

РЕШЕНИЯ

9.1. (А.А.Заславский) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр O которой лежит внутри него. Доказать, что, если $\angle BAO = \angle DAC$, то диагонали четырехугольника перпендикулярны.

Решение. Так как $\angle ABO = (\pi - \angle AOB)/2 = \pi/2 - \angle ADB$, $\angle DAC + \angle ADB = \pi/2$, что равносильно утверждению задачи (рис.9.1).

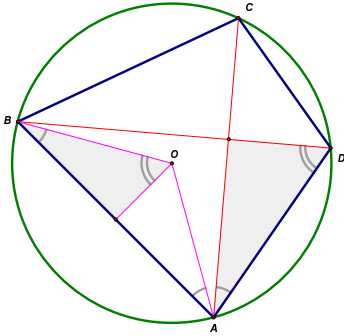


Рис.9.1

9.2. (Л.А.Емельянов) Найти все равнобедренные треугольники, которые нельзя разрезать на три равнобедренных треугольника с одинаковыми боковыми сторонами.

Решение. Остроугольный треугольник можно разрезать на три равнобедренных с равными боковыми сторонами радиусами описанной окружности. Если треугольник ABC — тупоугольный (C — тупой угол), то возьмем на стороне AB точки A' , B' такие, что $AB' = B'C = CA' = A'B$, и разрежем треугольник на треугольники $AB'C$, $A'B'C$ и $A'BC$ (рис.9.2.1).

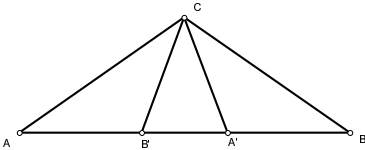


Рис.9.2.1

Докажем, что прямоугольный треугольник ABC ($AC = BC$) разрезать требуемым образом нельзя.

Очевидно, что существует два существенно различных способа разрезания треугольника на три: соединить внутреннюю точку с вершинами или разрезать треугольник на два прямой, проходящей через вершину, а затем повторить эту операцию с одной из двух частей (рис.9.2.2).

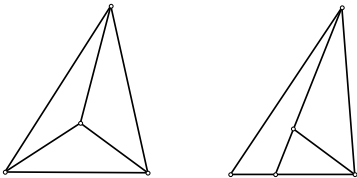


Рис.9.2.2

В первом случае треугольник $AХВ$ может быть равнобедренным только при $AX = BX$, но тогда два других треугольника равнобедренными не будут. Во втором случае хотя бы один из получающихся при первом разрезе треугольников должен быть равнобедренным. Следовательно, первая прямая либо является биссектрисой прямого угла, либо соединяет точку C с точкой D на гипотенузе, для которой $AD = AC$. Ни в том, ни в другом случае провести вторую прямую так, чтобы получить нужное разрезание невозможно.

9.3. (И.Ф.Шарыгин) Дана окружность и точки A, B на ней. Изобразить множество середин отрезков, один из концов которых лежит на одной из дуг AB , а другой на второй.

Решение. Пусть K — произвольная точка внутри данной окружности. Хорда, серединой которой является K перпендикулярна OK . Поэтому она пересекает отрезок AB тогда и только тогда, когда один из углов OKA, OKB не острый, а другой — не тупой. Следовательно, искомое множество состоит из точек, лежащих внутри или на границе одного из кругов с диаметрами OA, OB , и вне или на границе другого (рис.9.3).

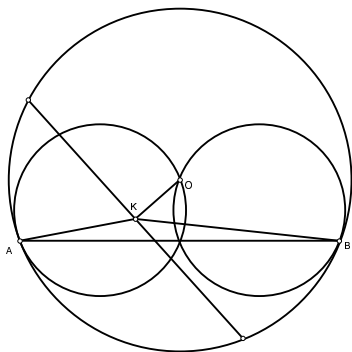


Рис.9.3

9.4 (А.Г.Мякишев) Пусть P — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, M — точка пересечения прямых, соединяющих середины его противоположных сторон, O — точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям, H — точка пересечения прямых, соединяющих ортоцентры треугольников APD и BSP , APB и CPD . Доказать, что M — середина OH .

Решение. Пусть O_1 — середина AC , а O_2 — середина BD . Несложно показать, что точка M — середина отрезка O_1O_2 (понятно, что M — центр масс системы $1A, 1B, 1C, 1D$. Рассмотрим подсистемы $1A, 1C$ и $1B, 1D$, которые эквивалентны подсистемам $2O_1, 2O_2$).

