекает биссектрису угла BAC в точке P_a; биссектриса угла CPB пересекает биссектрису угла BCA в точке P_c. Докажите, что для всех точек P центры описанных окружностей треугольников PP_aP_c лежат на одной прямой.

Решение. Прежде всего заметим, что прямые PP_a, PP_c вторично пересекают описанную окружность треугольника в серединах C', A' дуг AB, BC (см. рис. 8.8). Поэтому $\angle P_aPP_c = \dfrac{\angle A + \angle C}{2} = 180^\circ - \angle AIC$, где I — центр вписанной окружности треугольника. Значит, окружность PP_aP_c всегда проходит через точку I. Зафиксируем теперь какое-нибудь положение точки P и найдем вторую точку J пересечения окружностей PP_aP_c и ABC. Для любой другой точки P' имеем $\angle JP'P'_c = \angle JP'A' = 180^\circ - \angle JPA' = 180^\circ - \angle JPP_c = \angle JIP_c = \angle JIP'_c$ (если P и P' расположены, как на рис. 8.8, в других случаях рассуждения аналогичны), то есть окружность $P'P'_aP'_c$ также проходит через J. Следовательно, центры всех окружностей PP_aP_c лежат на серединном перпендикуляре к отрезку IJ.

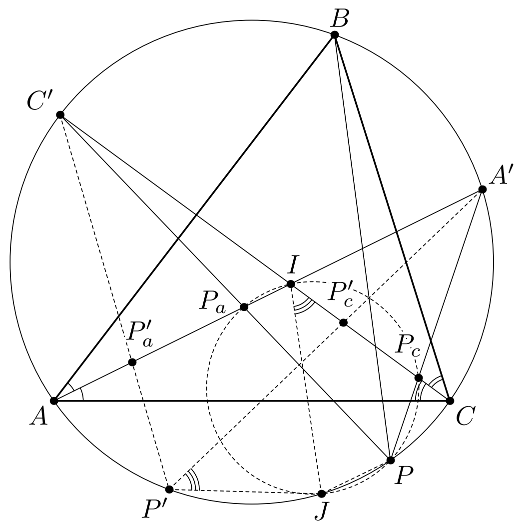


Рис. 8.8

Примечание. Рассмотрим “полувписанную окружность” ω (касающуюся отрезков BA, BC и дуги APC). В частном случае, когда P — точка касания окружностей ω и (ABC), видим, что J совпадает с P. Отсюда получаем описание точки J как точки касания с полувписанной окружностью. Как известно (см., например, параграф “Полувписанная окружность” книги «Математика в задачах»), J также лежит на прямой IS, где S — середина дуги ABC.

Девятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2013 г.

Решения задач

9 класс. Первый день

9.1. (*Д. Швецов*) Пятиугольник $ABCDE$, все углы которого тупые, вписан в окружность ω. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке E_1; продолжения сторон BC и DE — в точке A_1. Касательная, проведённая в точке B к описанной окружности треугольника BE_1C, пересекает ω в точке B_1; аналогично определяется точка D_1. Докажите, что $B_1D_1 \parallel AE$.

Решение. Отметим вне окружности на луче B_1B точку M, а на луче D_1D точку N (см. рис. 9.1). По теореме об угле между касательной и хордой равны углы MBE_1 и BCE_1, а также NDA_1 и DCA_1. Используя равенство вертикальных углов, получим, что $\angle ABB_1 = \angle MBE_1 = \angle BCE_1 = \angle DCA_1 = \angle NDA_1 = \angle EDD_1$. Следовательно, дуги AD_1 и EB_1 равны, откуда и следует утверждение задачи.

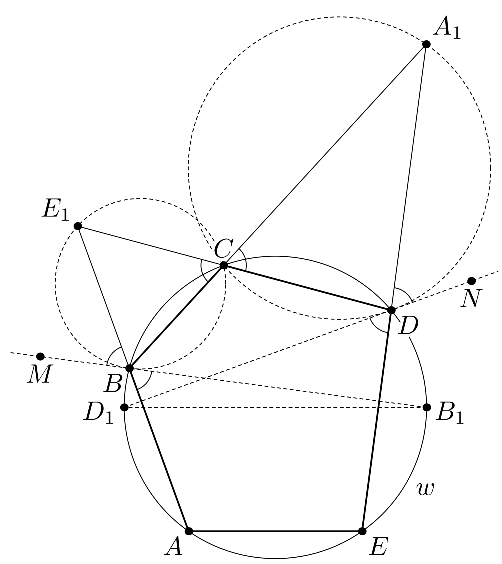


Рис. 9.1

9.2. (*Ф. Нилов*) Две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Точки C и D, лежащие соответственно на ω_1 и ω_2 по разные стороны от прямой AB, равноудалены от этой прямой. Докажите, что точки C и D равноудалены от середины отрезка O_1O_2.

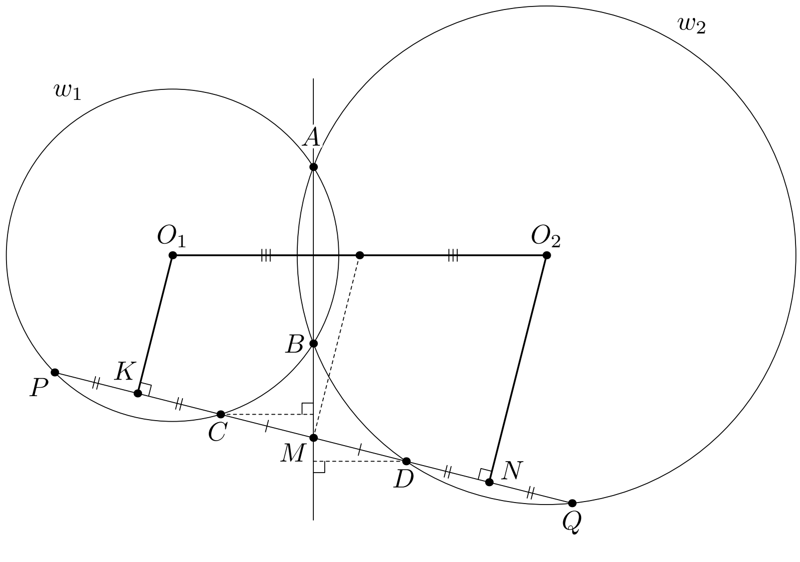


Рис. 9.2

Решение. Точки C и D равноудалены от прямой AB. Следовательно, прямая AB проходит через середину M отрезка CD (см. рис. 9.2). Пусть прямая CD вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно. По теореме о секущих к окружности $MC \cdot MP = MB \cdot MA = MD \cdot MQ$. Учитывая, что $MC = MD$, получим, что $MP = MQ$ и $PC = DQ$. Пусть K и N — середины отрезков PC и DQ соответственно. Тогда M — середина KN. Средняя линия прямоугольной трапеции O_1KNO_2 является серединным перпендикуляром к отрезку CD. Следовательно, точки C и D равноудалены от середины отрезка O_1O_2.

