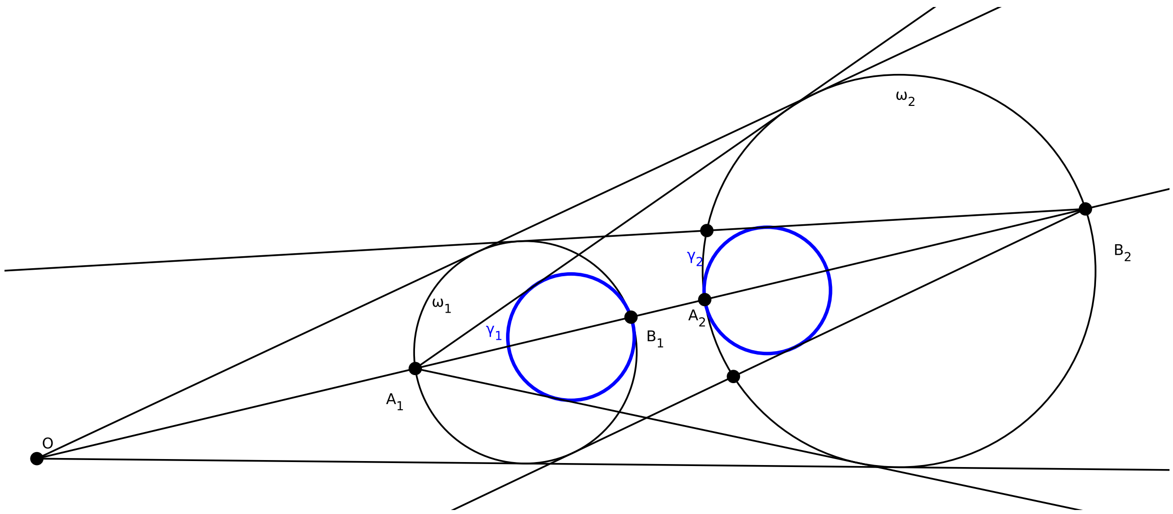
Задача М2100

П. А. Кожевников

Эта заметка впервые опубликована в "Кванте"№1, 2009 год.

Рассмотрим такую задачау.

М2100. *В угол с вершиной O вписаны две окружности ω_1 и ω_2. Луч с началом O пересекает ω_1 в точках A_1 и B_1, а ω_2 — в точках A_2 и B_2 так, что $OA_1 < OB_1 < OA_2 < OB_2$(см. рисунок). Окружность γ_1 касается внутренним образом окружности ω_1 и касательных к ω_2, проведённых из A_1. Окружность γ_2 касается внутренним образом окружности ω_2 и касательных к ω_1, проведённых из B_2. Докажите, что окружности γ_1 и γ_2 равны.*



Пусть радиусы окружностей ω_1, ω_2, γ_1 и γ_2 равны соответственно R_1, R_2, r_1 и r_2. Из гомотетии h с центром O, переводящей ω_1 в ω_2, следует, что

$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{R_2}{R_1}. \tag{1}$$

В решении будем пользоваться известной теоремой *о трех гомотетиях*: композиция гомотетий с центрами O_1 и O_2 ($O_1 \neq O_2$) и коэффициентами k_1 и k_2 такими, что $k_1k_2 \neq 1$, является гомотетией с центром в точке на прямой O_1O_2 и коэффициентом k_1k_2.

Пусть C_1 — точка касания ω_1 и γ_1. Тогда композиция гомотетии с центром C_1, переводящей γ_1 в ω_1, и гомотетии h — это гомотетия h_1 с коэффициентом $\dfrac{R_2}{r_1}$, переводящая γ_1 в ω_2. Точка A_1 является центром гомотетии h_1, и по теореме о трех гомотетиях точки C_1, O и A_1 лежат на одной прямой. Это означает, что $C_1 = B_1$. Кроме того, из гомотетии h_1 получаем соотношение

$$\frac{A_1B_2}{A_1B_1} = \frac{R_2}{r_1}. \tag{2}$$

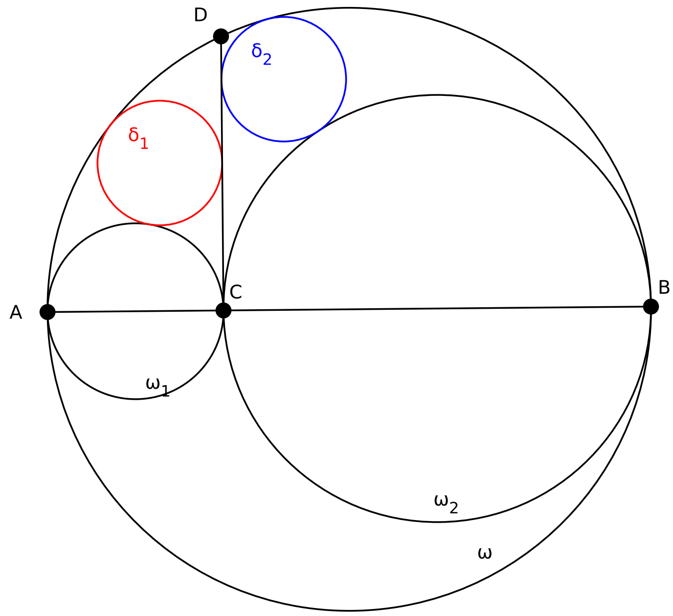
Аналогично доказывается, что окружности ω_2 и γ_2 касаются в точке A_2, и что