Очевидно, четырехугольник, образованный ортоцентрами есть параллелограмм, стороны которого лежат на перпендикулярах, проведенных из вершин четырехугольника к соответствующим диагоналям. Поэтому H — точка пересечения диагоналей этого параллелограмма и делит их пополам.

Докажем, что прямая HO_1 параллельна OO_2 , или, иначе говоря, перпендикулярна диагонали BD . Рассмотрим прямую, перпендикулярную этой диагонали и проходящую через H и покажем, что она проходит и через точку O_1 . Пусть наша прямая пересекает отрезок AH_4 в точке K . Тогда она является средней линией в треугольнике AH_3H_4 , и потому K — середина AH_4 . А следовательно, наша прямая будет средней линией и в треугольнике AH_4C , и потому пройдет через O_1 .

Рассуждая совершенно аналогично, убеждаемся в том, что прямая HO_2 параллельна OO_1 , т.е. HO_1OO_2 — параллелограмм, причем M — точка пересечения его диагоналей (рис.9.4).

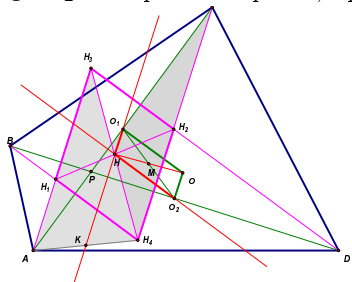


Рис.9.4

Отсюда следует, что точки O, M, H лежат на одной прямой, и $OM = MH$.

9.5. (Б.Р.Френкин) Дано, что ни для какой стороны треугольника из проведенных к ней высоты, биссектрисы и медианы нельзя составить треугольник. Доказать, что один из углов треугольника больше чем 135° .

Решение. Из условия следует, что каждая медиана больше либо равна сумме биссектрисы и высоты из той же вершины. Если между какой-то медианой и соответствующей высотой угол не больше 60° , то медиана не больше удвоенной высоты, а сумма биссектрисы и высоты – не меньше, причем равенство не достигается одновременно. Поэтому из условия следует, что между каждой медианой и соответствующей высотой угол больше 60° . Так как в треугольнике наименьший угол не больше 60° , то какая-то высота проходит вне треугольника, т.е. он тупоугольный.

Пусть A – вершина тупого угла, B и C – остальные две вершины, AM – медиана, AH – высота, причем точка M принадлежит отрезку BH . По доказанному $\angle AMH < 30^\circ$. Он равен сумме углов ABM и BAM . Медиана из вершины тупого угла меньше половины противоположной стороны. Отсюда $\angle ABM < 15^\circ$.

Высота из вершины B образует угол больше 60° с соответствующей медианой, а тогда и со стороной BC . Поэтому $\angle ACB < 30^\circ$. Значит, $\angle BAC > 180^\circ - 15^\circ - 30^\circ = 135^\circ$.

10.1. (Л.А.Емельянов) Дан выпуклый четырехугольник без параллельных сторон. Для каждой тройки его вершин строится точка, дополняющая эту тройку до параллелограмма, одна из диагоналей которого совпадает с диагональю четырехугольника. Доказать, что из четырех построенных точек ровно одна лежит внутри исходного четырехугольника.

Первое решение. Пусть вершина D' параллелограмма $ABCD'$ лежит внутри четырехугольника $ABCD$. Тогда $\angle BCA < \angle CAD$ и $\angle BAC < \angle ACD$. Следовательно, точки пересечения противоположных сторон $ABCD$ лежат на продолжении отрезков AB и BC за точку B . Очевидно, что вершина с таким свойством в четырехугольнике ровно одна (рис.10.1.1).