9.3. (*И. Богданов*) Длина каждой стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ не меньше 1 и не больше 2. Его диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что $S_{AOB} + S_{COD} \leqslant 2(S_{AOD} + S_{BOC})$.

Решение. Достаточно доказать, что одно из отношений $\frac{AO}{OC}$ и $\frac{BO}{OD}$ не меньше $\frac{1}{2}$ и не больше 2. Действительно, если, скажем, отношение $\frac{AO}{OC}$ такое, то $S_{AOB} \leqslant 2S_{BOC}$ и $S_{COD} \leqslant 2S_{AOD}$, откуда и следует требуемое. Докажем теперь этот факт.

Без ограничения общности можно считать, что $AO \leqslant OC$, $BO \leqslant OD$. Предположим противное: пусть $AO < \frac{OC}{2}$, $BO < \frac{OD}{2}$. Отложим на отрезках OC, OD соответственно отрезки $OA' = 2OA$, $OB' = 2OB$ (см. рис. 9.3). Тогда $A'B' = 2AB \geqslant 2$, и точки A', B' лежат на сторонах треугольника COD (не совпадая с вершинами). Значит, отрезок $A'B'$ меньше одной из сторон этого треугольника. Оценим стороны треугольника COD.

По условию $CD \leqslant 2$. Поскольку точка O лежит между B и D, то отрезок CO не больше одной из сторон CB и CD, следовательно, $CO \leqslant 2$ и, аналогично, $DO \leqslant 2$. Отрезок $A'B'$ должен быть меньше одной из этих сторон, но $A'B' \geqslant 2$. Получили противоречие.

Примечание. Равенство достигается, например, на следующем (вырожденном) четырёхугольнике. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $1 \leqslant AB, BC \leqslant 2$ и $AC = 3$, и выберем точку D на отрезке AC так, что $CD = 1$, $DA = 2$.

Из решения нетрудно видеть, что для невырожденных четырёхугольников неравенство строгое.

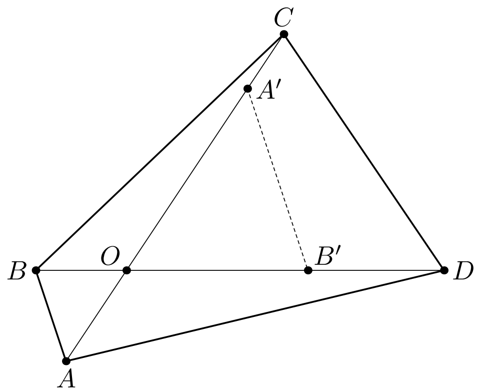


Рис. 9.3

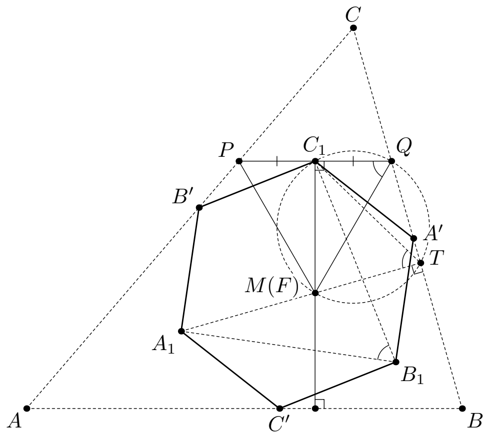


Рис. 9.4а

9.4. (*Н. Белухов, Болгария*) Дан треугольник ABC и точка F, такая что $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA$. Прямая, проходящая через F и перпендикулярная BC, пересекает медиану, проведенную из вершины A, в точке A_1. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Докажите, что A_1, B_1 и C_1 являются тремя вершинами правильного шестиугольника, три другие вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC.

Решение. *Первый способ.* Будем рисовать данную конфигурацию с конца. Возьмем правильный шестиугольник $A_1B'C_1A'B_1C'$ и такую точку M внутри треугольника $A_1B_1C_1$, что $\angle B_1MC_1 = 180-\alpha$, $\angle C_1MA_1 = 180-\beta$, $\angle A_1MB_1 = 180-\gamma$, где α, β и γ — углы треугольника ABC (эта точка лежит внутри $\triangle A_1B_1C_1$, потому что F лежит внутри $\triangle ABC$). Пусть прямые, проходящие через A', B' и C' и перпендикулярные A_1M, B_1M и C_1M, образуют $\triangle ABC$ (см. рис. 9.4а). Очевидно, что он подобен данному треугольнику. Значит, осталось показать, что AA_1, BB_1 и CC_1 являются его медианами, а M — точкой Торричелли (то есть $M \equiv F$).

Пусть прямая, проходящая через C_1 и параллельная AB, пересекает CA и CB в точках P и Q соответственно. Построим точку $T = A_1M \cap CB$. Так как $\angle A_1TA' = 90^\circ$, T лежит на описанной окружности шестиугольника $A_1B'C_1A'B_1C'$ и четырехугольник MC_1QT вписанный. Следовательно, $\angle C_1QM = \angle C_1TM = \angle C_1TA_1 = \angle C_1B_1A_1 = 60^\circ$. Аналогично, $\angle QPM = 60^\circ$, то есть треугольник MPQ равносторонний, а C_1 — середина PQ. Рассмотрев гомотетию с центром C, получаем, что CC_1 — медиана, а CM проходит через третью вершину равностороннего треугольника с основанием AB и, значит, через точку Торричелли.

Второй способ. Пусть A_p — первая точка Аполлония (см. рис. 9.4б). Известно, что ее педальный треугольник $A_0B_0C_0$ правильный. Точки Аполлония и Торричелли изогонально сопряжены. Следовательно, их педальные треугольники имеют общую описанную окружность ω.

