VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Седьмой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

В олимпиаде могут участвовать школьники 8–11 классов. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов (на момент проведения олимпиады) она предназначена. Впрочем, можно решать также задачи и для более старших классов (решенные задачи для младших классов при подведении итогов не учитываются).

Решения задач на русском языке должны быть посланы не позднее 1 апреля 2011 года. Решения следует присылать по электронной почте в форматах pdf, doc или jpg на адрес geomolymp@mccme.ru. При этом во избежание потери работы нужно соблюдать следующие правила.

1. Каждую работу следует посылать отдельным письмом с уведомлением о получении. Объем письма не должен превышать 10 Мб.

2. Если работа содержится в нескольких файлах, желательно присылать их в виде архива. Если объем работы слишком большой, разбейте ее на несколько архивных файлов и пошлите каждый отдельным письмом.

3. В теме письма нужно написать «работа на олимпиаду им. Шарыгина», а в тексте привести следующие сведения об участнике:

- фамилию, имя, отчество;

- полный почтовый адрес с индексом, телефон, E-mail;

- класс, в котором сейчас учится школьник;

- номер и адрес школы;

- ФИО учителей математики и/или руководителей кружка.

Если у Вас нет возможности прислать работу в электронном виде, пришлите ее простой бандеролью (или принесите сами) в обычной тетради, не сворачивая тетрадь в трубку, по адресу: *119002, Москва Г-002, Большой Власьевский пер., д. 11., МЦНМО. На олимпиаду им. Шарыгина.* На обложке тетради **обязательно** укажите все сведения, перечисленные выше в п.3.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая аккуратные чертежи. Если задача на вычисления, в конце ее решения должен быть отчетливо выделенный ответ. Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении какой-то известной теоремой или фактом, приведенным в задаче из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему или факт Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и не обязательно) указать в работе, какие задачи Вам понравились. Жюри будет интересно узнать Ваше мнение.

Ваши работы будут тщательно проверены, и Вы получите (не позднее конца мая 2011 г.) ответ жюри. Победители заочного тура — учащиеся 8–10 классов будут приглашены на финальный тур, который состоится летом 2011 года в г. Дубна под Москвой. Победители заочного тура — выпускники школ получат Грамоты оргкомитета олимпиады.

1. (8) Существует ли выпуклый семиугольник, который можно разрезать на 2011 равных треугольников?

2. (8) В треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$, $AC = 6$ проведена биссектриса угла A. Из вершины B опущен на эту биссектрису перпендикуляр BH. Найдите MH, где M — середина BC.

3. (8) В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$. Серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает прямую AC в точке C_1. Серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает прямую AB в точке B_1. Докажите, что прямая B_1C_1 касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

4. (8) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA', BB', CC'. Известно, что в треугольнике $A'B'C'$ эти прямые также являются биссектрисами. Верно ли, что треугольник ABC равносторонний?

5. (8) В треугольнике ABC проведен серединный перпендикуляр к стороне AB до пересечения с другой стороной в некоторой точке C'. Аналогично построены точки A' и B'. Для каких исходных треугольников треугольник $A'B'C'$ будет равносторонним?

6. (8) Даны две единичные окружности ω_1 и ω_2 пересекающиеся в точках A и B. На окружности ω_1 взяли произвольную точку M, а на окружности ω_2 точку N. Через точки M и N провели еще две единичные окружности ω_3 и ω_4. Обозначим повторное пересечение ω_1 и ω_3 через C, повторное пересечение окружностей ω_2 и ω_4 через D. Докажите, что $ACBD$ параллелограмм.

7. (8–9) На сторонах AB и AC треугольника ABC выбрали точки P и Q так, что $PB = QC$. Докажите, что $PQ < BC$.

8. (8–9) Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90^\circ$), касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. A_2, C_2 — точки, симметричные точке B_1 относительно прямых BC, AB соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2, C_1C_2 пересекаются на медиане треугольника ABC.

9. (8–9) Точка H – ортоцентр треугольника ABC. Касательные, проведённые к описанным окружностям треугольников CHB и AHB в точке H, пересекают прямую AC в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $A_1H = C_1H$.