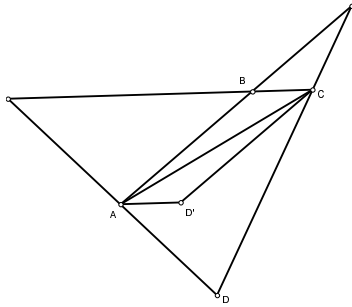


Рис.10.1.1

Второе решение. Пусть $ABCD$ – исходный четырехугольник, $ABCD'$ – параллелограмм, лежащий в нем. Пусть лучи CD' и AD' пересекают стороны в точках C_1 и A_1 . Тогда $S_{ABC} = S_{ABD'} = S_{ABC_1} < S_{ABD}$, аналогично $S_{ABC} < S_{ACD}$. Тогда $S_{ABC} < S_{ABD} + S_{ACD} - S_{ABC} = S_{BCD}$, т.е. ABC – треугольник наименьшей площади, образованный тремя вершинами четырехугольника. Наоборот, если он таковой, то на сторонах найдутся точки A_1 и C_1 такие, что $S_{ABC} = S_{ABC_1} = S_{A_1BC}$, и точка пересечения AA_1 и CC_1 будет искомой (рис.10.1.2).

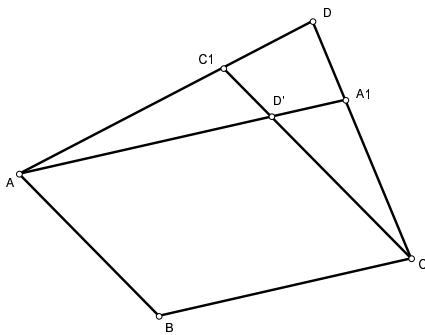


Рис.10.1.2

10.2. (А.В.Шаповалов) Треугольник можно разрезать на три подобных друг другу треугольника. Доказать, что его можно разрезать на любое число подобных друг другу треугольников.

Решение. Пусть треугольник ABC с наибольшим углом C разрезан на три подобных отрезками AX, BX, CX . Так как $\angle AXB > \angle ACB$, углу AXB в других треугольниках могут равняться только углы AXC и BXC . Значит, $\angle AXB = \angle AXC = \angle BXC = 120^\circ$. Но тогда $AX = BX = CX$ и треугольник ABC — правильный.

Пусть теперь треугольник разрезали сначала прямой, проходящей через вершину, на два, а затем один из этих двух еще на два. Так как два последних треугольника подобны, они прямоугольные, т.е. при первом разрезе от исходного треугольника отрезали прямоугольный, а затем оставшийся треугольник разделили на два высотой. Перебрав все возможные варианты, нетрудно убедиться, что исходный треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный. И в том, и в другом случае его можно разрезать на любое число подобных.

10.3. (А.А.Заславский) В окружности с центром O проведены две параллельные хорды AB и CD . Окружности с диаметрами AB и CD пересекаются в точке P . Доказать, что середина отрезка OP равноудалена от прямых AB и CD .

Решение. Пусть X, Y — середины AB и CD , Q — середина OP . Тогда $XQ^2 = (2OX^2 + 2XP^2 - OP^2)/4 = (2OX^2 + 2XA^2 - OP^2)/4 = (2R^2 - OP^2)/4 = YQ^2$. Таким образом, Q равноудалена от точек X и Y , а, значит, и от прямых AB и CD (рис.10.3).

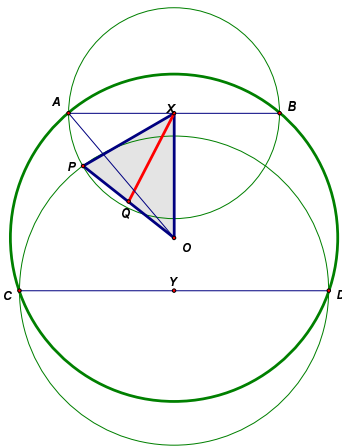


Рис.10.3

10.4. (Вим Пайлс, Нидерланды) На плоскости даны два отрезка A_1B_1 и A_2B_2 , причем $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = k < 1$. На отрезке A_1A_2 взята точка A_3 , а на продолжении этого отрезка за точку A_2 — точка A_4 , так что $\frac{A_3A_2}{A_3A_1} = \frac{A_4A_2}{A_4A_1} = k$. Аналогично, на отрезке B_1B_2 берется точка B_3 , а на продолжении этого отрезка за точку B_2 — точка B_4 , так что $\frac{B_3B_2}{B_3B_1} = \frac{B_4B_2}{B_4B_1} = k$. Найти угол между прямыми A_3B_3 и A_4B_4 .