Определим точку A_1. Пусть E — проекция F на BC, тогда E лежит на ω. Прямая EF пересекает ω вторично в точке A_1. Угол A_0EA_1 — прямой, следовательно, A_0A_1 — диаметр. Аналогично определяются точки B_1 и C_1. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_0B_0C_0$ центрально симметричны относительно центра окружности ω. Следовательно, шестиугольник $A_1B_0C_1A_0B_1C_0$ правильный. Осталось доказать, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на соответствующих медианах. Это можно сделать так же, как в первом решении.

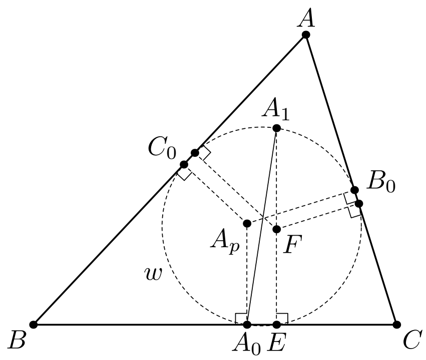


Рис. 9.4б

О свойствах педальных (подерных) треугольников см., например, В. В. Прасолов «Задачи по планиметрии», §10. Подерный треугольник.

Девятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2013 г.

Решения задач

9 класс. Второй день

9.5 (*В. Ясинский*) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки E и F. Прямые EF и BC пересекаются в точке S. Точки M и N — середины отрезков BC и EF соответственно. Прямая, проходящая через вершину A и параллельная MN, пересекает BC в точке K. Докажите, что $\frac{BK}{CK} = \frac{FS}{ES}$.

Решение. Проведем через F и E прямые, параллельные AK и пересекающие BC в точках P и Q (см. рис. 9.5). По теореме Фалеса $PM = MQ$, значит $CP = BQ$ и

$$\frac{BK}{CK} = \frac{CP}{CK} \cdot \frac{BK}{BQ} = \frac{CF}{CA} \cdot \frac{BA}{BE}.$$

Применив теперь теорему Менелая к треугольнику AFE и прямой CB, получим

$$\frac{CF}{CA} \cdot \frac{BA}{BE} \cdot \frac{ES}{FS} = 1,$$

что и требовалось доказать.

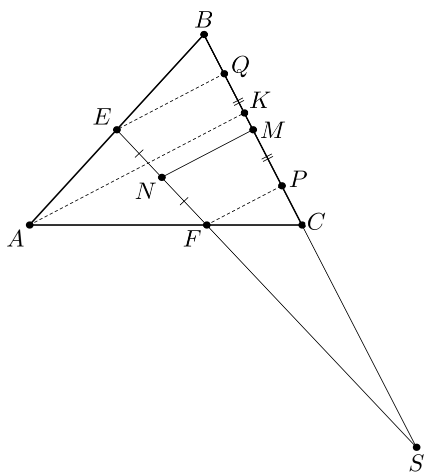


Рис. 9.5

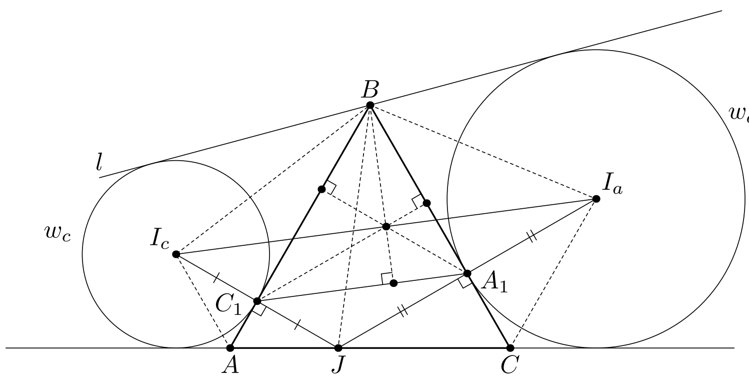


Рис. 9.6

9.6 (*Д. Швецов, Ю. Зайцева, А. Соколов*) Через вершину B правильного треугольника ABC проведена прямая l. Окружность ω_a с центром I_a касается стороны BC в точке A_1 и прямых l, AC. Окружность ω_c с центром I_c касается стороны BA в точке C_1 и прямых l, AC. Докажите, что ортоцентр треугольника A_1BC_1 лежит на прямой I_aI_c.

Решение. Так как $\angle BAI_c = \angle BCI_a = 60^\circ$, точки, симметричные I_c, I_a относительно BA, BC соответственно, лежат на прямой AC. С другой стороны, $\angle ABI_c + \angle CBI_a = 60^\circ = \angle ABC$, следовательно, прямые, симметричные BI_c, BI_a относительно AB, BC, пересекают AC в одной и той же точке J (см. рис. 9.6). Значит, A_1C_1 — средняя линия треугольника JI_aI_c. Тогда высоты треугольника A_1BC_1 из вершин A_1, C_1, параллельные радиусам I_cC_1, I_aA_1 соответственно, тоже являются средними линиями этого треугольника и пересекаются в середине отрезка I_aI_c.

9.7 (*А. Карлюченко*) Пусть O — одна из точек пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Окружность w с центром O и произвольным радиусом пересекает ω_1 в точках A и B, а ω_2 — в точках C и D. Пусть X — точка пересечения прямых AC и BD. Докажите, что все такие точки X лежат на одной прямой.

Решение. *Первый способ.* Пусть K — вторая точка пересечения ω_1 и ω_2 (см. рис. 9.7а). Для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что $\angle OKX = 90^\circ$.

По условию задачи $OA = OB = OC = OD$. Следовательно, треугольники AOB и COD равнобедренные. Пусть α и β — углы при их основаниях соответственно. Тогда, по свойству вписанных углов, имеем $\angle BKC = \angle BKO + \angle CKO = \angle BAO + \angle CDO = \alpha + \beta$. Учитывая, что четырехугольник $ACBD$ вписанный, получим цепочку равенств $\angle BXC = 180^\circ - \angle XBC - \angle XCB = 180^\circ - \angle CAD - \angle ADB = 180^\circ - \frac{1}{2}(\smile AB + \smile CD)$, где AB и CD — дуги окружности с центром O, $\smile AB = 180^\circ - 2\alpha$, $\smile CD = 180^\circ - 2\beta$. Следовательно, $\angle BXC = \angle BKC$, т.е. четырехугольник $BXKC$ вписанный. Значит, $\angle XKB = \angle XCB = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \alpha$. Таким образом, $\angle OKX = \angle BKX + \angle BKO = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

Случай, когда точки C и D меняются местами, рассматривается аналогично.