$$\frac{A_1B_2}{A_2B_2} = \frac{R_1}{r_2}. \tag{3}$$

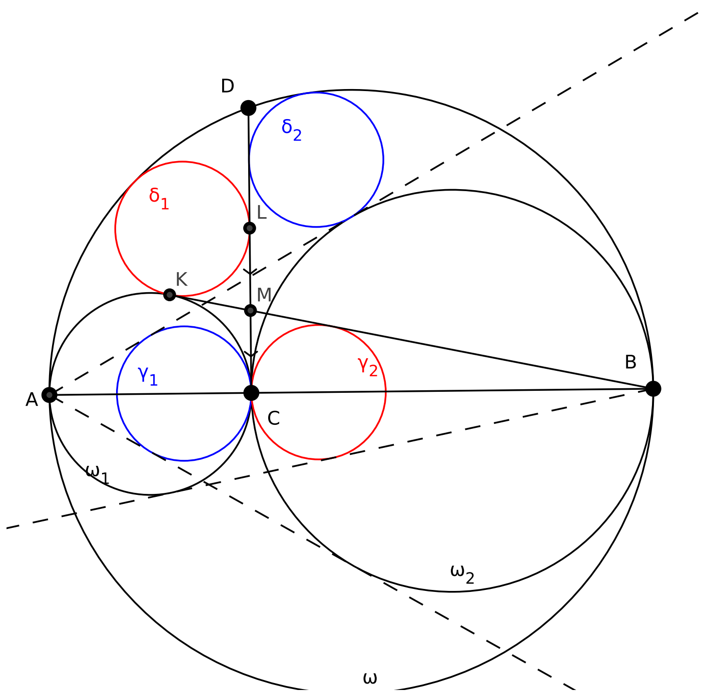
Поделив соотношение (2) на равенства (1) и (3), получаем, что $\dfrac{r_2}{r_1} = 1$, что и требуется. $\square$

К данной задаче можно свести следующую известную задачу об *арбелосе Архимеда*.

Пусть окружности ω_1 и ω_2 касаются окружности ω внутренним образом в диаметрально противоположных точках A и B, и касаются друг друга внешним образом в точке C. Пусть перпендикуляр к AB, проведенный через C, пересекает ω в точке D. Тогда окружности δ_1 и δ_2, вписанные в криволинейные треугольники BCD и ACD, равны .



Решение. Пусть δ_1 касается окружности ω_1 и прямой CD в точках K и L (см. рис.).

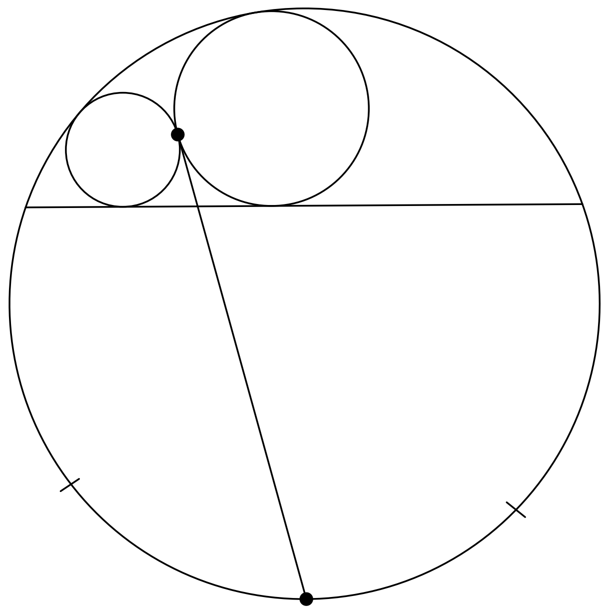


Тогда, как известно (см., приложение), прямая BK является общей касательной к ω_1 и δ_1. Пусть BK пересекает CD в точке M. Впишем в угол BMC окружность γ_2, касающуюся MC в точке C. Из равенства касательных $MC = MK$ вытекает, что окружности δ_1 и γ_2, вписанные в вертикальные углы KML и BMC, равны. Из симметрии относительно диаметра AB следует, что γ_2 касается касательных к ω_1, проведенных из B. Аналогично, окружность γ_1, которая касается внутренним образом ω_1 и касательных к ω_2, проведенных из A, равна окружности δ_2. Но из задачи М2100 следует равенство окружностей γ_1 и γ_2. $\square$

Приложение.

В тексте мы использовали следующий известный и полезный факт.

В данный сегмент вписываем всевозможные пары касающихся окружностей. Для каждой пары окружностей через точку касания проводим касающуюся их прямую. Докажите, что все эти прямые проходят через середину дуги, дополняющей сегмент до окружности(см. рис).



Доказательство этого факта можно получить, использую инверсию с центром в одном из концов отрезка, ограничивающего сегмент, либо, посчитав степень середины дуги относительно каждой из окружностей. Подробности смотрите в "Кванте"№1, 1978 год (тут), либо задача №3.45 в "Задачи по планиметрии Прасолова В. В.

□

Другие доказательства равенства окружностей в арбелосе Архимеда и другие интересные свойства этой конструкции можно прочитать в заметке Б. Бычкова(здесь).