Первое решение. Пусть O — центр не сохраняющего ориентацию подобия, переводящего A_1 в A_2 и B_1 в B_2 . Так как треугольники OA_1B_1 и OA_2B_2 подобны, $\angle A_1OB_1 = \angle B_2OA_2$ и биссектрисы углов A_1OA_2 и B_1OB_2 совпадают. Так как $OA_2/OA_1 = OB_2/OB_1 = k$, эта общая биссектриса пересекает отрезки A_1A_2 и B_1B_2 в точках A_3 и B_3 , а перпендикулярная ей прямая пересекает продолжения этих отрезков в точках A_4 и B_4 (рис.10.4.1). Следовательно, искомый угол прямой.

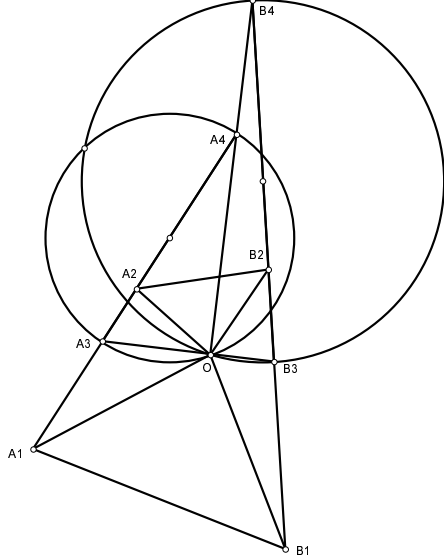


Рис.10.4.1

Чтобы найти точку O , построим окружности с диаметрами A_3A_4 и B_3B_4 и найдем точки их пересечения. Так как окружность с диаметром A_3A_4 — геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до A_2 и A_1 равно k , точки пересечения будут центрами двух подобий, переводящих A_1 в A_2 и B_1 в B_2 . Одно из этих подобий сохраняет ориентацию, другое меняет.

Второе решение. Пусть $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{u}$, $\overrightarrow{A_2B_2} = \vec{v}$, по условию $\vec{v}^2 = k^2\vec{u}^2$. Тогда

$$\overrightarrow{A_3B_3} = \overrightarrow{A_3A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_3} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{A_2A_1} + \vec{u} + \frac{1}{1+k}\overrightarrow{B_1B_2}; \quad (*)$$

с другой стороны,

$$\overrightarrow{A_3B_3} = \overrightarrow{A_3A_2} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_2B_3} = \frac{k}{1+k}\overrightarrow{A_1A_2} + \vec{v} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{B_2B_1}. \quad (**)$$

Умножив (*) на $\frac{k}{1+k}$, (**) на $\frac{1}{1+k}$ и сложив полученные равенства, имеем $\overrightarrow{A_3B_3} = \frac{k}{1+k}\vec{u} + \frac{1}{1+k}\vec{v}$. Аналогично получаем $\overrightarrow{A_4B_4} = \frac{1}{1-k}\vec{v} - \frac{k}{1-k}\vec{u}$. Тогда

$$\left(\overrightarrow{A_3B_3}, \overrightarrow{A_4B_4}\right) = \frac{(k\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} - k\vec{u})}{(1+k)(1-k)} = \frac{k^2\vec{u}^2 - \vec{v}^2}{1-k^2} = 0,$$

т. е. векторы ортогональны.

Третье решение. (С. Сафин) Построим параллелограмм $A_1A_2B_2X$ и проведем биссектрису A_1Y треугольника A_1XB_1 . Так как $\frac{B_1Y}{XY} = \frac{A_1B_1}{A_1X} = k$, $B_3Y \parallel B_2X$ и $B_3Y = kB_2X = A_1A_3$. Следовательно, $A_1A_3B_3Y$ — параллелограмм, т. е. $A_3B_3 \parallel A_1Y$.

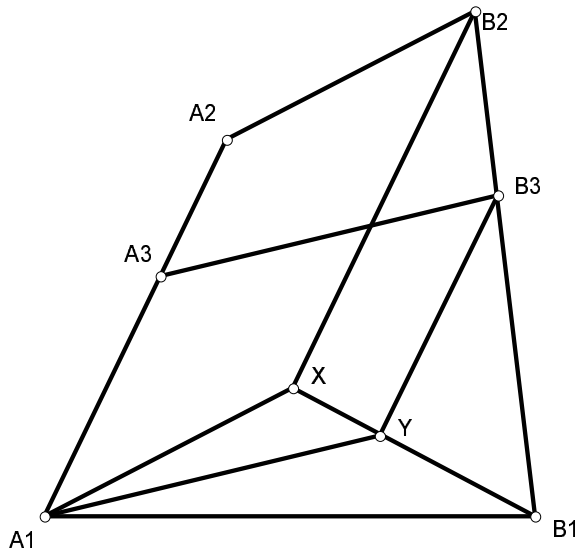


Рис.10.4.2

Аналогично, A_4B_4 параллельно внешней биссектрисе угла XA_1B_1 , и, значит прямые A_3B_3 и A_4B_4 перпендикулярны.