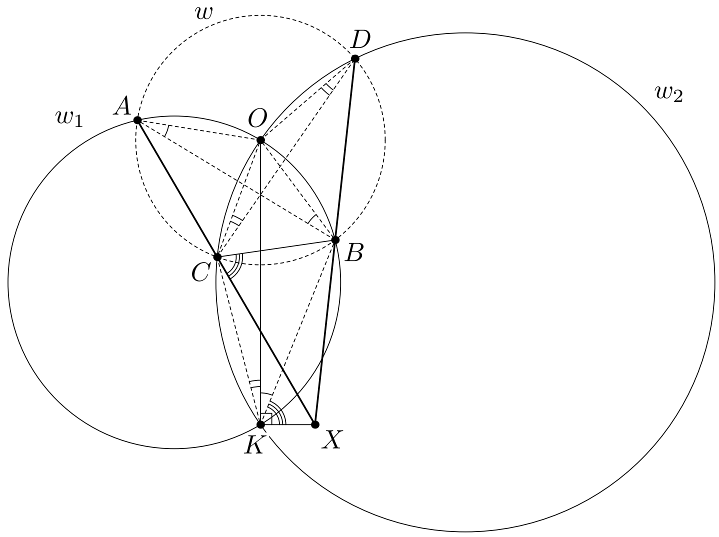


Рис. 9.7а

Второй способ. Пусть OP и OQ — диаметры ω_1 и ω_2 (см. рис. 9.7б). Докажем, что все такие точки X лежат на прямой PQ.

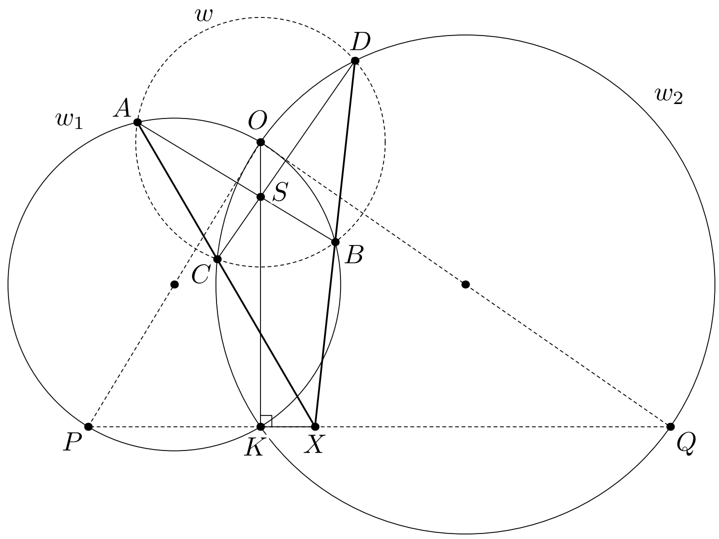


Рис. 9.7б

Рассмотрим инверсию относительно окружности w. Тогда w_1 перейдет в AB, а w_2 — в CD, следовательно, точка K перейдет в точку S пересечения AB и CD. Кроме того, $PQ \perp OS$, то есть, PQ — поляра точки S относительно окружности w. С другой стороны, X (как точка пересечения AC и BD) также лежит на поляре точки S. Следовательно, X принадлежит PQ.

Определение и свойства поляры см., например, Я.П. Понарин, Элементарная геометрия, том 1, §18.

9.8 (*В. Протасов*) Три велосипедиста ездят по кольцевой дороге радиуса 1 км против часовой стрелки с постоянными различными скоростями. Верно ли, что, если они будут кататься достаточно долго, то найдется момент, когда расстояние между любыми двумя из них будет больше 1 км?

Ответ: нет.

Решение. Если изменить скорости велосипедистов на одну и ту же величину, то расстояния между ними в любой момент времени останутся такими же. Поэтому можно считать, что первый велосипедист стоит на месте в некоторой точке A.

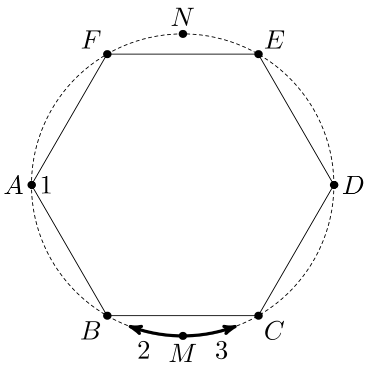


Рис. 9.8а

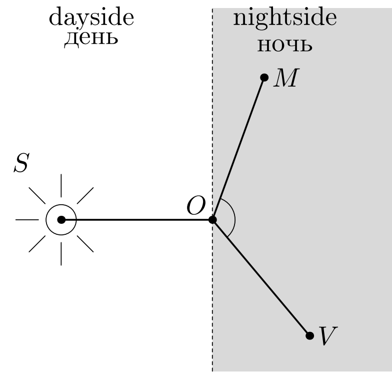


Рис. 9.8б

Впишем в данную окружность правильный шестиугольник $ABCDEF$ и обозначим через M и N середины дуг BC и EF соответственно. Пусть второй и третий велосипедисты стартуют из точки M с равными скоростями в противоположных направлениях: второй — к точке B, третий — к точке C. Пока они не достигли этих точек, расстояние между ними меньше 1 км. Затем второй велосипедист будет удален от первого, то есть, от точки A, меньше, чем на 1 км., пока не приедет в точку F. Одновременно третий приедет в точку E, и расстояние между вторым и третьим станет равно 1 км. Затем оно уменьшается, пока велосипедисты не встретятся в точке N. Получили расположение, симметричное первоначальному относительно прямой AD, с переменой местами второго и третьего велосипедистов. Далее процесс повторяется.