10. (8–9) В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. На боковой стороне CD выбрана точка M, а на основаниях BC и AD — точки P и Q так, что отрезки MP и MQ параллельны диагоналям трапеции. Докажите, что прямая PQ проходит через точку O.

11. (8–10) Вневписанная окружность прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) касается стороны BC в точке A_1, а прямой AC в точке A_2. Прямая A_1A_2 пересекает (первый раз) окружность, вписанную в треугольник ABC в точке A'; аналогично определяется точка C'. Докажите, что $AC || A'C'$.

12. (8–10) Пусть AP и BQ — высоты данного остроугольного треугольника ABC. Постройте циркулем и линейкой на стороне AB такую точку M, чтобы $\angle AQM = \angle BPM$.

13. а) (8–10) Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников, вершины которых лежат на сторонах данного треугольника (по одной вершине внутри каждой стороны).

    б) (11) Найдите геометрическое место центров тяжести тетраэдров, вершины которых лежат на гранях данного тетраэдра (по одной вершине внутри каждой грани).

14. (9) В треугольнике ABC высота и медиана из вершины A образуют (вместе с прямой BC) треугольник, в котором биссектриса угла A является медианой, а высота и медиана из вершины B образуют (вместе с прямой AC) треугольник, в котором биссектриса угла B является биссектрисой. Найдите отношение сторон треугольника ABC.

15. (9–10) Дана окружность с центром O и радиусом 1. Из точки A к ней проведены касательные AB и AC. Точка M, лежащая на окружности, такова, что четырехугольники $OBMC$ и $ABMC$ имеют равные площади. Найдите MA.

16. (9–10) Дан треугольник ABC и прямая l. Прямые, симметричные l относительно AB и AC пересекаются в точке A_1. Точки B_1, C_1 определяются аналогично. Докажите, что

    а) прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке;

    б) эта точка лежит на описанной около треугольника ABC окружности;

    в) точки, построенные указанным способом для двух перпендикулярных прямых, диаметрально противоположны.

17. (9–11) а) Существует ли треугольник, в котором наименьшая медиана длиннее, чем наибольшая биссектриса?

    б) Существует ли треугольник, в котором наименьшая биссектриса длиннее, чем наибольшая высота?

18. (9–11) На плоскости проведены n прямых общего положения, т.е. никакие две прямые не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Эти прямые разрезали плоскость на несколько частей. Какое

    а) наименьшее;

    б) наибольшее

    количество углов может быть среди этих частей?

19. (9–11) Существует ли неравнобедренный треугольник, у которого медиана, проведенная из одной вершины, биссектриса, проведенная из другой, и высота, проведенная из третьей, равны?

20. (9–11) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD. Докажите, что $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда $IM : AC = IN : BD$.

21. (10–11) На окружности с диаметром AC выбрана произвольная точка B, отличная от A и C. Пусть M, N — середины хорд AB, BC, а P, Q — середины меньших дуг, стягиваемых этими хордами. Прямые AQ и BC пересекаются в точке K, а прямые CP и AB — в точке L. Докажите, что прямые MQ, NP и KL пересекаются в одной точке.

22. (10–11) Из вершины C треугольника ABC проведены касательные CX, CY к окружности, проходящей через середины сторон треугольника. Докажите, что прямые XY, AB и касательная в точке C к окружности, описанной около треугольника ABC, пересекаются в одной точке.

23. (10–11) Дан треугольник ABC и прямая l, пересекающая BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Точка A' — середина отрезка, соединяющего проекции A_1 на AB и AC. Аналогично определяются точки B' и C'.

    а) Докажите, что A', B' и C' лежат на некоторой прямой l'.

    б) Докажите, что, если l проходит через центр описанной окружности $\triangle ABC$, то l' проходит через центр его окружности девяти точек.

24. (10–11) Дан остроугольный треугольник ABC. Найдите на сторонах BC, CA, AB такие точки A', B', C', чтобы наибольшая сторона треугольника $A'B'C'$ была минимальна.

25. (10–11) Три равных правильных тетраэдра имеют общий центр. Могут ли все грани многогранника, являющегося их пересечением, быть равны?