10.5. (А.А.Заславский) Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках X, Y , расстояние между которыми также равно 1. Из точки C одной окружности проведены касательные CA, CB к другой. Прямая CB вторично пересекает первую окружность в точке A' . Найти расстояние AA' .

Решение. Пусть O — центр окружности, на которой лежит точка C , O' — центр другой окружности. Так как $OO' = \sqrt{3}$, прямая $A'B'$ касается второй окружности в точке C' . Следовательно, $\angle A'O'A = \angle AO'C' + \frac{1}{2}\angle C'O'B = 2\angle ABC' + \angle C'AB = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B'$, $\angle O'A'O = \angle O'A'B' + \angle B'A'O = \frac{\pi}{2} - \angle C'O'A' + \frac{\pi}{2} - \angle BCA = \pi - \angle BCA - \frac{1}{2}\angle CA'B' = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B'$. Так как $O'A = OA'$, $AO'A'O$ — равнобедренная трапеция, и $AA' = OO' = \sqrt{3}$ (рис.10.5).

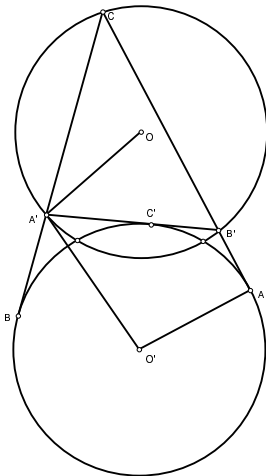


Рис.10.5

10.6. (А.А.Заславский) Пусть H — ортоцентр треугольника ABC , X — произвольная точка. Окружность с диаметром XH вторично пересекает прямые AH, BH, CH в точках A_1, B_1, C_1 , а прямые AX, BX, CX в точках A_2, B_2, C_2 . Доказать, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Решение. Рассмотрим для определенности случай, когда точки расположены на окружности в порядке $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$. Пусть $XH = d$. Тогда $A_1B_2 = d \sin \angle A_1HB_2 = d \sin \angle XBC$, так как HA_1 перпендикулярно BC , а HB_2 перпендикулярно BX . Следовательно, $\frac{A_1B_2 \cdot C_1A_2 \cdot B_1C_2}{A_2B_1 \cdot C_2A_1 \cdot B_2C_1} = \frac{\sin \angle XBC \sin \angle XCA \sin \angle XAB}{\sin \angle XAC \sin \angle XCB \sin \angle XBA} = 1$, что равносильно утверждению задачи (рис.10.6).

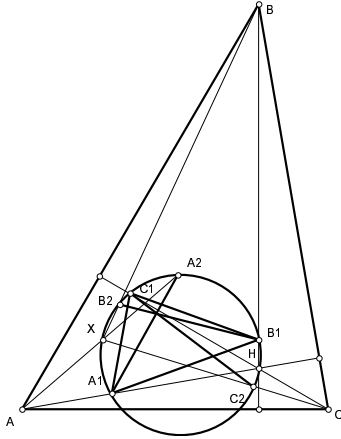


Рис.10.6

Примечание. Нетрудно видеть, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC , а точка пересечения прямых соответствует точке, изогонально сопряженной X .

11.1. (А.А.Заславский) A_1, B_1, C_1 — середины сторон правильного треугольника ABC . Три параллельные прямые, проходящие через A_1, B_1, C_1 , пересекают, соответственно, прямые B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 в точках A_2, B_2, C_2 . Доказать, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке, лежащей на описанной около треугольника ABC окружности.

Решение. Пусть Z — точка пересечения AA_2 и BB_2 . Так как точки B и B_1 симметричны относительно прямой A_1C_1 , $\angle ABZ = \angle C_1BB_2 = \angle B_2B_1C_1$. Аналогично $\angle BAZ = \angle A_2A_1C_1$. Так как прямые AA_2 и BB_2 параллельны, $\angle A_2A_1C_2 = \angle B_1B_2C$, следовательно, $\angle AZB = \angle ACB$ и точки A, B, C, Z лежат на одной окружности, откуда и следует утверждение задачи (рис.11.1).