Примечание. Можно показать, что построенный пример — единственный, с точностью до прибавления к скоростям велосипедистов одной и той же величины. Он соответствует случаю, когда скорости образуют арифметическую прогрессию. Во всех остальных случаях обязательно найдется момент времени, когда расстояния между велосипедистами не только больше 1 км, но даже больше $\sqrt{2}$ км! Это следует из теоремы, доказательство которой мы оставляем читателю:

Теорема. *Если в условии задачи* 9.8 *скорости велосипедистов не составляют арифметическую прогрессию, то найдется момент времени, когда три радиуса, проведенные к велосипедистам, образуют тупые углы.*

Пользуясь этим фактом, античные астрономы могли бы строго обосновать невозможность геоцентрической системы мира. Причем для этого достаточно было бы рассмотреть движения только трех небесных тел: Солнца, Венеры и Меркурия.

Обозначим их точками S, V, M соответственно. Предположим, что они вращаются вокруг Земли (точки O) по круговым орбитам. Считаем, что они вращаются в одной плоскости (в реальности плоскости их орбит почти совпадают). Их угловые скорости различны и не составляют арифметическую прогрессию (это известно). Тогда, в некоторый момент времени, все три угла между лучами OS, OM и OV тупые. Предположим, наблюдатель находится на поверхности Земли в точке, противоположной направлению луча OS. Он находится на неосвещенной стороне Земли, т. е., ночью, и видит Меркурий и Венеру, поскольку углы SOM и SOV — тупые. Угловое расстояние между двумя этими планетами, угол MOV, больше 90°. Однако, по данным многолетних наблюдений, которыми располагали античные астрономы, угловое расстояние между Меркурием и Венерой никогда не превосходит 76°. Полученное противоречие доказывает невозможность геоцентрической системы с круговыми орбитами.

Девятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2013 г.

Решения задач
10 класс. Первый день

10.1 (*В. Ясинский*) Окружность k проходит через вершины B и C треугольника ABC ($AB > AC$) и пересекает продолжения сторон AB и AC за точки B и C в точках P и Q соответственно. Пусть AA_1 — высота треугольника ABC. Известно, что $A_1P = A_1Q$. Докажите,что угол PA_1Q в два раза больше угла A треугольника ABC.

Решение. Поскольку $\angle A_1AP = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \angle AQP$, луч AA_1 проходит через центр O описанной окружности треугольника APQ (см. рис. 10.1). Этот центр также лежит на серединном перпендикуляре ℓ к отрезку PQ. Поскольку $AB \neq AC$, прямые AO и ℓ не параллельны. Но и O, и A_1 являются их общими точками; значит, $A_1 = O$. Следовательно, вписанный угол PAQ равен половине центрального угла PA_1Q.

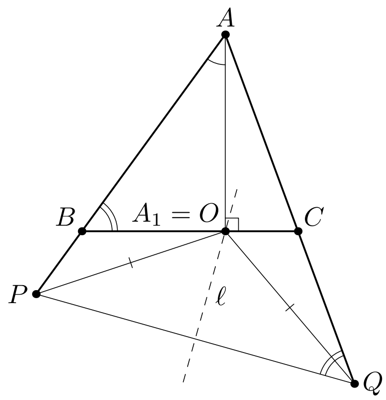


Рис. 10.1

10.2 (*А. Полянский*) В описанном четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD \neq BC$. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке L. Докажите, что угол ALB острый.

Решение. Предположим, что $\angle ALB \geqslant 90^\circ$. Тогда $AB^2 \geqslant AL^2 + BL^2$ и $CD^2 \geqslant CL^2 + DL^2$; отсюда же получаем $AD^2 \leqslant AL^2 + DL^2$ и $BC^2 \leqslant BL^2 + CL^2$. Значит, $2AB^2 = AB^2 + CD^2 \geqslant AD^2 + BC^2$.

С другой стороны, из описанности имеем $2AB = AB + CD = BC + AD$. Значит, $AD \neq BC$, и

$$2(AD^2 + BC^2) = (AD + BC)^2 + (AD - BC)^2 > (2AB)^2 = 4AB^2.$$

Противоречие.

10.3 (*А. Карлюченко*) Пусть X — такая точка внутри треугольника ABC, что $XA \cdot BC = XB \cdot AC = XC \cdot AB$; I_1, I_2, I_3 — центры вписанных окружностей треугольников XBC, XCA и XAB соответственно. Докажите, что прямые AI_1, BI_2 и CI_3 пересекаются в одной точке.

Решение. *Первый способ.* Пусть $ABCX'$ — тетраэдр, в котором

$$AB \cdot CX' = BC \cdot AX' = CA \cdot BX'. \qquad (*)$$

Обозначим через I'_a, I'_b и I'_c центры вписанных окружностей треугольников BCX', ACX' и ABX'. Из $(*)$ следует, что биссектрисы AI'_b и BI'_a углов $X'AC$ и $X'BC$ пересекают отрезок $X'C$ в одной точке. Значит, отрезки AI'_a и BI'_b пересекаются. Аналогично, каждый из них пересекается с отрезком CI'_c. Поскольку эти три отрезка некомпланарны, они пересекаются в одной общей точке.

Устремив X' к X вдоль окружности, по которой пересекаются три сферы Аполлония для пар точек (A, B), (B, C), (A, C), получим утверждение задачи.

Второй способ. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а A_1, B_1 и C_1 — основания соответствующих биссектрис в этом треугольнике. Пусть прямая CI_3 пересекает XI в точке T_c; точки T_a и T_b определим аналогично. Мы собираемся доказать, что $T_a = T_b = T_c$.

Поскольку $\frac{XB}{XA} = \frac{BC}{AC}$, биссектриса XI_3 угла BXA проходит через C_1. Применяя теорему Менелая к $\triangle XIC_1$ и используя свойство биссектрисы AI_3 угла XAC_1, имеем

$$\frac{XT_c}{T_cI} = \frac{XI_3}{I_3C_1} \cdot \frac{C_1C}{CI} = \frac{XA}{AC_1} \cdot \frac{C_1C}{CI} = \frac{XA}{CI} \cdot \frac{C_1C}{AC_1} = \frac{XA}{CI} \cdot \frac{\sin A}{\sin(C/2)}.$$

Аналогично получаем

$$\frac{XT_b}{T_bI} = \frac{XA}{BI} \cdot \frac{\sin A}{\sin(B/2)}.$$

Но $\frac{BI}{CI} = \frac{\sin(C/2)}{\sin(B/2)}$, откуда $\frac{XT_c}{T_cI} = \frac{XT_b}{T_bI}$, что и требовалось.

10.4 (*Н. Белухов*) Дан бумажный треугольник, площадь которого равна $1/2$, а квадраты всех сторон — целые числа. Докажите, что в него можно завернуть квадрат с площадью $1/4$ (треугольник можно сгибать, но нельзя резать).

Решение. 1. Будем называть *элементарным* треугольник с площадью $\frac{1}{2}$ и целыми квадратами сторон. Элементарный треугольник со сторонами 1, 1, и $\sqrt{2}$ обозначим через Δ.

Назовем *переклейкой* операцию разрезания $\triangle ABC$ по медиане AM и склеивания получившихся треугольников ABM и ACM по равным отрезкам BM и CM в новый треугольник со сторонами AB, AC и $2AM$.

2. Покажем, что из любого элементарного треугольника δ можно переклейками получить Δ.

Прежде всего заметим, что переклейка переводит элементарный треугольник в элементарный: площадь не меняется, а из формулы медианы $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ следует, что целочисленность квадратов сторон тоже сохраняется.

Будем теперь переклеивать произвольный элементарный треугольник δ следующим образом: если у δ есть тупой угол, то будем разрезать его по медиане из этого угла. Тогда наибольшая сторона треугольника будет уменьшаться, и так как квадраты сторон целые, то когда-нибудь мы получим элементарный треугольник δ', являющийся прямоугольным или остроугольным. В этом случае синус наибольшего угла не меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому произведение сторон, прилегающих к нему, не больше $\frac{2}{\sqrt{3}} < \sqrt{2}$; значит, они обе единичные, а тогда угол между ними — прямой. Таким образом, мы получили Δ.

3. Если δ' получен переклейками из δ, то и δ можно получить переклейками из δ'. Следовательно, любой элементарный треугольник δ может быть получен переклейками из Δ.

4. Будем называть треугольник δ *оберткой*, если квадрат со стороной $\frac{1}{2}$ можно завернуть в δ так, чтобы любые две точки, лежащие на одной стороне δ и равноудаленные от середины этой стороны, совместились.

Из треугольника Δ можно получить обертку, перегнув его по средним линиям, параллельным катетам.

Предположим, что треугольник $\delta = ABC$ является оберткой, и пусть AM — одна из его медиан. Рассмотрим способ заворачивания в нее квадрата, склеим в нём все пары точек стороны BC, равноудаленные от M, и разрежем ее вдоль AM. В результате получим, что переклейка $\triangle ABC$ по медиане AM также является оберткой. Отсюда, вкупе с пунктом 3, следует утверждение задачи.

Замечание 1. Как нетрудно видеть из решения, следующие условия эквивалентны:

(a) $\triangle ABC$ элементарный;

(b) Существует треугольник, равный $\triangle ABC$, с целыми координатами вершин;

(c) Существуют такие шесть целых чисел p, q, r, s, t, u, что $p+q+r = s+t+u = 0$ и $p^2+s^2 = AB$, $q^2 + t^2 = BC$, $r^2 + u^2 = CA$.

Замечание 2. Равносильность условий (b) и (c) очевидна. То, что условие (a) также им равносильно, можно показать и по-другому. Можно воспользоваться методами теории чисел, стартовав с формулы Герона: согласно ей, для элементарного треугольника со сторонами $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ верно равенство $2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) = 1$. Можно показать — например, методом спуска — что все её решения удовлетворяют (c).

Другой метод состоит в следующем. Рассмотрим наш треугольник ABC и породим им решётку (т. е. отложим от точки A всевозможные векторы вида $k\overrightarrow{AB} + \ell\overrightarrow{AC}$ с целыми k и ℓ). Используя формулу косинусов, нетрудно понять, что расстояния между любыми точками этой решётки — корни из целых чисел. Из условия на площадь теперь следует, что минимальная площадь параллелограмма с вершинами в точках решётки равна 1; теперь, рассмотрев такой параллелограмм наименьшего диаметра, нетрудно убедиться, что он — единичный квадрат[1].

Эта же решётка помогает после этого получить другое решение задачи. Для удобства совершим гомотетию с коэффициентом 2; тогда наш треугольник имеет чётные координаты вершин и площадь 2, и надо завернуть в него единичный квадрат. Раскрасим теперь клетчатую плоскость шахматным образом и расположим на ней решётку из наших треугольников; вершинами треугольников будут все точки с чётными координатами. Заметим, что все треугольники разбиения разбиты на два класса: получающиеся из исходного параллельным переносом, и получающиеся из него центральной симметрией.

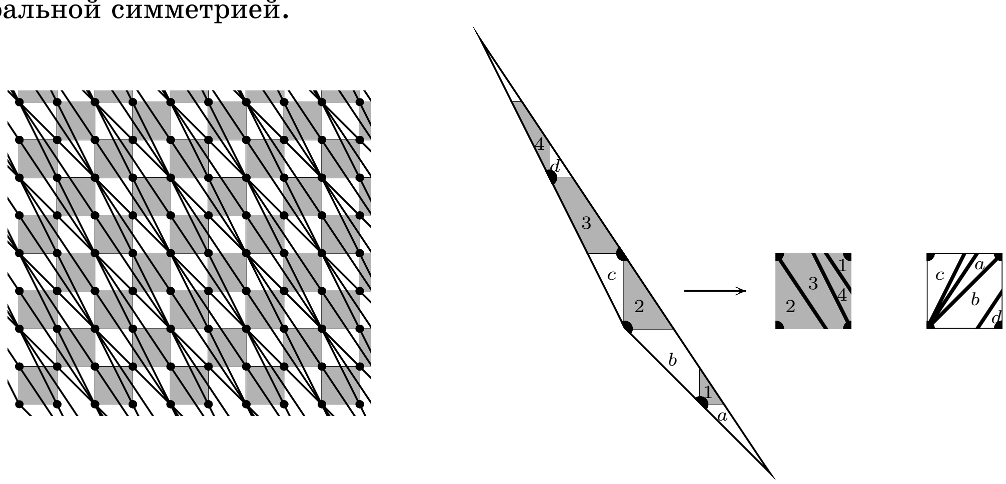


Рис. 10.4

Будем теперь оборачивать (чёрный) квадрат с вершиной в одной из вершин нашего треугольника этим треугольником, сгибая его по сторонам квадрата. На чёрную сторону попадут все части треугольника из чёрных частей плоскости; при этом части из строк с чётными номерами претерпят параллельный перенос, а с нечётными — центральную симметрию.