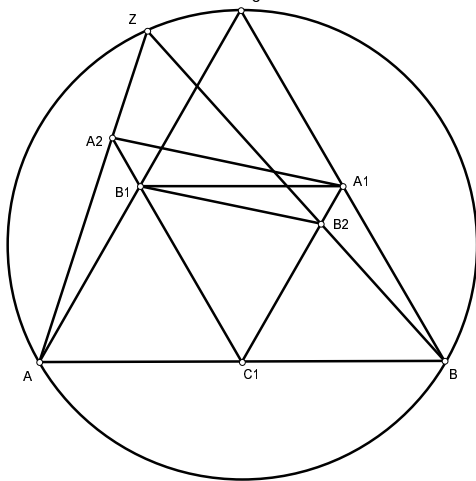


Рис.11.1

11.2 (А.Г.Мякишев) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Прямые BC и AD пересекаются в точке O , причем B лежит на отрезке OC , и A — на отрезке OD . I — центр вписанной в треугольник OAB окружности, J — центр внеписанной в треугольник OCD окружности, касающейся стороны CD и продолжения двух других сторон. Перпендикуляры, опущенные из середины отрезка IJ на прямые BC и AD , пересекают соответствующие стороны четырехугольника (не продолжения) в точках X и Y . Доказать, что отрезок XY делит периметр четырехугольника $ABCD$ пополам, причем из всех отрезков с этим свойством и с концами на BC и AD XY имеет наименьшую длину.

Решение. Используя тот факт, что отрезки касательных, проведенные из одной точки, равны, несложно показать, что отрезок $X'Y'$ с концами на сторонах AD и BC делит периметр пополам тогда и только тогда, когда $OX' + OY' = l$, где l — постоянная величина, равная удвоенному отрезку соответствующей касательной плюс полупериметр четырехугольника.

Пусть M — середина IJ . Также просто проверяется, что $OX + OY = l$. Тогда треугольники MXX' и MYY' равны, а следовательно, треугольники MXY и $MX'Y'$ подобны по двум углам. Значит, $X'Y'$ минимально, когда минимально MX' , т.е. когда X' совпадает с X (рис.11.2).

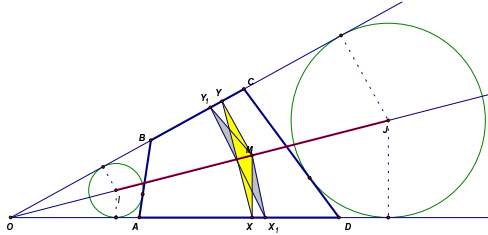


Рис.11.2

11.3. (А.А.Заславский) Внутри вписанного четырехугольника $ABCD$ существует точка K , расстояния от которой до сторон $ABCD$ пропорциональны этим сторонам. Доказать, что K — точка пересечения диагоналей $ABCD$.

Первое решение. Пусть U — точка пересечения касательных к окружности $ABCD$ в точках A и C , X, Y — проекции U на AB и BC . Тогда $UX/UY = \sin \angle UAX / \sin \angle UCY = \sin \angle BCA / \sin \angle BAC = AB/BC$, т.е. K лежит на прямой UB . Аналогично, K лежит на прямой UD , и, если эти прямые не совпадают, то $K = U$. Точно так же, доказывается, что, если не совпадают прямые AV и CV , где V — точка пересечения касательных в точках B и D , то $K = V$, что невозможно. Будем считать, что на одной прямой лежат точки B, D, U . Тогда $AB/AD = AU/UD = CU/UD = BC/CD$ и точки A, C, V также лежат на одной прямой. Следовательно, K — точка пересечения AC и BD .

Второе решение. Множество точек, расстояния от которых до прямых AB и CD пропорциональны соответствующим сторонам, — это прямая, проходящая через точку пересечения AB и CD . Так как $ABCD$ вписанный, треугольники LAB и LCD , где L — точка пересечения диагоналей, подобны, т.е. L лежит на указанной прямой. Аналогично, L лежит на второй такой же прямой и, значит, совпадает с K .

11.4. (И.Ф.Шарыгин) В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $BC = a$. Вписанная окружность касается прямых AB и AC в точках M и P . Найти длину хорды, отсекаемой на прямой MP окружностью с диаметром BC .

Первое решение. Расстояние от центра окружности до хорды равно полусумме расстояний от точек B и C до прямой MP , т.е. $\frac{1}{2}(BM \sin \angle AMP + CP \sin \angle APM) = \frac{1}{2}(BM + CP) \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ (рис.11.4.1).

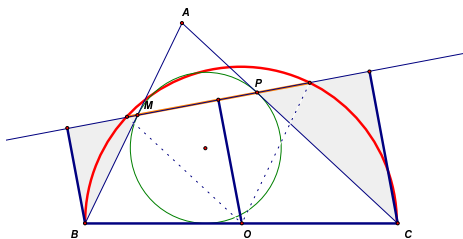


Рис.11.4.1

Соответственно, длина хорды равна $a \sin \frac{\alpha}{2}$.

Второе решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника, X, Y — точки пересечения прямых BI, CI с прямой MP . Тогда $\angle MXB = \angle AMP - \angle MBX = \frac{\angle B}{2}$. Следовательно, треугольники BXM и BCI подобны, т.е.

$$\frac{BX}{BC} = \frac{BM}{BI} = \cos \frac{\angle A}{2}.$$

Это значит, что угол BXC прямой (рис.11.4.2).

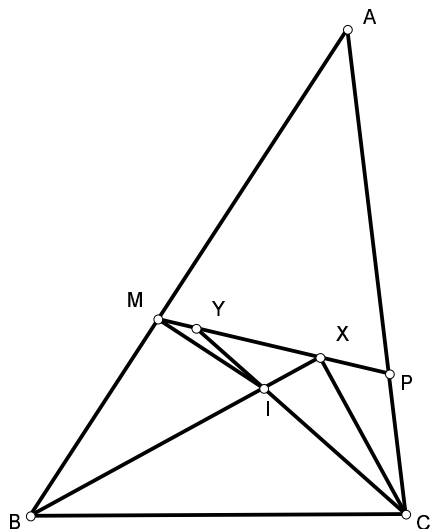


Рис.11.4.2

Аналогично, угол BYC прямой. Следовательно, искомая хорда

$$XY = BC \sin \angle XCY = a \sin \frac{\alpha}{2}.$$

11.5. (В.Ю.Протасов) На плоскости дан угол и точка K внутри него. Доказать, что найдется точка M , обладающая следующим свойством: если произвольная прямая, проходящая через M , пересекает стороны угла в точках A и B , то MK является биссектрисой угла AMB .

Первое решение. На произвольной прямой, проходящей через K и пересекающей стороны угла в точках A и B , возьмем точку K' , такую что $AK'/BK' = AK/BK$. Так как все точки K' лежат на прямой l , проходящей через вершину угла, все окружности с диаметром KK' проходят через проекцию M точки K на l . При этом всегда выполнено равенство $AM/BM = AK/BK$, т.е. точка M — искомая (рис.11.5.1).

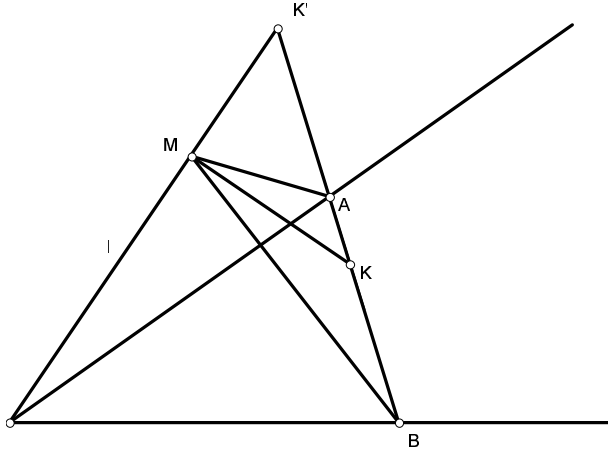


Рис.11.5.1

Второе решение. (Р.Девятков) Пусть O — вершина угла. Построим параллелограмм $KXOY$, две стороны которого лежат на сторонах угла. Пусть M — точка, симметричная K относительно XU . Докажем, что точка M — искомая.

Пусть прямая, проходящая через K , пересекает прямые OX и OY в точках A и B . Заметим, что $MX = KX$, $MU = KY$, $\triangle MXU = \triangle KXU = \triangle OYX$, поэтому $MOYX$ — равнобокая трапеция и $\angle MXO = \angle MYO$. Значит, $\angle MXA = 180^\circ - \angle MXO = 180^\circ - \angle MYO = \angle BYM$. Далее, треугольники AXK и KYB подобны, так как их стороны соответственно параллельны, поэтому $KX/XA = BY/YK$. Отсюда получаем

$$\frac{MX}{XA} = \frac{KX}{XA} = \frac{BY}{YK} = \frac{BY}{YM}.$$

Отсюда и из равенства углов MXA и BYM получаем, что треугольники MXA и BYM подобны (рис.11.5.2).

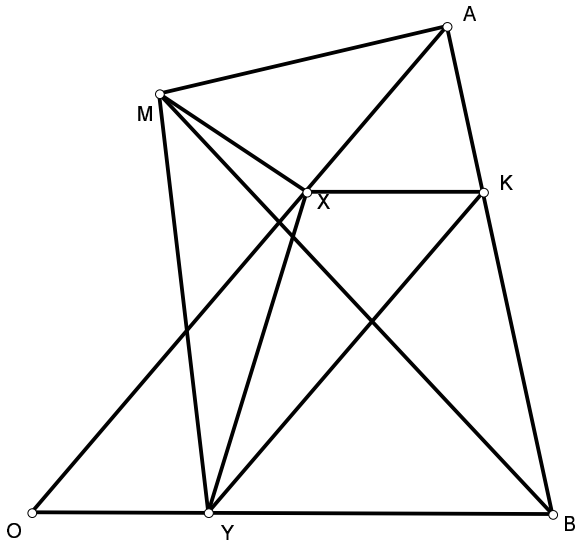


Рис.11.5.2

Теперь, пользуясь двумя доказанными подобиями, получаем

$$\frac{MA}{BM} = \frac{MX}{BY} = \frac{KX}{BY} = \frac{AK}{KB},$$

что и означает, что MK — биссектриса треугольника AMB .

11.6. (И.И.Богданов) Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается его граней в точках A' , B' , C' , D' . Отрезки AA' и BB' пересекаются, и точка их пересечения лежит на вписанной сфере. Доказать, что отрезки CC' и DD' тоже пересекаются на вписанной сфере.

Решение. Так как отрезки AA' и BB' пересекаются, прямые AB и $A'B'$ тоже пересекаются или параллельны. Обозначим их точку пересечения (возможно, бесконечно удаленную) через P . Так как P лежит вне двугранного угла при ребре CD , плоскость CDP не пересекает вписанную сферу. Поэтому существует проективное преобразование, сохраняющее сферу и переводящее эту плоскость в бесконечно удаленную. В результате этого преобразования отрезок $A'B'$ станет диаметром сферы, а AB будет ему параллелен. Так как точка пересечения AA' и BB' лежит на сфере, расстояние от ее центра до AB равно удвоенному радиусу (на рис.11.6.1 показана проекция на плоскость $ABA'B'$).

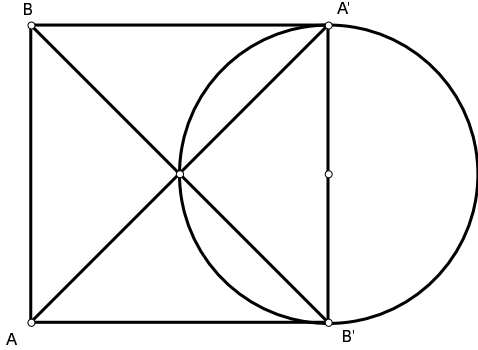


Рис.11.6.1

Значит, угол между плоскостями ABC и ABD равен 60° , дуга большого круга, соединяющая C' и D' равна 120° и прямые, проходящие через C' , D' и параллельные ABC , ABD , пересекаются на сфере (на рис.11.6.2 показана проекция на плоскость, перпендикулярную AB).

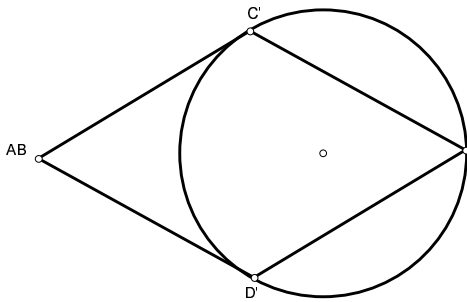


Рис.11.6.2