С другой стороны, все чёрные квадраты в строках с чётными номерами разбиты одинаково, а разбиение остальных чёрных квадратов получается из предыдущего центральной симметрией. Такая симметрия меняет местами два класса треугольников разбиения. Теперь нетрудно понять, что наш чёрный квадрат окажется замощён полностью: те его части, которые попадают в треугольники первого класса, будут накрыты параллельными переносами частей исходного треугольника, остальные — симметриями остальных его частей. То же произойдёт и с обратной стороной нашего квадрата.

[1] См. также по этому поводу задачу 10.7 с финала V олимпиады им. Шарыгина, 2009 г.

Девятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2013 г.

Решения задач

10 класс. Второй день

10.5 (*Д. Швецов*) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Точки E и F — середины не содержащих других вершин дуг AB и CD соответственно. Прямые, проходящие через точки E и F параллельно диагоналям четырехугольника $ABCD$, пересекаются в точках K и L. Докажите, что прямая KL содержит точку O.

Решение. Пусть K — точка пересечения прямой, проходящей через E параллельно AC, и прямой, проходящей через F параллельно BD (см. рис. 10.5). Заметим, что

$$\measuredangle(KE, EF) = \measuredangle(AC, EF) = \frac{\smile{CF} + \smile{AE}}{2} = \frac{\smile{FD} + \smile{EB}}{2} = \measuredangle(BD, EF) = \measuredangle(KF, EF).$$

Это значит, что треугольник KEF равнобедренный, $KE = KF$. Значит, параллелограмм $EKFL$ — ромб, и KL — серединный перпендикуляр к EF. Поэтому KL проходит через O.

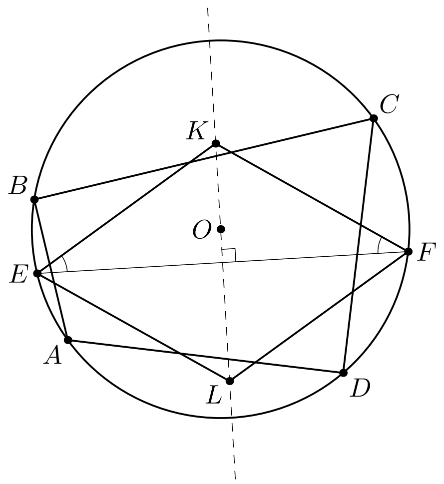


Рис. 10.5

10.6 (*Д. Прокопенко*) В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Из точки H провели перпендикуляры к прямым B_1C_1 и A_1C_1, которые пересекли лучи CA и CB в точках P и Q соответственно. Докажите, что перпендикуляр из точки C к прямой A_1B_1 проходит через середину отрезка PQ.

Первое решение. Пусть N — проекция точки C на A_1B_1 (см. рис. 10.6а). Рассмотрим гомотетию с центром в точке C, при которой H перейдет в C_1, P — в P_1, Q — в Q_1. Тогда $C_1P_1 \perp C_1B_1$, и $C_1Q_1 \perp C_1A_1$, и достаточно доказать, что прямая CN проходит через середину P_1Q_1.

Пусть K и L — проекции точек P_1 и Q_1 на прямую A_1B_1. Как известно, $\angle CB_1A_1 = \angle AB_1C_1$; значит, $\angle P_1B_1K = \angle P_1B_1C_1$, и прямоугольные треугольники P_1B_1K и $P_1B_1C_1$ равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда $B_1K = B_1C_1$. Аналогично, $A_1L = A_1C_1$, то есть длина отрезка KL равна периметру $2p$ треугольника $A_1B_1C_1$.

Поскольку C — центр вневписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, точка N — точка касания этой окружности с A_1B_1, и $B_1N = p - B_1C_1$. Тогда $KN = B_1C_1 + p - B_1C_1 = p$. Следовательно, N — середина отрезка KL. Наконец, поскольку прямые P_1K, CN и Q_1L параллельны, по теореме Фалеса прямая CN проходит через середину P_1Q_1, что и требовалось.

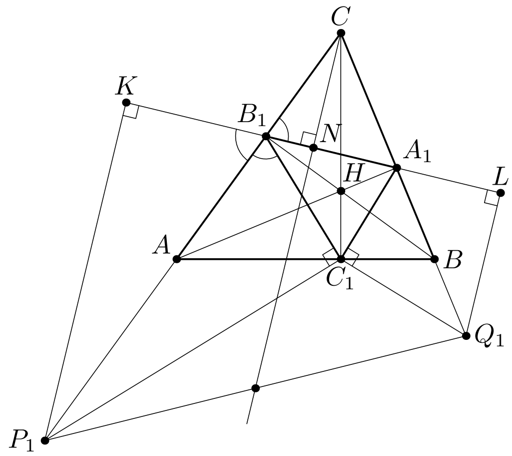


Рис. 10.6а

Второе решение. Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$; тогда $\angle ACC_1 = 90^\circ - \alpha$, $\angle BCC_1 = 90^\circ - \beta$. Поскольку $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$, имеем $\angle HPC = 90^\circ - \angle AB_1C_1 = 90^\circ - \beta$ и, аналогично, $\angle HQC = 90^\circ - \alpha$. Наконец, пусть перпендикуляр из C на A_1B_1 пересекает PQ в точке X (см. рис. 10.6б). Тогда $\angle PCX = 90^\circ - \beta$, $\angle QCX = 90^\circ - \alpha$.

Нам нужно доказать, что CX — медиана в $\triangle CPQ$; поскольку $\angle PCX = \angle QCH$, это равносильно тому, что CH — симедиана. Итого, мы свели задачу к следующему известному факту (см. А. Акопян, «Геометрия в картинках», задача 4.4.6).

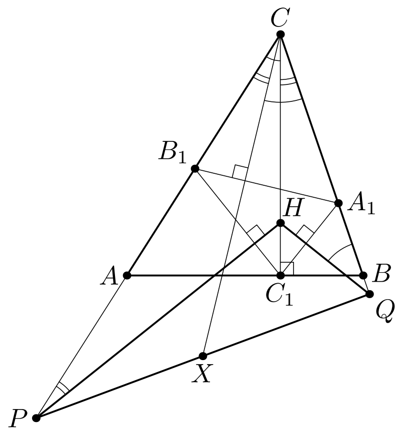


Рис. 10.6б

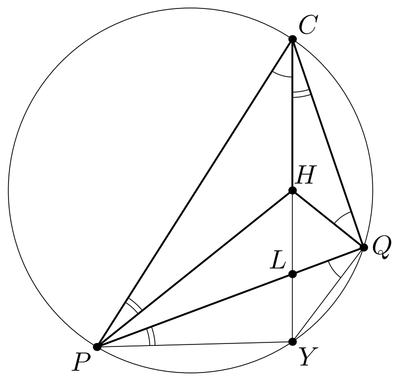


Рис. 10.6в

Лемма. *Пусть в треугольнике CPQ точка H такова, что $\angle CPH = \angle QCH$ и $\angle CQH = \angle PCH$. Тогда CH — симедиана в этом треугольнике.*

Доказательство. Пусть L — точка пересечения CH и PQ (см. рис. 10.6в). Тогда HL — биссектриса угла PHQ. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Заметим, что треугольники PHC и CHQ подобны по двум углам. Следовательно, $\frac{PH}{CH} = \frac{CH}{HQ} = \frac{PC}{CQ}$, откуда $\frac{PC^2}{CQ^2} = \frac{PH}{CH} \cdot \frac{CH}{HQ} = \frac{PH}{HQ} = \frac{PL}{LQ}$. Таким образом, CH — симедиана по определению.

Второй способ. Пусть описанная окружность треугольника CPQ пересекает CH вторично в точке Y (см. рис. 10.6в). Тогда $\angle QPY = \angle QCY = \angle CPH$, аналогично, $\angle PQY = \angle CQH$. Следовательно, биссектрисы углов HPL и CPY совпадают, равно как и биссектрисы углов HQL и CQY. Поскольку HY — биссектриса угла PHQ, то биссектрисы углов CPY и CQY пересекаются на CY. Следовательно, $\frac{PC}{PY} = \frac{QC}{QY}$, то есть четырёхугольник $CPYQ$ — гармонический. Отсюда и следует требуемое утверждение.

Замечание. Из второго способа доказательства леммы следует также, что H — середина CY.

10.7 (*Б. Френкин*) В пространстве отмечены 5 точек. Известно, что это центры сфер, четыре из которых попарно касаются извне и касаются изнутри пятой сферы. При этом невозможно определить, какая точка является центром объемлющей сферы. Найдите отношение радиусов наибольшей и наименьшей сферы.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$.

Решение. Пусть O и O' — два возможных положения центра большой сферы (среди данных пяти точек), а A, B, C — три оставшиеся отмеченные точки.

Рассмотрим точки O, O', A, B. Пусть в конфигурации, когда O — центр большой сферы, радиусы сфер с соответствующими центрами равны R, r', r_a и r_b. Тогда $OO' = R-r'$, $OA = R-r_a$, $OB = R-r_b$, $O'A = r'+r_a$, $O'B = r'+r_b$, $AB = r_a+r_b$, откуда получаем $OO'-AB = OA - O'B = OB - O'A$; обозначим эту разность через d. Аналогично, из конфигурации, в которой O' — центр большой сферы, имеем $d = OO' - AB = O'A - OB = O'B - OA = -d$. Значит, $d = 0$, то есть $OO' = AB$, $OA = O'B$, $OB = O'A$.

Рассматривая аналогично четвёрки точек (O, O', A, C) и (O, O', B, C), мы получаем $OO' = AB = AC = BC$ и $OA = O'B = OC = O'A = OB = O'C$. Итак, треугольник ABC — правильный (пусть его сторона равна $2\sqrt{3}$), а правильные пирамиды $OABC$ и $O'ABC$ равны; значит, O и O' симметричны относительно (ABC). Кроме того, $OO' = 2\sqrt{3}$, то есть высота каждой пирамиды равна $\sqrt{3}$. Пусть H — общее основание этих высот, тогда $HO = HO' = \sqrt{3}$ и $HA = HB = HC = 2$, откуда $OA = O'A = \sqrt{7}$. Значит, радиусы трёх сфер с центрами в A, B, C равны $\sqrt{3}$, а радиусы остальных двух сфер равны $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}+\sqrt{3}$, откуда и следует ответ.

10.8 (*А. Заславский*) Даны две окружности, одна из которых лежит внутри другой. Из произвольной точки C внешней окружности проведены касательные к внутренней, вторично пересекающие внешнюю в точках A и B. Найдите геометрическое место центров вписанных окружностей треугольников ABC.

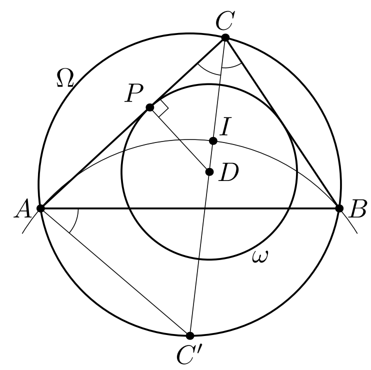


Рис. 10.8

Решение. Обозначим через R и r радиусы внешней (Ω) и внутренней (ω) окружностей, соответственно, а через D — центр ω (см. рис. 10.8). Пусть C' — середина дуги AB окружности Ω, не содержащей точку C, а I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Тогда точки I и D лежат на CC', а по лемме о трезубце имеем $C'I = C'A = 2R\sin\angle ACC'$.

С другой стороны, если P — точка касания AC с ω, то $\sin\angle ACC' = \dfrac{PD}{CD} = \dfrac{r}{CD}$; кроме того, произведение $d = CD\cdot C'D$ — это минус степень D относительно Ω, то есть оно постоянно. Значит, $C'I = \dfrac{2Rr}{CD} = \dfrac{C'D\cdot 2Rr}{d}$, откуда

$$\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{C'D} - \overrightarrow{C'I} = \overrightarrow{C'D}\cdot\left(1-\frac{2Rr}{d}\right).$$

Итак, точка I лежит на окружности, полученной из Ω гомотетией с центром D и коэффициентом $\dfrac{2Rr}{d}-1$.

Наоборот, для любой точки I этой окружности можно восстановить точки C и C' как точки пересечения ID с Ω; при этом точка C' выбирается как образ I при обратной гомотетии. Для полученной точки C точка I является требуемым центром; значит, каждая точка полученной окружности подходит.

Замечание. Если $2Rr = d$, то полученная окружность вырождается в точку; в этом случае из приведённого решения легко получить *формулу Эйлера* для расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей.