§1 ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Как вы можете легко догадаться, слово ***параллелограмм*** очень старое, да и пишется оно довольно замысловато. Так в древней Греции называли фигуру на плоскости, которая лежит между парами параллельных прямых. Если по песку проедут две телеги, и пути их будут пересекаться, то на этом месте сразу возникает параллелограмм. Его также можно увидеть на пересечении двух железнодорожных путей (рис. 1).

Почему же это слово так сложно пишется? А дело в том, что оно образовано сразу от двух корней: «***параллель***» и «***грамма***» – черта. То есть, буквально параллелограмм означает «***вычерченный параллельными***». А какие еще слова русского языка с корнем «грамм» вы знаете? Конечно, это и «грамматика», и «граммофон», и даже просто «грамм»*. Обратите внимание – все они тоже пишутся с двумя буквами «м».

Рис. 1

Рис. 2

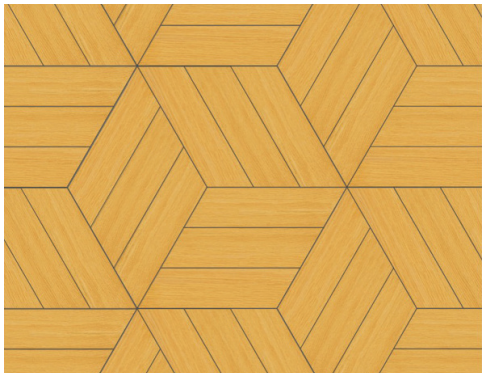


Рис. 3

Одинаковыми параллелограммами, как и квадратами, можно заполнить всю плоскость. При этом расположить их всегда можно так, что стороны всех параллелограммов были параллельны только двум направлениям – тогда у вас получится так называемая «косая» сетка, похожая на клетчатую бумагу (рис. 2). Можно замостить плоскость и другими способами. На рисунке справа показан один из таких «паркетов», тоже состоящий из равных параллелограммов (рис. 3).

Параллелограмм часто будет возникать на ваших уроках физики – ведь две скорости или две силы, приложенные к одной точке, складывают именно по правилу параллелограмма (рис. 4).

Если мы нарисуем параллелограмм, то увидим, что это четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны друг другу.

А поскольку получается он при пересечении двух пар параллельных прямых, то для параллелограмма уместным будет такое обозначение: **#**.

Например, ***#ABCD*** (рис. 5).

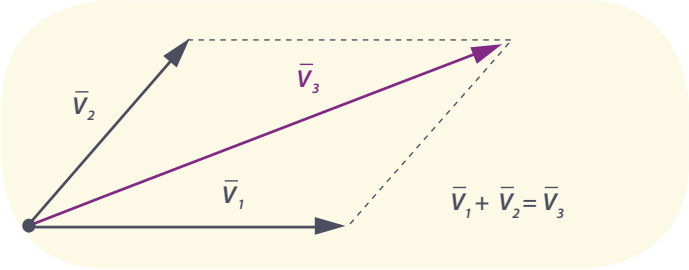


Рис. 4

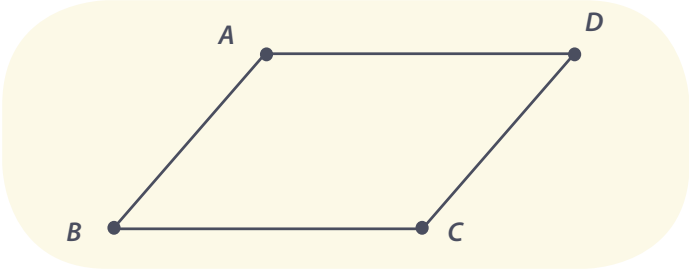


Рис. 5

* - Происхождение слова «грамм» довольно интересно. В русский язык оно попало в конце 18 века из Франции и означало 1/24 часть унции, которую обычно в аптеках отмечали черточкой, как это делают на мензурках.

Мы с вами уже знаем, что ширина «полосы» между двумя параллельными прямыми всюду одинакова. Значит, и расстояние между двумя противоположными сторонами параллелограмма тоже одинаково. Поэтому любой отрезок, перпендикулярный противоположным сторонам параллелограмма, называют его высотой. Понятно, что у параллелограмма в общем случае может быть две различные высоты (рис. 6).

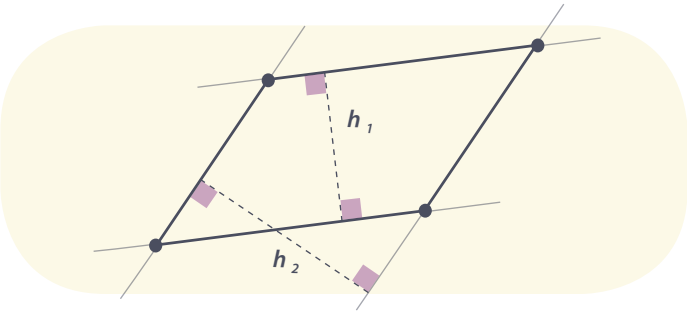


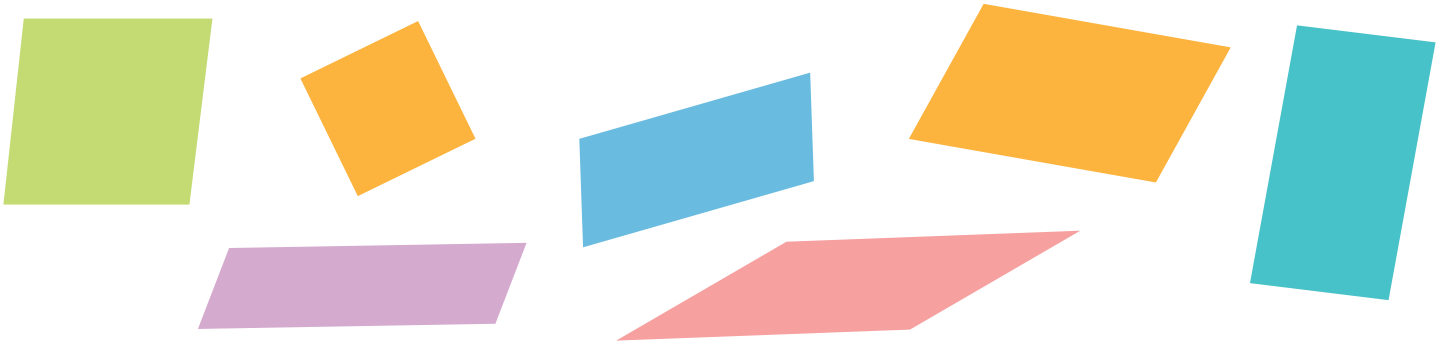
Рис. 6

А теперь давайте дадим определение:

Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Что можно заметить, если нарисовать несколько разных параллелограммов?

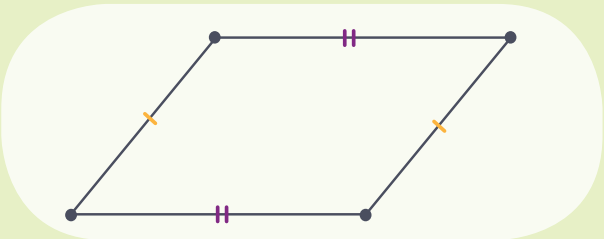


В любом из них противоположные стороны не только параллельны, но на глаз кажутся одинаковыми. Так же, как и его противоположные углы. Так оно и есть, в этом и заключаются первое и второе свойства параллелограмма.

Мы их с вами сейчас докажем.

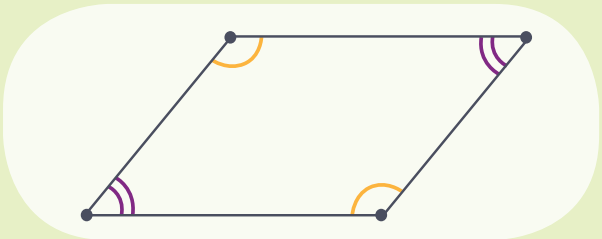
1 СВОЙСТВО

У параллелограмма противоположные стороны попарно равны.



2 СВОЙСТВО

У параллелограмма противоположные углы попарно равны.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Возьмем произвольный параллелограмм **ABCD** и проведем в нем диагональ **AC**. (рис. 1)*

*Поскольку прямые **AD** и **BC** параллельны по определению параллелограмма, то по свойству параллельных при секущей **AC** должны быть равны накрест лежащие углы **CAD** и **BCA**. Обозначим их величину буквой **α**. (рис. 2)*

*Точно так же по определению параллелограмма параллельны прямые **AB** и **CD**. Значит, при той же секущей **AC** образуются равные накрест лежащие углы **BAC** и **DCA**. Обозначим их величину буквой **β**. (рис. 3)*

*Треугольники **ABC** и **ADC** равны по второму признаку, поскольку сторона **AC** у них общая, и прилегающие к ней углы равны. Значит, у этих треугольников равны соответствующие стороны: **AB** = **CD**, **BC** = **AD**. (рис. 4) То есть, первое свойство нами доказано.*

*Второе свойство сразу следует из равенства этих же треугольников. В самом деле, их углы при вершинах **B** и **D** соответственно равны, а углы параллелограмма при вершинах **A** и **C** тоже равны, поскольку имеют одинаковую величину **α** + **β**.*

Что и требовалось доказать.

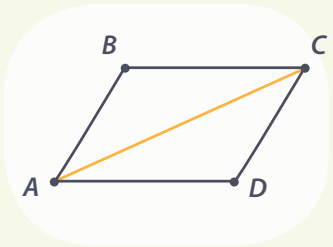


Рис. 1

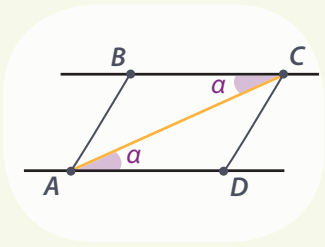


Рис. 2

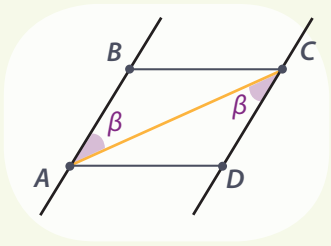


Рис. 3

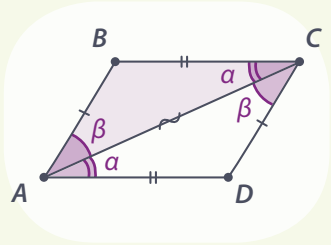
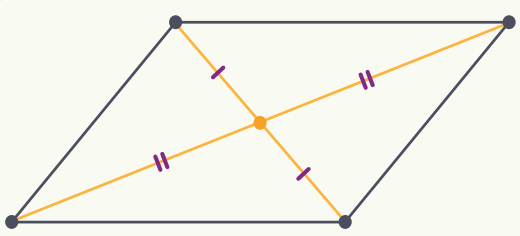


Рис. 4

Менее очевидно третье свойство параллелограмма. Если провести в нем обе диагонали, то они будут делить друг друга пополам. Совершенно очевидно, что эти диагонали имеют точку пересечения, хотя строго доказать это не так легко. Вы можете прочитать это доказательство в конце параграфа в разделе «*Для тех, кто хочет знать больше*».

3 СВОЙСТВО

Диагонали параллелограмма делятся пополам точкой пересечения.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Пусть диагонали **AC** и **BD** параллелограмма **ABCD** пересекаются в точке **O**. Его стороны **AD** и **BC** параллельны по определению, поэтому углы **CAD** и **ACB** равны как накрест лежащие при секущей **AC**. Точно также равны углы **ADB** и **CBD** при секущей **BD**. (рис. 1)*

*Кроме того, по первому свойству параллелограмма мы с вами уже знаем, что у него равны противоположные стороны. Значит, **AD** = **BC**. Но тогда треугольник **AOD** равен треугольнику **COB** по стороне и двум прилежащим к ней углам. (рис. 2)*

*Соответствующие стороны этих треугольников лежат против их равных углов, поэтому **AO** = **CO**, **BO** = **DO**. Но тогда точка **O** – середина диагоналей **AC** и **BD** параллелограмма. То есть, его диагонали делят друг друга пополам.*

Что и требовалось доказать.

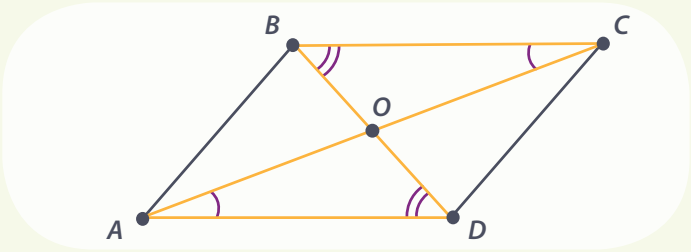


Рис. 1

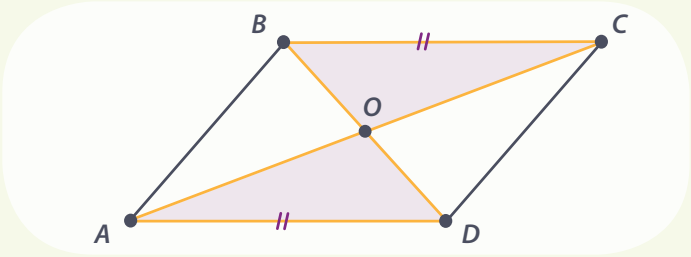


Рис. 2

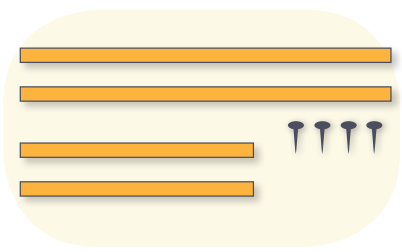
ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

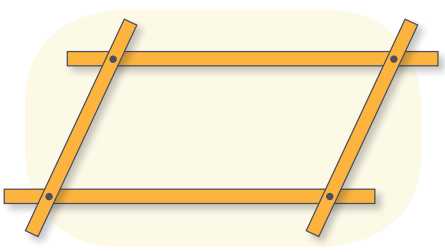
Как установить, что данный четырехугольник на самом деле является параллелограммом? Ведь параллельность его противоположных сторон не так легко проверить на листе бумаги. Возьмите две одинаковые длинные доски и две короткие, но также равной длины. А теперь закрепите концы этих досок гвоздями между собой так, чтобы у вас получился четырехугольник.

Этот четырехугольник не будет «жесткой фигурой», то есть, он будет легко менять свою форму при воздействии небольшой силы. Его можно даже «сложить» в отрезок прямой линии. Посмотрите: противоположные стороны такого «складывающегося» четырехугольника всегда остаются параллельными друг другу! То есть, по определению он должен быть параллелограммом. Почему так будет?

А дело в том, что длина каждой доски при движении четырехугольника не меняется. Значит, в любое время противоположные его стороны будут иметь одинаковую длину. А это свойство как раз наблюдается у параллелограмма...

Но работает ли оно в «обратную сторону»? Вдруг кроме параллелограммов существуют другие четырехугольники, у которых противоположные стороны попарно равны? На самом деле других таких четырехугольников нет, и в этом как раз и заключается ***первый признак параллелограмма***. Мы его с вами сейчас докажем.





ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Пусть противоположные стороны некоторого четырехугольника **ABCD** попарно равны, то есть, у него **AB** = **CD**, **BC** = **AD**. Мы докажем, что этот четырехугольник – параллелограмм.*

*Проведем в нем диагональ **AC** и рассмотрим треугольники **ABC** и **ADC**. Эти треугольники равны по третьему признаку, поскольку сторона **AC** у них общая, а две другие соответственно равны по условию (рис. 1).*

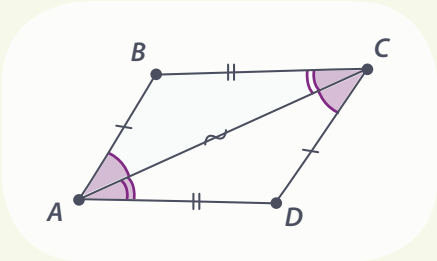


Рис. 1

*У равных треугольников должны быть равны соответственные углы, поэтому угол **CAD** равен углу **ACB**. Но такие углы еще называют накрест лежащими при секущей **AC** и двух прямых **AD** и **BC** (рис. 2). Поскольку эти углы равны, то по признаку прямые **AD** и **BC** не могут пересекаться, значит, они параллельны.*

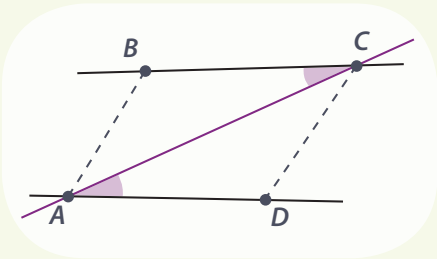


Рис. 2

*Из равенства тех же треугольников **ABC** и **ADC** следует, что угол **BAC** должен быть равен углу **DCA**. Эти углы являются накрест лежащими при той же секущей **AC**, но уже при прямых **AB** и **CD** (рис. 3). Значит, по признаку эти прямые тоже должны быть параллельны. Получается, что две пары противоположных сторон четырехугольника **ABCD** параллельны. Поэтому четырехугольник **ABCD** должен быть параллелограммом по своему определению.*

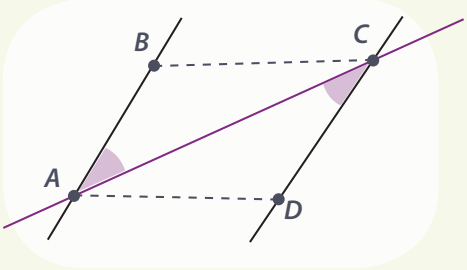


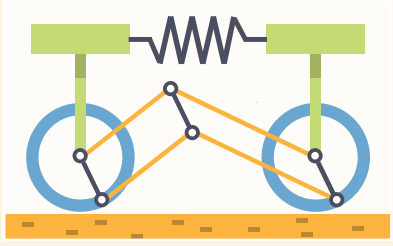
Рис. 3

Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

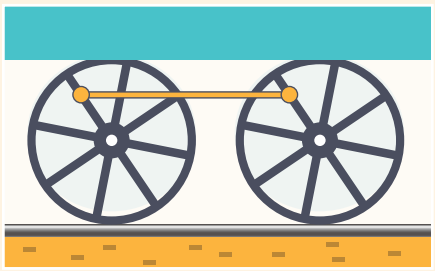
1. На рисунке снизу показана так называемая «штурманская» линейка. С ее помощью легко проводить прямую, параллельную краю линейки, через данную точку на карте.
   - Объясните, как устроена такая линейка.
   - Как принцип ее работы связан с признаком параллелограмма?

2. На рисунке показан шарнирный механизм, который обеспечивает синхронное движение двух колес при изменении расстояния между их осями.
   - Как вы объясните его работу?



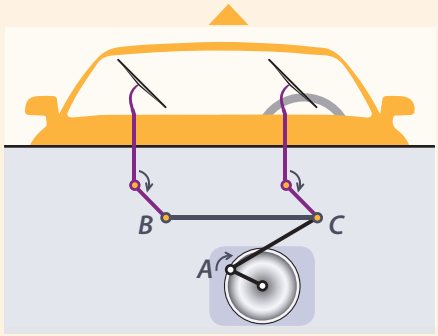
3. На рисунке справа показаны два колеса паровоза, жестко соединенные между собой чугунной перекладиной – «дышлом». Для того, чтобы они могли одно-временно катиться по рельсу, длина «дышла» должна быть равна расстоянию между осями этих колес.

- Почему это необходимо?
- Верно ли, что при движении колес «дышло» будет всегда параллельно рельсу?



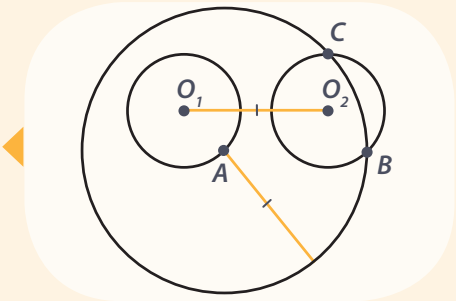
4. На рисунке слева показано устройство шарнирного механизма «дворников» автомобиля. Мотор вращает шарнир A по окружности с постоянной скоростью, а щетки на лобовом стекле автомобиля при этом совер-шают синхронные движения то в одну, то в другую сторону.

- Как вы объясните, почему щетки «дворников» все время остаются параллельны друг другу?



5. Нарисуйте две окружности одинакового радиуса с центрами в точках O_1 и O_2. На одной из них возьмите любую точку A. Теперь проведите третью окружность с центром в точке A и с радиусом, равным отрезку O_1O_2. Она пересечет вторую окружность в точках B и C. Проверьте, что один из отрезков AB или AC обязательно будет параллелен прямой O_1O_2.

- Как вы можете это объяснить?



Наверное, вы уже заметили, что первый признак параллелограмма и первое его свойство являются взаимно обратным утверждениями. Чтобы это стало совсем наглядно, давайте сформулируем их еще раз в терминах «если, то».

ПРЯМОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ	ОБРАТНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ
1 свойство параллелограмма	**1 признак** параллелограмма
Если четырехугольник является параллелограммом, то его противоположные стороны попарно равны	Если у четырехугольника противоположные стороны попарно равны, то он является параллелограммом.

1 ПРИЗНАК

Если у четырехугольника противоположные углы попарно равны, то он является параллелограммом.

А теперь сами сформулируйте остальные признаки параллелограмма и запишите их в эту таблицу:

ПРЯМОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ	ОБРАТНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ
2 свойство параллелограмма	**2 признак** параллелограмма
Если четырехугольник является параллелограммом, то его противоположные углы попарно равны	

ПРЯМОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ	ОБРАТНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ
3 свойство параллелограмма	**3 признак** параллелограмма
Если четырехугольник является параллелограммом, то его диагонали делят друг друга пополам	

ПРЯМОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ	ОБРАТНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ
4 свойство параллелограмма	**4 признак** параллелограмма
	Если у четырехугольника две противоположные стороны параллельны и равны, то он является параллелограммом

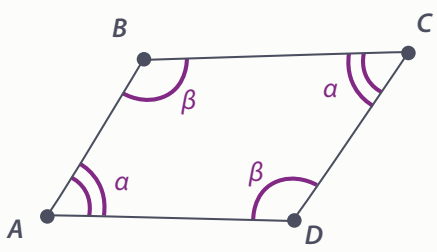
А теперь давайте докажем остальные признаки параллелограмма.

2 ПРИЗНАК

Если у четырехугольника противоположные углы попарно равны, то он является параллелограммом.

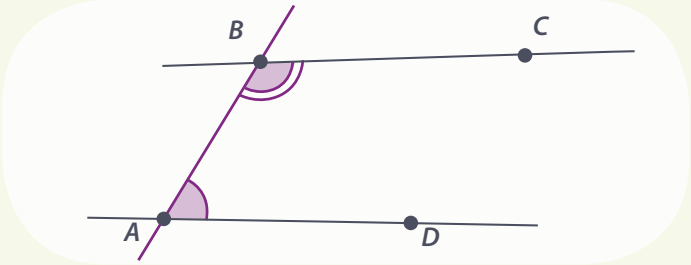
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Пусть противоположные углы некоторого четырехугольника **ABCD** попарно равны. Обозначим величину равных углов при его вершинах A и C буквой **α**, а величину углов при вершинах B и D буквой **β**.*

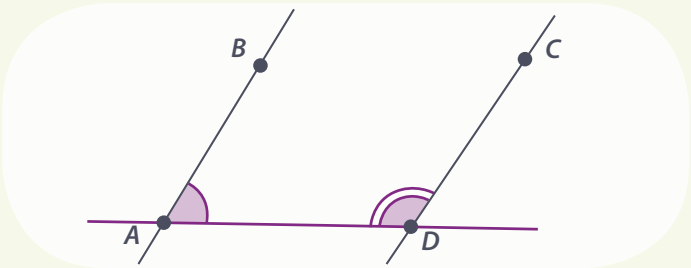


Давайте сложим все эти углы и вспомним, что в любом четырехугольнике сумма углов равна 360°. Тогда мы получим, что $2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 360°$. *Откуда* $\alpha + \beta = 180°$.

А теперь посмотрите на прямую ***AB****: она пересекает прямые* ***AD*** *и* ***BC****, причем углы* α *и* β *лежат от нее в одной полуплоскости. Именно такие углы называют внутренними односторонними при двух прямых и секущей* ***AB****. Мы уже с вами нашли, что* $\alpha + \beta = 180°$. *Значит, по первому признаку параллельных прямых прямые* ***AD*** *и* ***BC*** *должны быть параллельны друг другу.*



Проведем такое же рассуждение для секущей ***AD****. Эта прямая пересекает прямые* ***AB*** *и* ***CD*** *и образует с ними такие же внутренние односторонние углы* α *и* β. *Поскольку* $\alpha + \beta = 180°$, *то по тому же признаку прямые* ***AB*** *и* ***CD*** *должны быть тоже параллельны. Значит, противоположные стороны четырехугольника* ***ABCD*** *лежат на параллельных прямых и он будет параллелограммом по определению.*



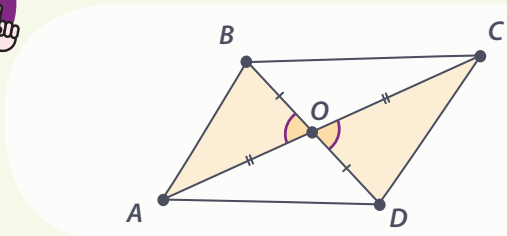
Что и требовалось доказать.

3 ПРИЗНАК

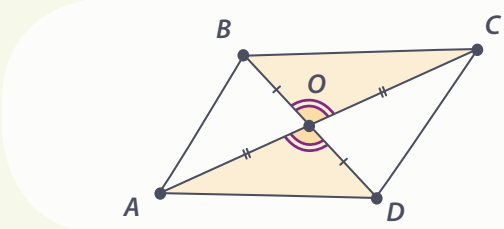
Если диагонали четырехугольника делят друг друга пополам, то он параллелограмм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть диагонали ***AC*** *и* ***BD*** *некоторого четырехугольника* ***ABCD*** *пересекаются в точке* ***O****, которая делит каждую из них пополам. То есть, по условию мы имеем, что* $AO = CO$, $BO = DO$.



Вначале заметим, что углы ***AOB*** *и* ***COD*** *вертикальные, поэтому они равны. Треугольники* ***AOB*** *и* ***COD*** *должны быть равны по первому признаку, поскольку имеют по две соответственно равные стороны и угол между ними. Значит, должно быть* $AB = CD$.



*Точно также по первому признаку равны треугольники **AOD** и **COB**. Откуда следует, что **AD** = **BC**.*

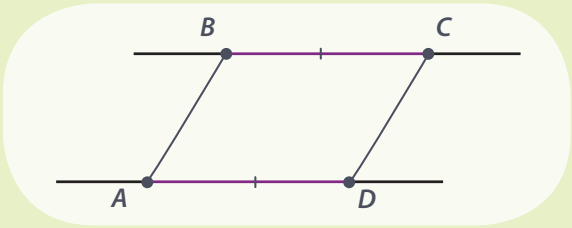
*Получается, что в четырехугольнике **ABCD** противоположные стороны попарно равны. Но тогда он должен быть параллелограммом по его первому признаку. То есть, мы третий признак параллелограмма свели к первому его признаку, который нами уже доказан.*

Что и требовалось доказать.

Последний из признаков параллелограмма, которые часто используют, звучит так:

4 ПРИЗНАК

Если у четырехугольника две стороны параллельны и равны, то он является параллелограммом.



УПРАЖНЕНИЯ

6. Докажите четвертый признак параллелограмма.

7. Постройте параллелограмм по двум его сторонам и углу между ними.

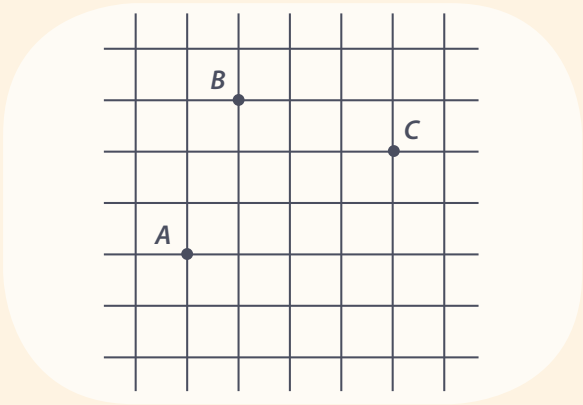
8. Постройте параллелограмм по двум его диагоналям и углу между ними.

9. Нарисуйте две окружности с одним центром. А теперь постройте параллелограмм так, чтобы две его вершины лежали на одной окружности, а две другие – на второй.

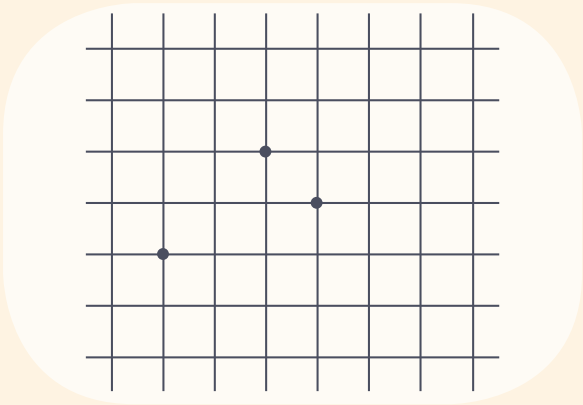
10. На рисунке показан подъемник. Его механизм раздвигается «гармошкой» и двигает вверх платформу. Как вы объясните, почему эта платформа всегда остается горизонтальной?

11. На рисунке показано устройство складной сушки для белья. Объясните, почему она может так складываться. Почему все ее перекладины, на которые вешают белье, остаются параллельны друг другу?

12. На клетчатой бумаге отметили точки A, B и C. Где необходимо взять четвертую точку D, чтобы получился параллелограмм ABCD?



13. На клетчатой бумаге отметили три точки. Где еще можно взять четвертую точку, чтобы они были вершинами параллелограмма? Сколько всего может быть таких точек?



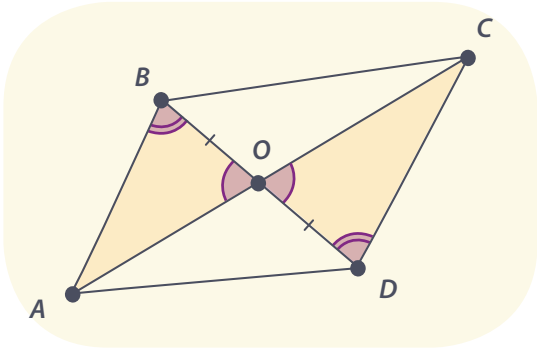
ВОПРОСЫ

1. Какую фигуру называют параллелограммом? Как образовалось данное слово?
2. Имеет ли лист писчей бумаги форму параллелограмма?
3. Верно ли, что сумма двух углов параллелограмма равна развернутому углу?
4. Верно ли, что диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника?
5. Два равных треугольника склеили по одной стороне и получили один четырехугольник. Будет ли он параллелограммом?
6. Каким свойством обладают стороны параллелограмма? Какой признак соответствует этому свойству?
7. Каким свойством обладают углы параллелограмма? Какой признак соответствует этому свойству?
8. Каким свойством обладают диагонали параллелограмма? Какой признак соответствует этому свойству?
9. У четырехугольника две стороны равны, а две другие параллельны. Верно ли, что этот четырехугольник параллелограмм?
10. Верно ли, что диагонали разбивают параллелограмм на четыре равных треугольника?
11. Можете ли вы привести пример свойства параллелограмма, для которого обратное утверждение не верно?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1

Две стороны четырехугольника параллельны, а одна его диагональ делит другую пополам. Является ли данный четырехугольник параллелограммом?

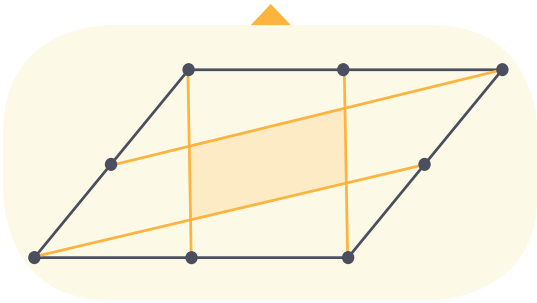


РЕШЕНИЕ: Пусть стороны *AB* и *CD* четырехугольника *ABCD* параллельны, а его диагонали пересекаются в точке *O*. По условию одна из диагоналей данного четырехугольника делит другую пополам. Будем считать, что *BO* = *OD*. Углы *ABO* и *CDO* должны быть равны, поскольку они накрест лежащие при двух параллельных и секущей *BD*. Кроме того, углы *AOB* и *COD* равны как вертикальные. Значит, треугольники *AOB* и *COD* равны по второму признаку. Поэтому *AO* = *CO*. Но тогда обе диагонали нашего четырехугольника делят друг друга пополам. Значит, он должен быть параллелограммом по 3 признаку.

ОТВЕТ: данный четырехугольник является параллелограммом.

ПРИМЕР 2

Вершины параллелограмма соединили четырьмя отрезками с серединами его сторон так, как это показано на рисунке. Докажите, что точки пересечения этих отрезков тоже образуют параллелограмм.

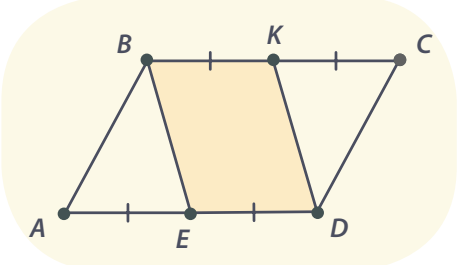


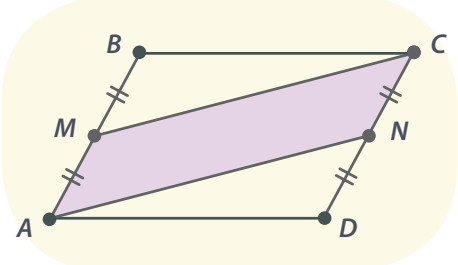
РЕШЕНИЕ: Обозначим середины сторон *BC* и *AD* параллелограмма *ABCD* буквами *K* и *E*. Противоположные стороны параллелограмма равны по свойству, поэтому *BC* = *AD*. Половины же равных сторон также равны, значит, *BK* = *ED*. Но эти отрезки лежат на параллельных прямых *BC* и *AD*. Значит, две стороны четырехугольника *EBKD* параллельны и равны, поэтому он должен быть параллелограммом по 4 признаку. Отсюда сразу следует, что прямые *BE* и *KD* должны быть параллельны друг другу.

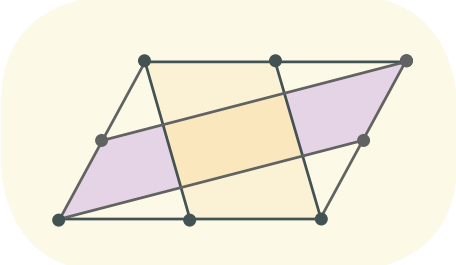
Теперь рассмотрим четырехугольник *AMCN*, где точки *M* и *N* – середины сторон *AB* и *CD*. Он также будет параллелограммом по 4 признаку. Отсюда следует, что прямые *AN* и *CM* параллельны.

Но тогда точки пересечения четырех отрезков из условия задачи образуют четырехугольник, противоположные стороны которого лежат на параллельных прямых. Значит, он параллелограмм по определению.

Что и требовалось доказать.

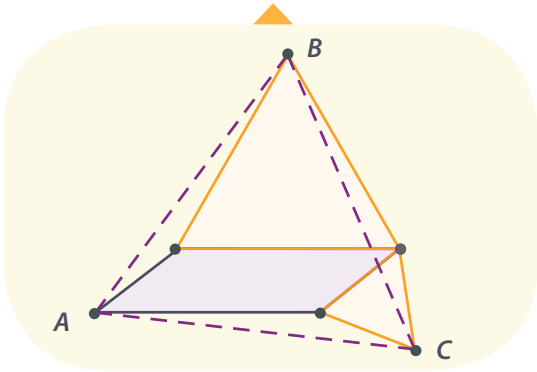






ПРИМЕР 3 ★☆☆

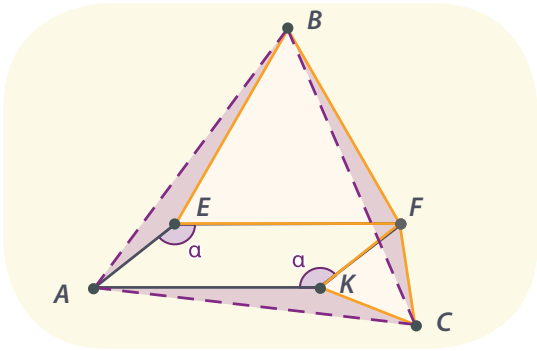
На двух сторонах параллелограмма построили равносторонние треугольники так, как это показано на рисунке. Докажите, что треугольник *ABC* тоже равносторонний.



РЕШЕНИЕ: Обозначим наш параллелограмм как *AEFK*, а величину угла *AEF* за α. Поскольку по свойству параллелограмма его противоположные углы равны, то угол *AKF* также равен α. Вы помните, что все углы равностороннего треугольника равны $60°$? Тогда можно через α выразить угол *AEB*. Он будет равен $360° - 60° - \alpha = 300° - \alpha$. Тому же будет равен и угол *AKC*.

Отрезки *AE* и *KF* равны как стороны параллелограмма. Но треугольник KFC равносторонний, поэтому *KF* = *CK*. Значит, *AE* = *CK*. Точно также можно доказать, что *BE* = *AK*.

Давайте теперь посмотрим на треугольники *AEB* и *AKC*. Они равны по первому признаку. Действительно, их углы *AEB* и *AKC* равны, сторона *AE* = *CK* и *BE* = *AK*. Значит, *AB* = *AC*.



Вычислим теперь угол *BFC*. Он складывается из углов двух равносторонних треугольников и угла параллелограмма при вершине *F*. Но этот угол параллелограмма равен $180° - \alpha$ (Скажите, почему?) Значит, угол $BFC = 60° + (180° - \alpha) + 60° = 300° - \alpha$. Получается, что треугольник *BFC* также равен треугольникам *AEB* и *AKC* по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует, что *AB* = *BC* = *AC*, то есть треугольник *ABC* равносторонний.

Что и требовалось доказать.

ЗАДАЧИ

1 ★☆☆ Пара параллельных прямых пересекают три другие параллельные прямые. Сколько при этом образовалось параллелограммов?

2 ★☆☆ Нарисуйте две прямые, которые параллельны сторонам параллелограмма и пересекаются внутри него. Сколько всего на чертеже получится параллело-граммов?

3 ★☆☆ Найдите углы параллелограмма, если:

а) сумма двух его углов равна 100^0
б) разность двух его углов равна 40^0
в) два его угла относятся как 3 : 7

4 ★☆☆ Периметр параллелограмма равен 42 см. Найдите его стороны, если

а) их длины относятся как 2 : 5
б) одна из них больше другой на 3 см.

5 ★☆☆ Диагонали делят параллелограмм на 4 треугольника, разность периметров двух из них равна 5 см. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 50 см.

6 ★☆☆ Стороны параллелограмма равны 4 и 8 см. Может ли одна из его диагоналей быть а) 10 см? б) 12 см?

7 ★☆☆ Параллелограмм разрезали на два меньших параллелограмма, периметры которых равны 5 и 7. Найдите стороны большого параллелограмма, если его периметр равен 10 см.

8 ★☆☆ Докажите, что биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны.

9 ★☆☆ Угол параллелограмма равен 100°. Из его вершины провели две высоты параллелограмма. Чему равен угол между этими высотами?

10 ★☆☆ Из вершины тупого угла параллелограм-мам проведены биссектриса этого угла и высота. Угол между ними равен 25°. Найдите углы параллелограмма.

11 ★☆☆ Диагональ параллелограмма равна его стороне и образует с ней угол 70°. Какой угол эта диагональ образует с другой стороной параллелограмма, выходящей из той же вершины?

12 ★☆☆ Стороны параллелограмма равны 4 и 5, а острый угол между ними равен 30°. Найдите длины двух высот параллелограмма.

13 ★☆☆ Докажите, что отрезок, которые соеди-няет середины двух противоположных сторон параллелограмма, равен одной из его сторон.

14 ★☆☆ Параллелограммы ABCD и BEKC имеют общую сторону BC. Верно ли, что середины отрезков AK и ED совпадают?

15 ★☆☆ Сколько существует параллелограммов, три вершины которых образуют данный треугольник?

16 ★☆☆ На стороне BC параллелограмма ABCD взяли точку K. Оказалось, что угол BAK равен 20°, а угол CDK равен 50°. Найдите угол AKD.

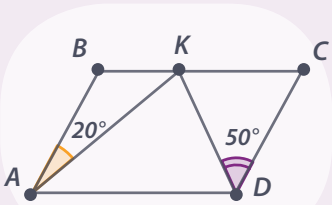
17 ★☆☆ Докажите, что биссектрисы двух противоположных углов параллелограмма параллельны, либо лежат на одной прямой.

18 ★☆☆ Через каждую вершину треугольника параллельно его противоположной стороне провели прямую. Эти три прямые образовали новый треугольник. Докажите, что вершины начального треугольника являются серединами сторон нового.

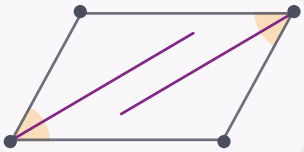
19 ★☆☆ В параллелограмме, стороны которого равны 2 и 5, провели биссектрису его угла. В каком отношении она делит сторону параллелограмма?

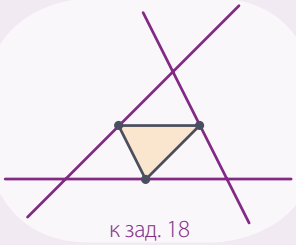
20 ★☆☆ Диагональ параллелограмма разбили на три равные части. Докажите, что полученные точки деления и две другие его вершины образуют новый параллелограмм.

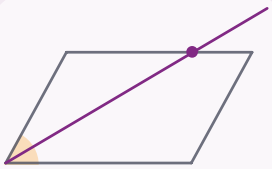
21 ★☆☆ На сторонах AB и CD параллелограмма ABCD взяли точки M и K так, что AM = CK. Докажите, что отрезок MK проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

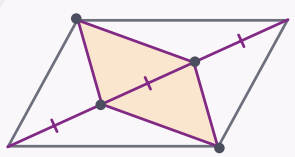


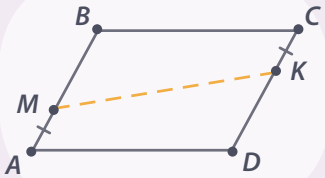
к зад. 16


к зад. 17

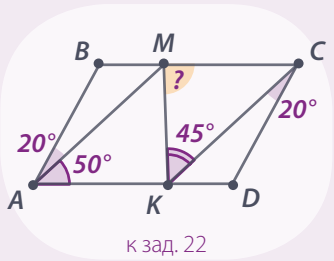

к зад. 18


к зад. 19

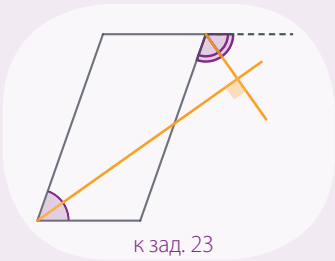

к зад. 20

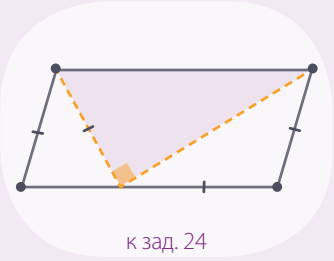


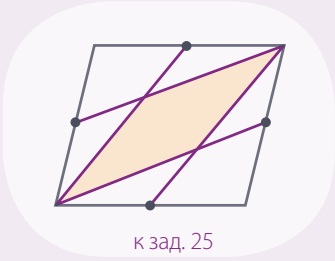
к зад. 21

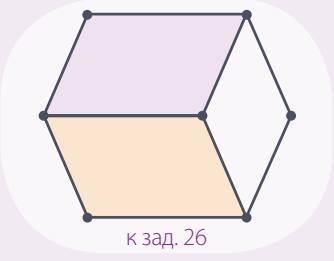


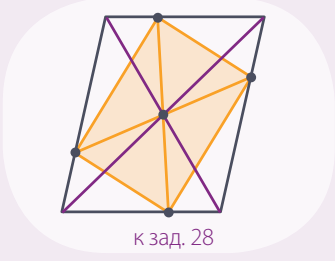
к зад. 22


к зад. 23


к зад. 24


к зад. 25


к зад. 26


к зад. 28

22 ★★☆ На сторонах AD и BC параллелограмма ABCD взяли точки M и K так, что углы MAB и KCD равны 20°, угол MKC равен 45°, а угол MAK равен 50°. Найдите угол CMK.

23 ★★☆ Докажите, что биссектриса угла, смежного с углом параллелограмма, перпендикулярна биссектрисе его противоположного угла.

24 ★★☆ Параллелограмм разрезали на два равнобедренных треугольника и один прямоугольный треугольник так. как это показано на рисунке. Найдите углы этого параллелограмма.

25 ★★☆ Вершины параллелограмма соединили с серединами его сторон так, как показано на рисунке. Докажите, что заштрихованные фигура - тоже параллелограммы.

26 ★★☆ Из трех параллелограммов составили шестиугольник так, как это показано на рисунке. Докажите, что этот шестиугольник можно разбить на три параллелограмма другим способом.

27 ★★☆ Биссектрисы двух углов при одной стороне параллелограмма делят другую его сторону на три равные части. Найдите отношение сторон параллелограмма. (Будьте внимательны: у задачи 2 ответа!)

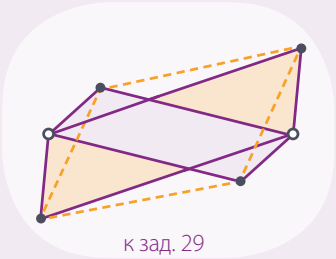
28 ★★☆ Через точку пересечения диагоналей параллелограмма провели две произвольные прямые. Докажите, что точки их пересечения с его сторонами образуют новый параллелограмм.

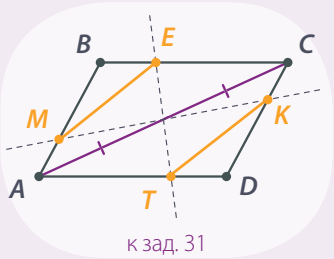
29 ★★☆ У двух параллелограммов совпадает пара противоположных вершин. Докажите, что остальные четыре их вершины образуют новый параллелограмм.

30 ★★☆ На сторонах BC и AD параллелограмма ABCD построили равносторонние треугольники BCK и AED так, как показано на рисунке. Докажите, что отрезок EK делит диагональ AC пополам.

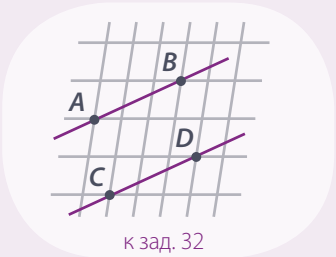
31 ★★☆ Через середину диагонали параллелограмма провели две прямые. которые пересекли его с стороны в точках M, E, K и T. Докажите, что прямая ME параллельна прямой KT.

32 ★★☆ Клетчатая сетка состоит из одинаковых параллелограммов. Докажите, что прямые AB и CD на ней параллельны.


к зад. 29



к зад. 31



к зад. 32

33 ★★☆ Клетчатая сетка состоит из одинаковых параллелограммов. Верно ли, что 4 отмеченных на рисунке отрезка пересекаются в одной точке?

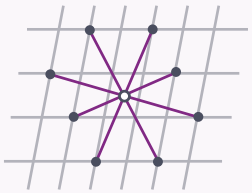
34 ★★☆ Две пары противоположных сторон шестиугольника соответственно параллельны и равны. Докажите, что третья пара его противоположных сторон обладает тем же свойством.

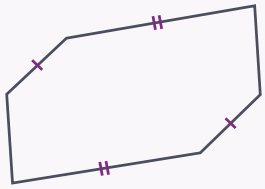
35 ★★★ Биссектрисы всех углов четырехугольника при пересечении друг с другом образовали параллелограмм. Верно ли, что данный четырехугольник является параллелограммом?

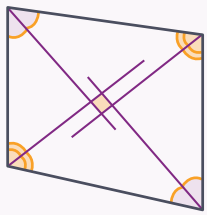
36 ★★★ Из произвольной точки A, взятой на стороне треугольника, проводится прямая, параллельная другой его стороне и пересекающая третью в точке B. Далее процесс повторяется. В результате получается ломаная. Верно ли, что она замкнется?

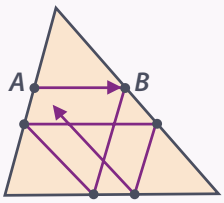
37 ★★★ Вершины одного параллелограмма по одной лежат на сторонах другого. Докажите, что их центры совпадают. Центр параллелограмма – это точка пересечения его диагоналей.

38 ★★★ Все углы шестиугольника равны. Докажите, что модули разностей его противоположных сторон равны.

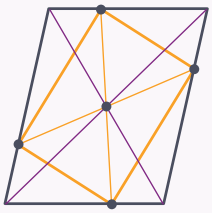

к зад. 33


к зад. 34


к зад. 35



к зад. 36

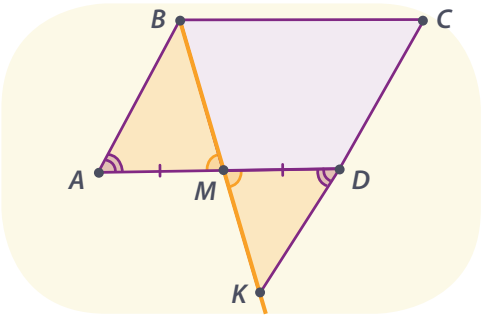

к зад. 37

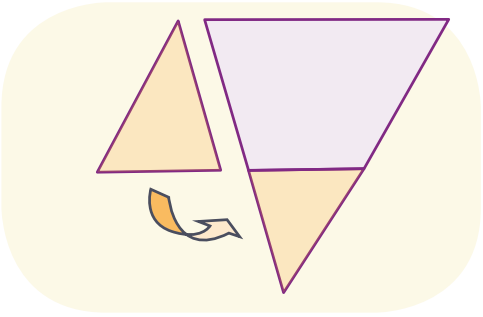
§2 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

В этом параграфе не будет никакой теории. Он целиком посвящен приемам решения задач с параллелограммами, в которых используются дополнительные построения. Ведь решить их можно только, если что-то достроить на чертеже и потом найти на нем равные треугольники. В принципе дополнительное построение может быть каким угодно, но некоторые приемы таких построений очень похожи, и мы с вами их разберем на примерах решения данных задач.

ПРИМЕР 1 ★★☆

Как разрезать параллелограмм на две части, чтобы потом сложить из них один треугольник?



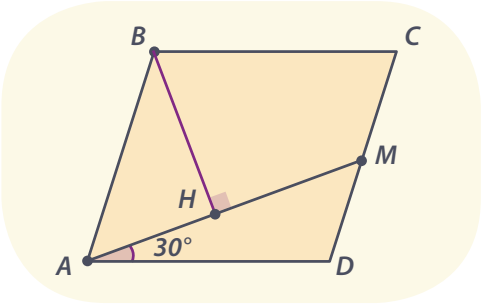


РЕШЕНИЕ: Давайте сделаем дополнительное построение: проведем прямую *BM* через вершину *B* параллелограмма и точку *M* – середину его стороны *AD*. Пусть эта прямая пересечет прямую *CD* в точке *K*. Тогда мы получим равные треугольники *ABM* и *DKM*. В самом деле, их углы *BAD* и *ADK* будут равны как накрест лежащие при параллельных, а углы при вершине *M* будут равны, поскольку они вертикальные. Сторона *AM* будет равна стороне *MD*, ведь точка *M* была нами выбрана не случайно. Значит, эти два треугольника будут равны по второму признаку. Но тогда уже понятно, как разрезать наш параллелограмм на две нужные части – это можно сделать по отрезку *BM*. Отрезанный треугольник *ABM* встанет на место равного ему треугольника *DKM,* и вместе они составят один большой треугольник *BKC*.

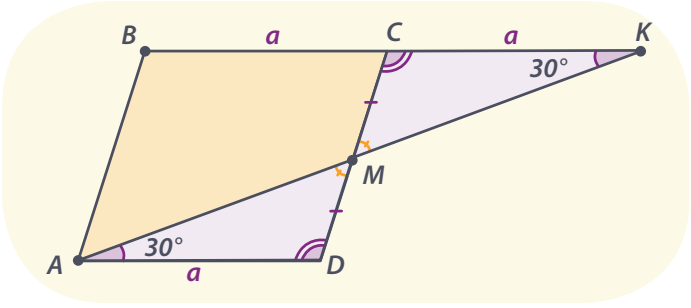
Такое разрезание не единственно. Точно также можно провести нужный разрез через любую другую вершину параллелограмма и середину противоположной от нее стороны.

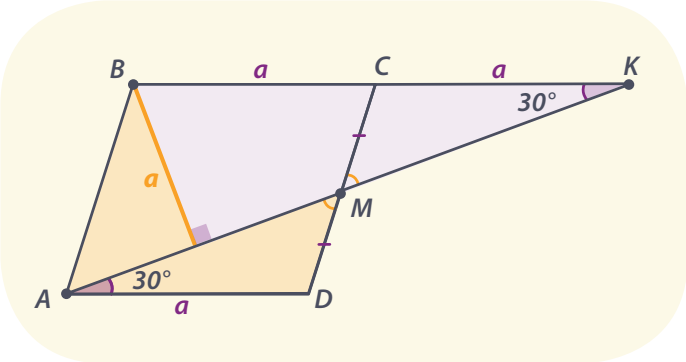
ПРИМЕР 2 ★★☆

Вершину *A* параллелограмма *ABCD* соединили с серединой *M* его стороны *CD*. Известно, что угол *MAD* равен *30°*. Докажите, что расстояние от вершины B до прямой *AM* равно одной из сторон этого параллелограмма.



РЕШЕНИЕ: Сделаем то же дополнительное построение, которое нам помогло в первой задаче: продлим отрезок *AM* до пересечения с прямой *BC* в точке *K*. (продолжение на след. странице)





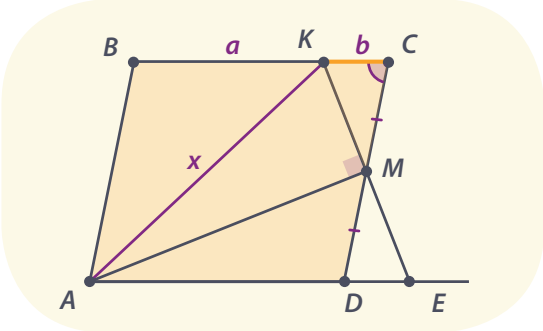
Тогда треугольники *AMD* и *KMC* будут равны по второму признаку, поскольку *DM = CM*, их углы при вершине M вертикальные, а углы при вершинах *D* и *C* равны как накрест лежащие при параллельных. Значит, должно быть *CK = AD = a*. Но противоположные стороны параллелограмма равны, поэтому *BC = AD = a*. Кроме того, угол *CKM = 30°*.

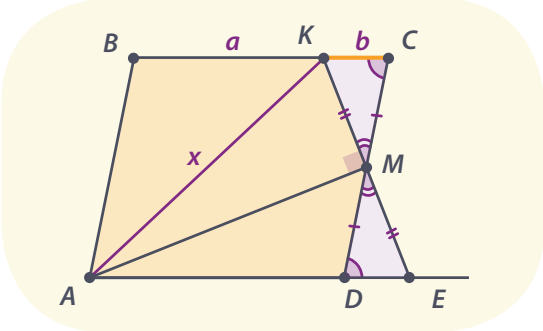
Давайте теперь вспомним, что расстояние от точки до прямой – это длина отрезка перпендикуляра, опущенного из нее на эту прямую. Пусть *BH* – нужный нам перпендикуляр. А теперь рассмотрим прямоугольный треугольник *BKH*. Поскольку он имеет угол *30°*, то по свойству такого треугольника его противоположный катет должен быть равен половине гипотенузы. Значит, *BH = ½ BK = ½ (2a) = a*. Таким образом, расстояние от точки в до прямой *AM* равно стороне *BC* данного нам параллелограмма.

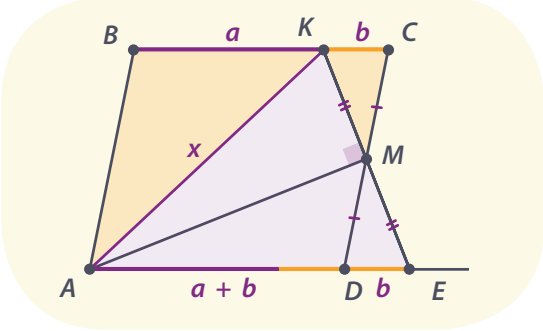
Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 3 ★★★

Точка *M* – середина стороны *CD* параллелограмма *ABCD*. Точка *K* делит сторону *BC* на отрезки с длинами *a* и *b* так, что угол *AMK = 90°*. Найдите длину отрезка *AK*.







РЕШЕНИЕ: Сделаем дополнительное построение: продолжим отрезок *MK* до пересечения с прямой *AD* в точке *E*.

Вы видите на чертеже равные треугольники? Конечно, это треугольники *KMC* и *EMD*! Но увидеть их мало, нужно еще доказать их равенство. Давайте это сделаем.

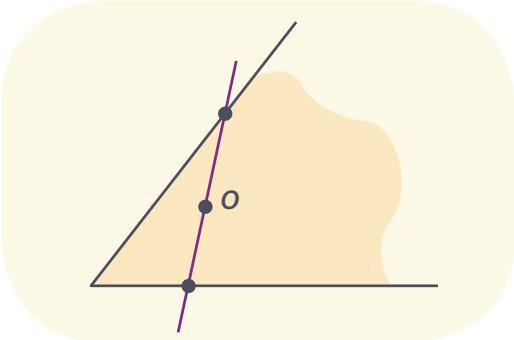
Углы *KCM* и *EDM* равны как накрест лежащие при параллельных прямых и секущей *CD*. Углы *KMC* и *EMD* равны как вертикальные. Значит, треугольники *KMC* и *EMD* действительно равны по второму признаку. Отсюда следует, что *KM = ME и DE = CK = b*.

Посмотрите теперь на треугольник *AKE*: отрезок *AM* в нем является и медианой и высотой. Вот где нам пригодился данный в условии прямой угол! Значит, этот треугольник равнобедренный и *AK = AE*. Отрезок *AK* был очень неудобным для вычисления, а длину отрезка *AE* легко найти: *AE = AD + DE = a + b + b = 2a + b*. В последнем равенстве мы воспользовались тем, что стороны *AD* и *BC* у параллелограмма равны *a + b*.

ОТВЕТ: **2a + b**

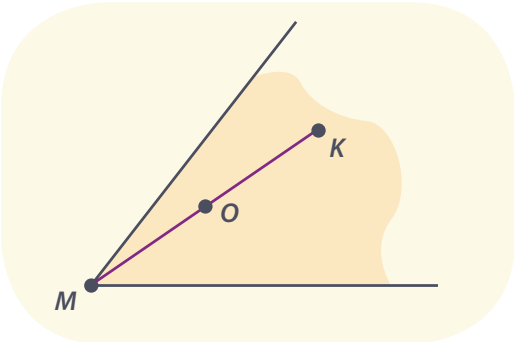
ПРИМЕР 4 ★★☆

Внутри угла взяли произвольную точку O. Как провести через нее прямую так, чтобы отрезок этой прямой, заключенный внутри угла, делился точкой O пополам? Сколько таких прямых можно провести?



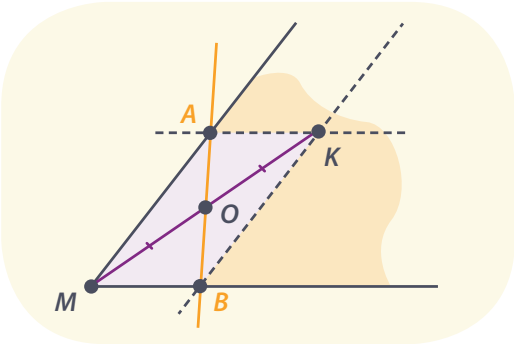
РЕШЕНИЕ: Попробуем вписать в данный угол параллелограмм так, чтобы точка O оказалась на пересечении его диагоналей. Поскольку диагонали параллелограмма делят друг друга пополам, то одна из них как раз даст нам положение нужной нам прямой.

Обозначим вершину данного угла буквой M и соединим ее с точкой О. Теперь сделаем дополнительное построение: продлим отрезок MO на свою длину за точку O и построим точку K так, что $MO = OK$.



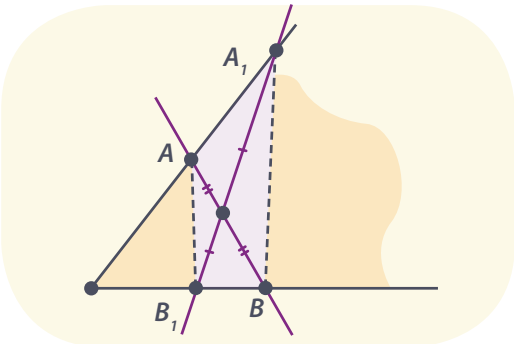
Если через точку K провести прямые AK и BK, каждая из которых параллельна стороне нашего угла, то получится параллелограмм $MAKB$.

А теперь проведем его диагональ AB – она разделится нашей точкой O пополам по свойству параллелограмма. Ясно, что эта прямая AB – искомая.



Данное построение можно провести для любой точки O внутри угла. А сколько нужных прямых можно провести через данную нам точку O? Приведенное нами построение однозначно. Но, возможно, существуют и другие способы построить нужную прямую. Как же это выяснить?

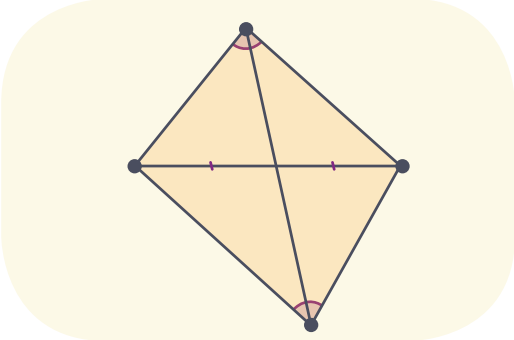
Попробуем рассуждать от противоположного. То есть, предположим, что нам удалось построить две нужные прямые AB и A_1B_1 через одну точку O. Давайте рассмотрим тогда четырехугольник AA_1BB_1. Его диагонали делят друг друга пополам, поэтому он должен быть параллелограммом по признаку. Но тогда его стороны AA_1 и BB_1 должны быть параллельны, а ведь они пересекаются в точке M. Мы получили противоречие. Значит, второй такой прямой A_1B_1 не может быть.



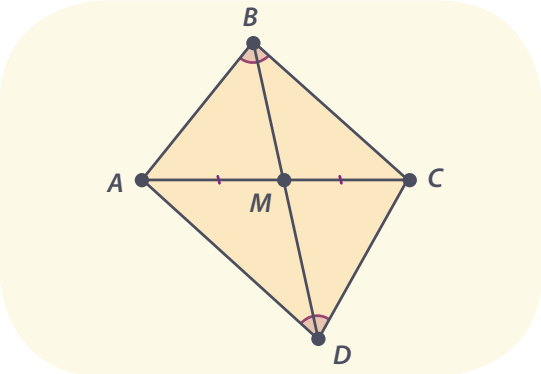
ОТВЕТ: **нужная прямая всегда существует и единственна.**

ПРИМЕР 5 ★★★

Петя сформулировал пятый признак параллелограмма. Звучит он так: если два противоположных угла четырехугольника равны, а соединяющая их диагональ делит другую его диагональ пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм. Верен ли признак Пети?



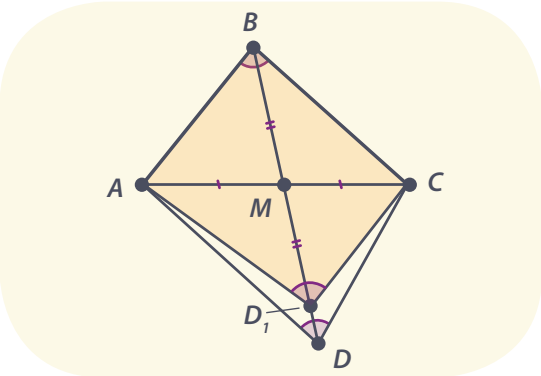
РЕШЕНИЕ: Пусть четырехугольнике *ABCD* углы при вершинах *B* и *D* равны, а соединяющая их диагональ *BD* пересекает другую его диагональ *AC* в ее середине – точке *M*. Сразу найти на этом чертеже равные треугольники не получится – для этого не хватает данных.



Давайте опять рассуждать от противоположного.

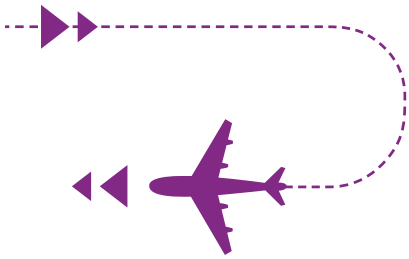
Предположим, что наш четырехугольник не обязательно параллелограмм. Тогда его диагональ *BD* не должна делиться точкой *M* пополам. Допустим, например, что $BM < DM$.

Сделаем теперь дополнительное построение: отложим от точки *M* на отрезке *MD* отрезок, равный *BM*. То есть, возьмем точку D_1 так, что $BM = MD_1$. Тогда четырехугольник $ABCD_1$ будет параллелограммом по третьему признаку. Значит, его угол AD_1C будет равен углу *ABC*. По условию углы при вершинах *B* и D_1 равны, поэтому получается, что угол *ADC* равен углу AD_1C. А этого не может быть, поскольку тогда сумма углов невыпуклого четырехугольника $ADCD_1$ будет больше, чем *360°*. Мы получили противоречие. Значит, отрезки *BM* и *DM* на самом деле равны. Но тогда четырехугольник *ABCD* параллелограмм по признаку. То есть, признак Пети верен.



ОТВЕТ: **признак верен**

ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ



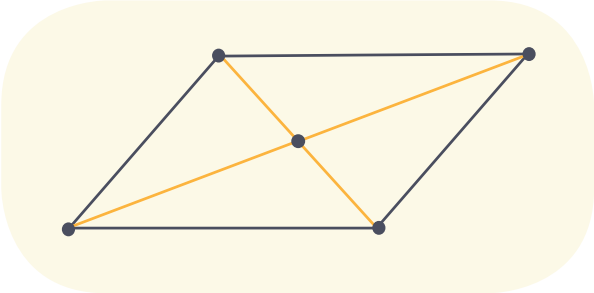
Обратите внимание: последняя задача нами была решена с помощью специального логического приема, который называется «***обратным ходом***». Суть его в том, что мы не стали искать равные треугольники на данном нам чертеже, а пошли в «обратную сторону»: построили параллелограмм $ABCD_1$ и потом уже доказали, что его вершина D_1 совпадает с четвертой вершиной данного нам четырехугольника. Это удалось потому, что есть только одна точка на продолжении отрезка BM, из которой отрезок AC «виден» под фиксированным углом.

С помощью такого же ***обратного хода*** иногда можно доказывать и совсем очевидные утверждения. Если вы проведете в параллелограмме две диагонали, то каждому будет ясно, что они пересекают друг друга. В таких случаях часто говорят: «Это очевидно!». Но в математике очевидным принято считать лишь то, что можно легко доказать... Иначе всякое очевидное утверждение нужно было бы считать аксиомой, а ведь может еще оказаться, что оно просто неверно!

Мы сейчас с вами строго докажем теорему.

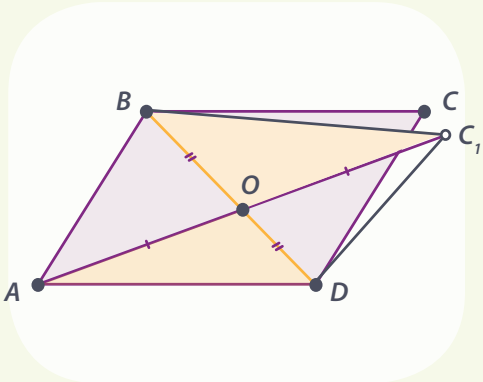
ТЕОРЕМА

Диагонали параллелограмма имеют точку пересечения.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Давайте проведем в параллелограмме **ABCD** одну его диагональ **BD** и возьмем ее середину – точку **O**. Тогда отрезок **AO** будет медианой треугольника **ABD**. А теперь давайте сделаем известное нам дополнительное построение: продлим медиану **AO** этого треугольника на свою длину. Мы получим такую точку C_1, что $AO = OC_1$.*



*Легко заметить, что треугольник BOC_1 будет равен треугольнику **AOD** по первому признаку. Ведь $OC_1 = AO$, $BO = OD$, а углы **BOC 1**и **AOD** вертикальные. Значит, угол OBC_1 равен углу **ADO**. Отсюда следует, что прямая BC1 должна быть параллельна прямой **AD** по признаку.*

*Совершенно также можно доказать, что прямая DC_1 параллельна прямой **AB**.*

*Давайте вспомним: по аксиоме параллельных через точку **B** можно провести только одну прямую параллельную прямой **AD**. Значит, прямые BC_1 и **BC** должны совпасть! Другими словами, точка C_1 должна лежать где-то на прямой **BC**. Но точно также должны совпасть прямые C_1D и **CD**, поэтому наша точка C_1 должна лежать и на прямой **CD**. Но прямые **BC** и **DC** могут пересекаться только в одной точке – и это точка **C**. Значит, построенная нами точка C_1 должна совпасть с вершиной **C** нашего параллелограмма. А раз так, то его диагонали пересекаются – причем именно в точке **O**.*

Что и требовалось доказать.

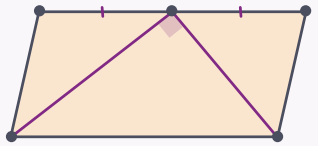
ЗАДАЧИ

1 ★★☆ Из середины стороны параллелограмма противоположная его сторона видна под прямым углом. Найдите отношение сторон параллелограмма.

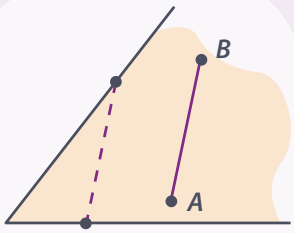
2 ★★☆ Дан угол и некоторый отрезок AB на плоскости. Постройте отрезок равный и параллельный отрезку AB так, чтобы его концы лежали на сторонах данного угла.

3 ★★☆ Серединный перпендикуляр к стороне параллелограмма делит его противоположную сторону на отрезки с длинами 1 и 5. Найдите другую сторону параллелограмма, если один из его углов равен 60°.

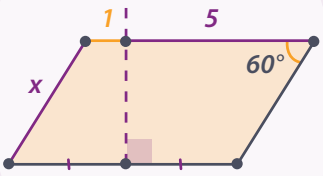
4 ★★☆ Внутри угла взяли точку. Как провести через нее прямую так, чтобы она проходила через вершину, если самой вершиной нельзя пользоваться?



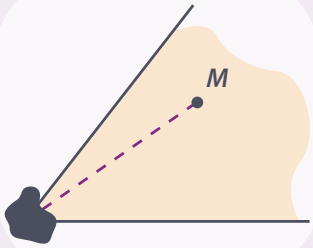
к зад. 1



к зад. 2



к зад. 3



к зад. 4

5 ★★☆ Постройте треугольник по длине его медианы и двум углам, которые она образует с его сторонами, выходящими из той же вершины.

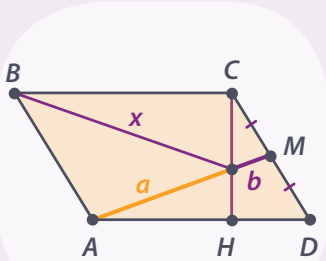
6 ★★☆ Постройте треугольник по длинам двух его сторон и медиане, проведенной к третьей.

7 ★★☆ Вершину тупого угла A параллелограмма ABCD соединили с точкой E - серединой его стороны CD. Высота CH параллелограмма пересекает отрезок AM в точке O. Найдите BO, если AO = a, OM = b.

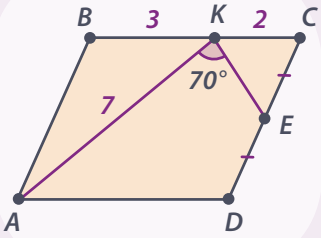
8 ★★☆ Точка E – середина стороны CD параллелограмма ABCD. На его стороне BC взяли точку K так, что BK = 3, CK = 2. Известно, что угол AKE = 70°, AK = 7. Найдите угол AKB.

9 ★★☆ Точка M – середина стороны CD параллелограмма ABCD. На его стороне AD взяли такую точку K, что углы AKM и BMK равны. Найдите BM, если AK = 8, KD = 1.

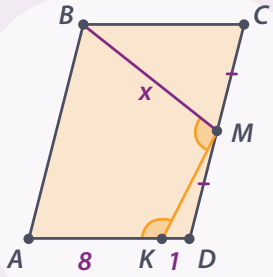
10 ★★☆ Вершину параллелограмма соединили с серединами двух его противоположных сторон. Могут ли равняться три отмеченные на рисунке угла?



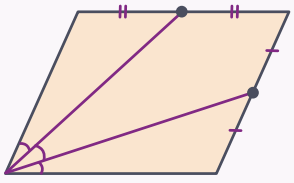
к зад. 7



к зад. 8



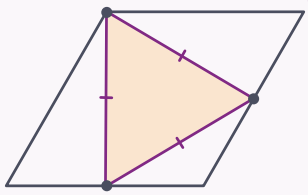
к зад. 9



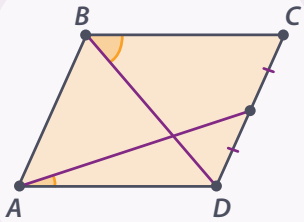
к зад. 10

11 ★★☆ Вершина параллелограмма и середины двух его противоположных сторон образуют равносторонний треугольник. Найдите углы параллелограмма на рисунке.

12 ★★★ Точка E – середина стороны CD параллелограмма ABCD. Известно, что угол DAE равен углу CBD. Найдите отношение AE : BD.



к зад. 11



к зад. 12

13 ★★★ В треугольнике ABC провели медиану BM. На его стороне BC взяли точку E так, что угол BME прямой. Известно, что AB = BE, а угол MBC равен 35°. Найдите угол ABC.

14 ★★★ Параллельно стороне AC треугольника ABC проведите прямую, которая пересекла бы его стороны AB и BC в таких точках M и K, что AM = BK.

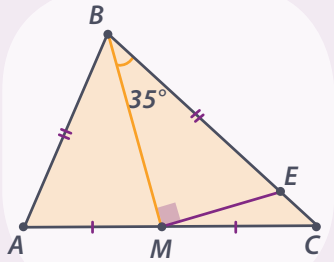
15 ★★★ Постройте треугольник по сумме двух его сторон, углу между ними и медиане, проведенной к третьей стороне.

16 ★★★ Диагональ четырехугольника разбивает его на два треугольника с равными периметрами. Другая диа-гональ пересекает ее в середине. Докажите, что данный четырехугольник – параллелограмм.

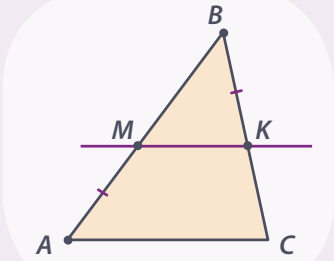
17 ★★★ Диагонали разбивают четырехугольник на четыре треугольника равного периметра. Докажите, что данный четырехугольник – параллелограмм.

18 ★★★ Все углы шестиугольника равны. Докажите, что модули разностей его противоположных сторон равны.

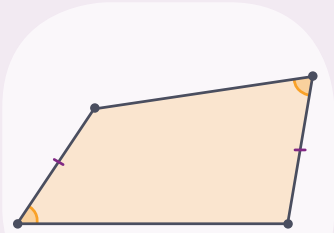
19 ★★★ У четырехугольника равны два противоположных угла и две противоположные стороны. Обязательно ли он параллелограмм?



к зад. 13



к зад. 14



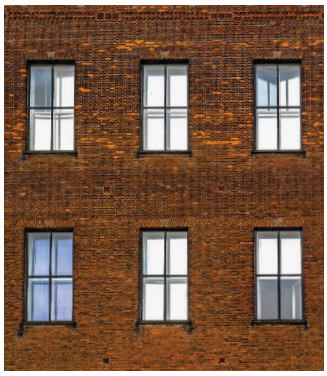
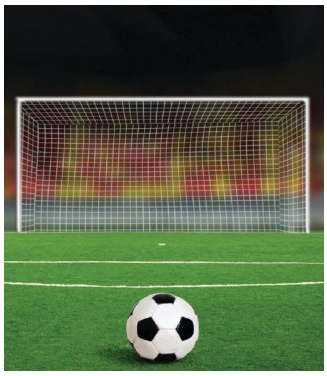
к зад. 19

§ 3 ПРЯМОУГОЛЬНИК, РОМБ, КВАДРАТ

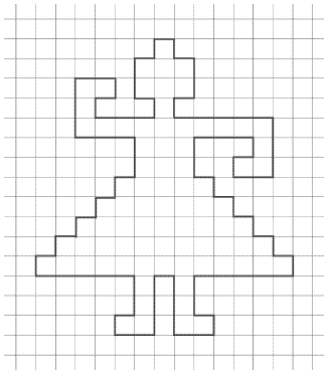
Почему такие названия?

Из всех четырехугольников человек в своей практической жизни чаще всего имеет дело с прямоугольниками, ромбами и квадратами. ***Прямоугольники*** вокруг нас встречаются повсеместно – это и дверь в дом, и окно на улицу, и стена. Стол в комнате, кровать, ковер на полу, да и сам пол часто имеют форму прямоугольника. То же самое можно сказать о форме монитора компьютера, футбольных ворот, одеяла или простыни.

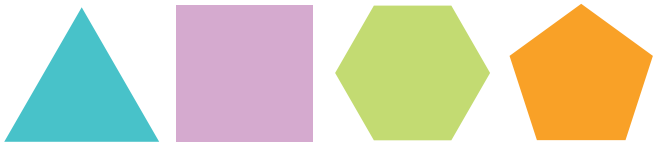
А почему вокруг нас так много прямоугольников? Дело в том, что прямоугольник – очень практичная фигура. Его проще изготовить, чем круг или даже треугольник. А главное – одинаковые прямоугольники очень удобно прикладывать друг к другу. Вспомните: из кирпичей складывают стены домов, из прямоугольных листов бумаги сшивают книги. Название прямоугольник говорит само за себя: это четырехугольник, все углы которого прямые.

Нас с вами окружают не только прямоугольники, но и ***квадраты***. Плитки на полу, клетки на шахматной доске или в вашей тетради по математике, – все это квадраты. А разве квадрат не является прямоугольником? Конечно, является! Ведь у него тоже все углы прямые. Просто квадрат – это важный частный случай прямоугольника, поскольку все его стороны равны между собой. Получается, что у квадрата одновременно одинаковы все его стороны, и все углы.



Такие многоугольники, у которых равны все их стороны и все углы, называются правильными. А какие правильные многоугольники вы уже знаете? Конечно, это равносторонний треугольник! Ведь у него все его углы равны 60°. Но кроме правильного треугольника существуют еще правильный пятиугольник, шестиугольник и так далее. А правильный четырехугольник просто называют квадратом.



Само название «***квадрат***» возникло от латинского слова ***quadratum***, что значит «четырехугольник». Так многие века обычные люди называли самый простой и понятный им четырехугольник. Ведь именно квадратами принято всегда измерять площадь земельных участков, да и вообще площади любых фигур. Рамы большинства картин обыкновенно имеют форму прямоугольника, но в 1915 году

символом абстрактной живописи неожиданно стал совершенно черный квадрат. Нарисовал его русский художник Казимир Малевич.

Существует еще один вид четырехугольников, которые часто можно увидеть на всевозможных орнаментах, гербах, морских или даже игральных картах. Такие четырехугольники называют ***ромбами***. Посмотрите на главный оберег древних славян – звезду Алатырь: она состоит из 8 ромбов. Знаки отличия на петлицах командиров Красной армии до 1935 года тоже делались в виде ромбов.

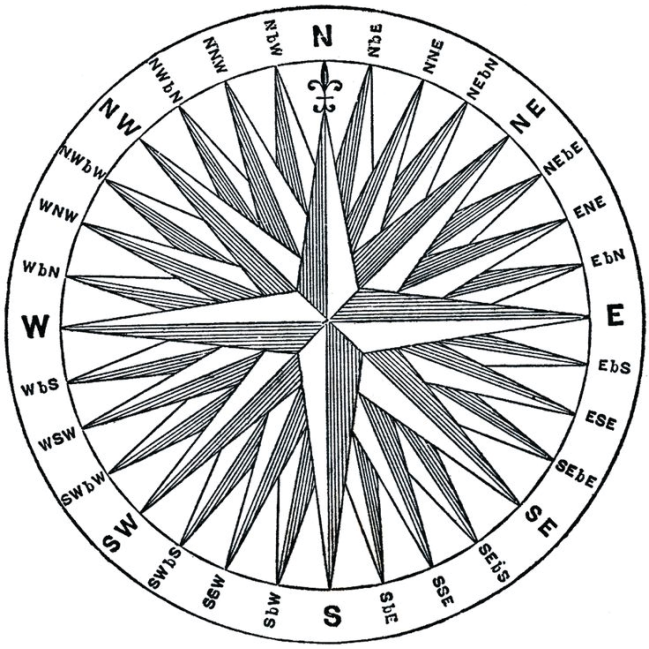
Командир бригады

Командир дивизии

Командир корпуса

Комиссар армии

Происхождение же слова ромб не до конца ясно. На древнем греческом языке ***ρόμβος*** означает «***юла***» или «***волчок***». Именно от него образовалось мореходное слово ***румб***, которое означает направление ветра. Капитаны различают 32 таких направления по отношению к сторонам света. То есть, кроме обычных севера, юга, запада и востока, существуют еще направления на юго-запад, северо-восток, юго-юго-запад и так далее. На морских картах их все изображают в виде одной схемы – розы ветров, имеющей 32 «лепестка». Каждый такой «лепесток» – это один румб. Внешне он похож на половину магнитной стрелки компаса. А сама такая стрелка представляет собой четырехугольник с равными сторонами, который и называют ромбом.



Впрочем, есть и другие версии. По одной из них слово ромб означало музыкальный инструмент - бубен, который когда-то имел именно такую форму. Поэтому до сих пор его изображают на игральных картах соответствующей масти.

А как можно определить ромб? Легко догадаться, что это тот четырехугольник, все стороны которого одинаковы. При этом углы разных ромбов могут отличаться.

Давайте теперь более подробно рассмотрим каждый из видов этих четырехугольников с точки зрения геометрии. И начнем мы с прямоугольника.

СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Как следует из названия, все углы прямоугольника должны быть прямыми. То есть, по своему определению:

Прямоугольник – это четырехугольник, все углы которого равны 90°.

Раз все углы прямоугольника равны друг другу, то он сразу подходит под один из признаков параллелограмма (помните, какой?). Значит, прямоугольник обязан быть параллелограммом. Поэтому можно сказать так: прямоугольник – это параллелограмм с прямыми углами. Давайте запишем это его очевидное свойство без номера.

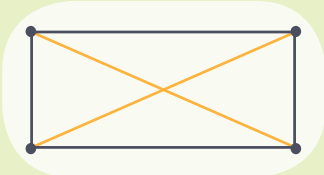
Прямоугольник является параллелограммом.

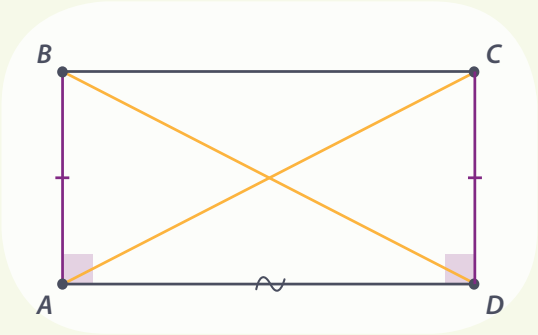
Поскольку прямоугольник – это частный случай параллелограмма, то он должен обладать всеми его свойствами.

А есть ли у прямоугольника особые свойства, которых нет у любого параллелограмма? Конечно, есть. Их можно заметить, если взять в руки обычную книгу или посмотреть на простой лист бумаги. Первое, что вам придет в голову – это свойство диагоналей прямоугольника. Давайте его запишем.

1 СВОЙСТВО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Диагонали прямоугольника равны.





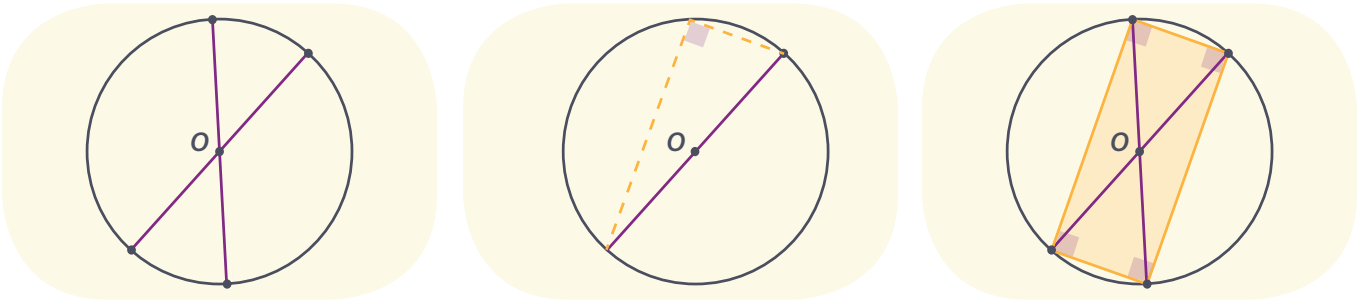
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Обозначим наш прямоугольник как **ABCD** и проведем в нем диагонали **AC** и **BD**. Поскольку прямоугольник является параллелограммом, то у него должны быть равны противоположные стороны. Значит, **AB** = **CD**.*

*Теперь давайте рассмотрим треугольники **ABD** и **ACD**. Они равны по первому признаку, поскольку **AB** = **CD**, сторона **AD** у них общая, а углы при вершинах **A** и **D** равны **90°**. Отсюда и следует, что **AC** = **BD**, то есть диагонали прямоугольника равны.*

Что и требовалось доказать.

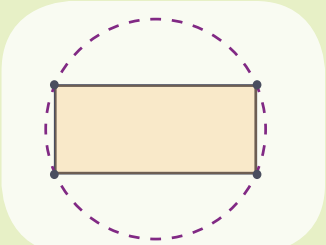
Знаете, как проще всего нарисовать прямоугольник на чистом листе? Достаточно циркулем провести всего одну окружность, а потом через ее центр по линейке повести два любых ее диаметра. Помните, что диаметр окружности виден из любой ее точки под прямым углом? Отсюда сразу следует, что концы двух любых диаметров – это вершины прямоугольника. Останется по линейке соединить их между собой – и прямоугольник готов. Так можно легко нарисовать прямоугольник, вписанный в окружность.



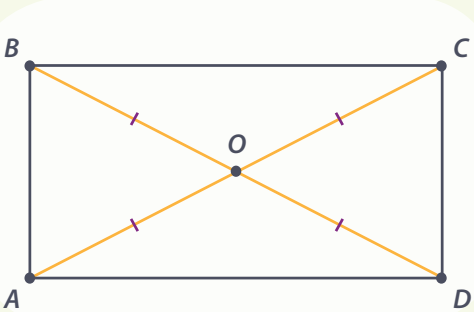
А существуют ли прямоугольники, которые невозможно вписать ни в одну окружность? На этот вопрос отвечает...

2 СВОЙСТВО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Любой прямоугольник можно вписать в окружность.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



*Пусть диагонали данного нам прямоугольника **ABCD** пересекаются в точке **O**. По свойству эти диагонали равны, а поскольку прямоугольник – частный случай параллелограмма, то они должны еще делить друг друга пополам. Значит, AO = BO = CO = DO.*

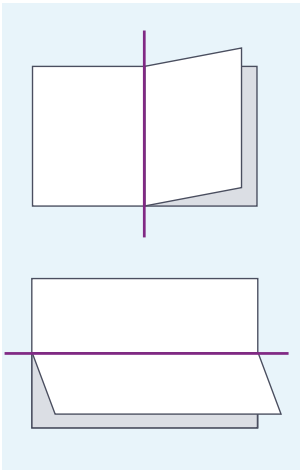
*То есть, точка **O** равноудалена от всех вершин прямоугольника и является центром окружности, на которой лежат все его вершины. Радиус этой окружности, очевидно, равен половине диагонали прямоугольника.*

Что и требовалось доказать.

Каждый знает, что обычный лист бумаги можно сложить пополам. Причем, двумя способами. Это важное свойство позволяет делать из прямоугольных листов книги. Дело в том, что книги сшивают из так называемых тетрадей, а тетрадь – это всегда сложенный в несколько раз большой лист бумаги.

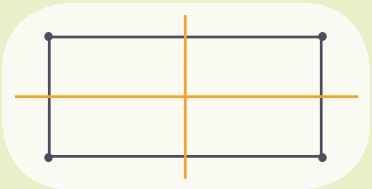
Рисунок справа показывает, как на одном большом прямоугольном листе печатают сразу 32 страницы, а потом складывают этот лист по линиям сгиба и получают одну тетрадь.

С точки зрения геометрии сложение пополам листа бумаги означает то, что он симметричен относительно линии своего сгиба. То есть, он обладает осью симметрии. А поскольку сложить его можно двумя способами, то и осей симметрии у прямоугольника две. Мы сформулируем это как еще одно свойство прямоугольника.



3 СВОЙСТВО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Прямоугольник имеет две оси симметрии.



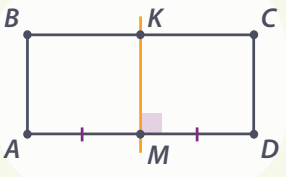
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

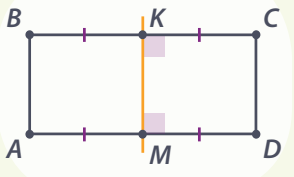
*Возьмем прямоугольник **ABCD** и проведем к его стороне **AD** серединный перпендикуляр. Пусть этот перпендикуляр пересекает его сторону **AD** в точке **M**, а противоположную сторону **BC** в точке **K**. Поскольку у прямоугольника противоположные стороны параллельны, то прямая **MK** будет перпендикулярна и стороне **BC**. Значит, наш перпендикуляр делит весь прямоугольник на два меньших прямоугольника. Поэтому **AM** = **BK** и **DM** = **CK**. По определению точка **M** должна быть серединой стороны **AD**, поэтому **AM** = **DM**. Отсюда сразу следует, что точка **K** – середина стороны **BC**. Но тогда прямая **MK** будет серединным перпендикуляром сразу к двум сторонам **AD** и **BC** нашего прямоугольника. Значит, точки **B** и **C** буду симметричны относительно нее, так же как точки **A** и **D**.*

*Это и значит, что при симметрии относительно прямой **MK** прямоугольник перейдет в себя. То есть, данная прямая – это его ось симметрии.*

*Точно так же можно доказать, что у сторон **AB** и **CD** тоже один серединный перпендикуляр. Он будет второй осью симметрии нашего прямоугольника.*

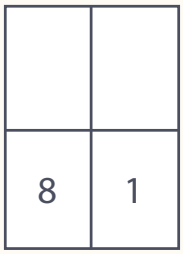
Что и требовалось доказать.



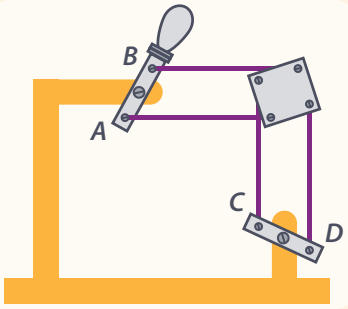


УПРАЖНЕНИЯ

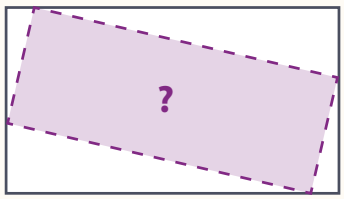
1. Прямоугольный лист бумаги вначале сложили пополам вдоль одной его оси симметрии, а потом еще раз пополам – вдоль другой. В полученной таким образом «тетради» по порядку пронумеровали все страницы. Потом лист снова развернули и оставили на нем номера двух из четырех страниц так, как это показано на рисунке. Какие номера имеют оставшиеся две страницы?



2. На рисунке показан шарнирный механизм, в котором рычаг AB и «коромысло» CD соединены жесткими стержнями с углами металлической прямоугольной пластины. Объясните, почему в этом механизме угол между рычагом и «коромыслом» при повороте рычага никогда не меняется.

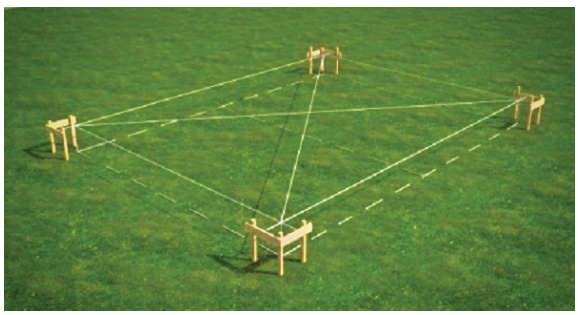


3. Нарисуйте на листе белой бумаги прямоугольник. А теперь циркулем и линейкой впишите в него второй прямоугольник так, чтобы на каждой стороне первого прямоугольника лежала только одна вершина второго.



ПРИЗНАКИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Мы знаем, что прямоугольник – это параллелограмм. Но как понять, что перед нами именно прямоугольник, если трудно точно измерить его углы?



Как раз для этого и существуют признаки прямоугольника. Одним из них постоянно пользуются строители и рабочие. Как они это делают? Разметив участок в виде четырехугольника, вначале они веревкой или рулеткой проверяют, что у этого четырехугольника равны противоположные стороны. Как вы уже знаете, по признаку это гарантирует, что данный участок имеет форму параллелограмма. Потом измеряют расстояния между противоположными углами нужного участка. Если они равны, то данный четырехугольник обязан быть прямоугольником. Мы же с вами запишем это как его первый признак.

1 ПРИЗНАК ПРЯМОУГОЛЬНИКА

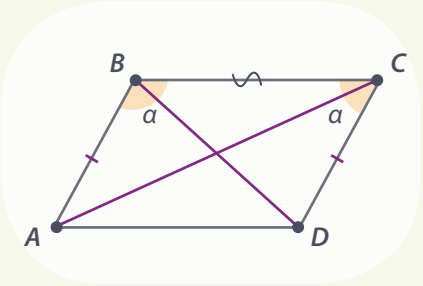
Если диагонали параллелограмма равны, то он - прямоугольник.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Пусть диагонали **AC** и **BD** параллелограмма **ABCD** равны по длине. Рассмотрим треугольники **ABC** и **BCD**. Эти треугольники равны по трем сторонам. В самом деле, по условию **AC = BD**, сторона **BC** у них общая, а стороны **AB** и **CD** равны как противоположные стороны параллелограмма. Значит, углы **ABC** и **BCD** этих треугольников тоже равны. Обозначим их величину буквой **α**. Сумма данных углов должна быть равна **180°**, поскольку они внутренние односторонние при двух параллельных прямых и секущей. Поэтому **2α = 180**, откуда **α = 90°**.*

Отсюда сразу следует, что и все другие углы такого параллелограмма тоже прямые. Значит, он на самом деле является прямоугольником.

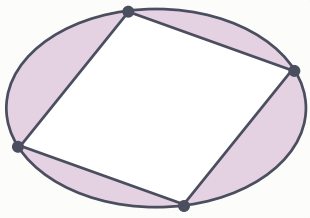
Что и требовалось доказать.



Попробуйте вписать в окружность параллелограмм, у которого нет ни одного прямого угла. У вас ничего не получится! А потому, что существует второй признак прямоугольника. Как и следует ожидать, этот признак должен быть утверждением, обратным ко второму свойству прямоугольника. И звучит он так:

2 ПРИЗНАК ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Если параллелограмм можно вписать в окружность, то он является прямоугольником.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Допустим, что все вершины данного нам параллелограмма **ABCD** лежат на одной окружности с центром в точке **O**. Пусть его диагонали пересекаются в некоторой точке **M**, и эта точка не совпадает с точкой **O**.*

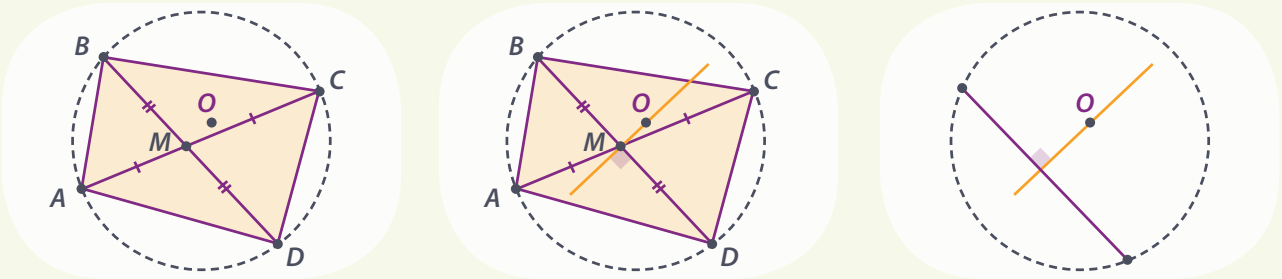
*Давайте проведем прямую **OM** и подумаем. Вы помните, что диагонали параллелограмма делят друг друга пополам? Поэтому точка **M** – середина каждой из них.*

*Теперь нам необходимо вспомнить одно важное свойство окружности – ее центр всегда лежит на серединном перпендикуляре к любой хорде. Обе диагонали параллелограмма будут хордами данной окружности, поэтому прямая **OM** должна быть серединным перпендикуляром для каждой из них. Но тогда обе диагонали нашего параллелограмма будут перпендикулярны прямой **OM**, а это невозможно!*

Значит, мы получили противоречие.

*Поэтому на самом деле точки **O** и **M** совпадают. А раз так, то каждая диагональ – это диаметр данной нам окружности. Следовательно, они равны. Поэтому параллелограмм имеет равные диагонали и по первому признаку является прямоугольником.*

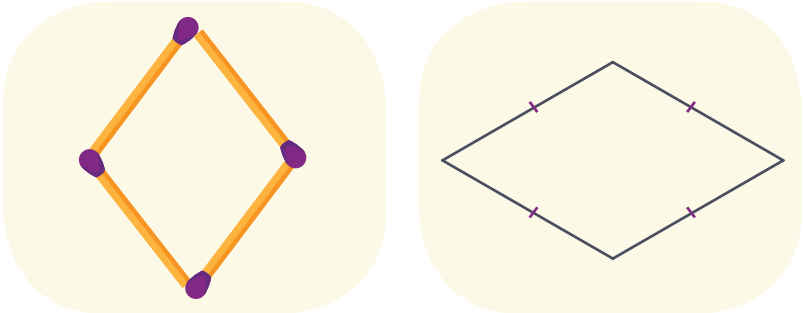
Что и требовалось доказать.



РОМБ

Если вы возьмете четыре одинаковые спички и положите их на стол так, чтобы получился четырехугольник, то они сразу образуют ромб. Потому, что по определению:

Ромб – это четырехугольник, у которого равны все стороны.



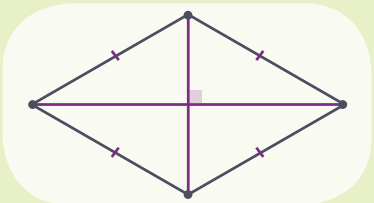
Поскольку все стороны ромба равны, то он сразу подходит под признак параллелограмма (подумайте, какой!). То есть, можно сказать, что ромб – это равносторонний параллелограмм. Как и для прямоугольника, мы запишем это очевидное свойство ромба без номера:

Ромб является параллелограммом.

Раз уж ромб – это параллелограмм, то он должен обладать всеми его свойствами. Но у ромба есть и свои свойства, которых нет у любого параллелограмма. И первое такое свойство касается его диагоналей.

1 СВОЙСТВО РОМБА

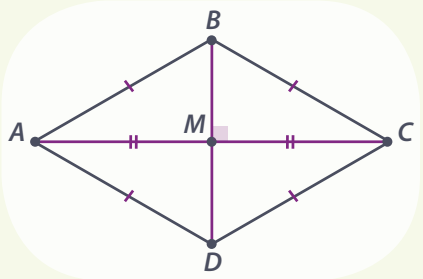
Диагонали ромба перпендикулярны друг другу и делят его углы пополам.



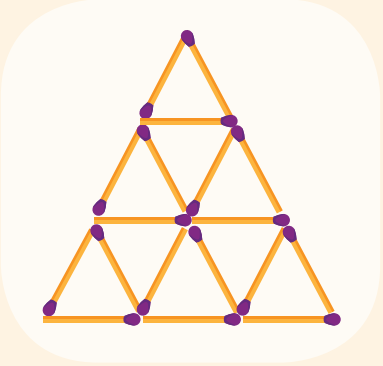
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Пусть диагонали ромба **ABCD** пересекаются в точке **M**. Так как ромб – частный случай параллелограмма, то точка **M** находится на середине каждой его диагонали. Рассмотрим теперь треугольник **ABC**. Этот треугольник равнобедренный, поскольку **AB** = **BC**. Отрезок **BM** – его медиана, проведенная к основанию **AC**. По свойству в равнобедренном треугольнике данная медиана является также высотой и биссектрисой. Значит, диагональ **BD** перпендикулярна диагонали **AC** и делит угол **ABC** ромба пополам. Точно так же доказывается, что эта диагональ делит пополам его угол при вершине **D**, а диагональ **BD** – углы при вершинах **A** и **C**. Следовательно, диагонали ромба перпендикулярны и делят его углы пополам.*

Что и требовалось доказать.



УПРАЖНЕНИЯ



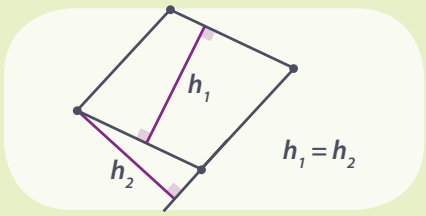
4. Сформулируйте и докажите первый признак ромба, обратный только что доказанному его свойству. Достаточно ли будет при его формулировке сказать только о перпендикулярности диагоналей?

5. Сколько всего ромбов вы можете найти на рисунке, сложенном из 18 спичек?

Если перегнуть полоску бумаги или бересты так, чтобы она сама себя пересекала, то на месте ее пересечения получится ромб. Именно поэтому на лаптях, сплетенных из бересты или из лыка, так много ромбов. Откуда они там? Все дело в том, что ромб возникает при пересечении полос одинаковой ширины. Помните, что такое ширина полосы? Это расстояние между параллельными прямыми, которые и образуют эту полосу. А расстояние между параллельными – это длина общего их перпендикуляра или общая высота. Именно с этим связано второе свойство ромба, к которому мы и перейдем.

2 СВОЙСТВО РОМБА

У ромба все высоты равны.

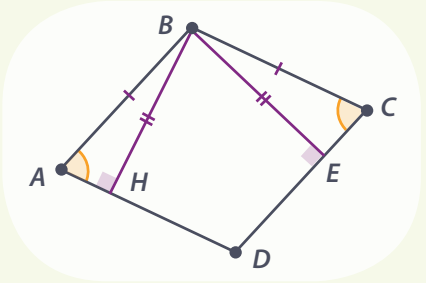


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

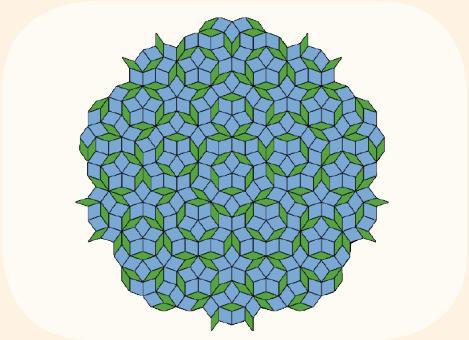
*Пусть угол при вершине **B** ромба **ABCD** тупой. Опустим из этой вершины на его стороны **AD** и **CD** высоты **BH** и **BE**. Поскольку ромб – это частный случай параллелограмма, то его углы при вершинах **A** и **C** должны быть равными. Но тогда равны и прямоугольные треугольники **ABH** и **BCE**, поскольку острые углы при этих вершинах у них равны, а их гипотенузы равны как стороны ромба. Поэтому **BH** = **BE**.*

*Помните, что расстояние между параллельными прямыми всюду одинаково? Поэтому любая высота ромба, опущенная на сторону **AD**, равна отрезку **BH**. Точно так же все высоты к его сторонам **AB** и **CD** равны отрезку **BE**. Поскольку эти отрезки равны, то равны и все высоты ромба.*

Что и требовалось доказать.

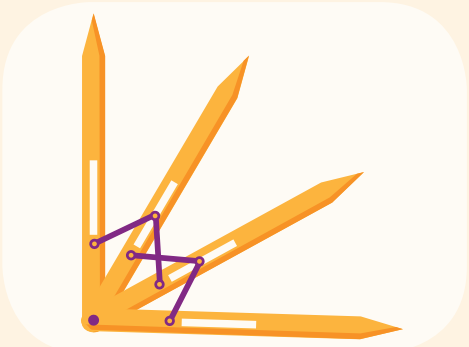


УПРАЖНЕНИЯ



6. Сформулируйте и докажите второй признак ромба, обратный только что доказанному его второму свойству.

7. На приведенном рисунке показан фрагмент мозаики Пенроуза, похожий на цветок голубой гортензии. Главной особенностью этой мозаики является то, что ей можно заполнить всю плоскость без повторений. Мозаика Пенроуза состоит из одинаковых ромбов двух типов. На данном рисунке они показаны голубым и зелеными цветами. Определите по данному рисунку углы каждого типа ромбов.

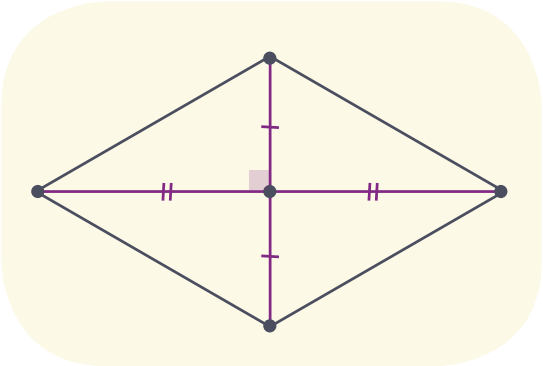


8. На рисунке показан так называемый механический «трисектор на ромбах». Он позволяет делить любой угол, меньший 180°, на три равные части. Объясните, как работает этот трисектор, то есть, почему его лучи все время образуют между собой три равных угла.

Так же как и прямоугольник, ромб имеет две оси симметрии. То есть, вдоль этих двух прямых его можно «сложить пополам». Но в отличие от прямоугольника, оси симметрии ромба проходят прямо через его вершины. В самом деле, из первого свойства ромба мы с вами уже знаем, что его диагонали перпендикулярны. Поскольку эти диагонали еще и делят друг друга пополам, то противоположные вершины ромба должны быть симметричны относительно каждой его диагонали. Значит, по диагоналям проходят оси его симметрии. Давайте это запишем как:

3 СВОЙСТВО РОМБА

Ромб имеет две оси симметрии, которые проходят по его диагоналям.



УПРАЖНЕНИЯ

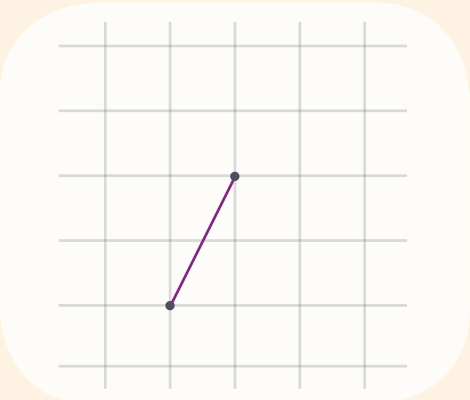
9. Начертите на листе бумаги любой отрезок и угол. А теперь постройте циркулем и линейкой ромб с этим углом, сторона которого была бы равна данному отрезку.

10. Начертите на листе бумаги два любых отрезка. А теперь постройте ромб, диагонали которого равнялись бы этим отрезкам.

11. Начертите на листе два отрезка, которые не равны друг другу. А теперь постройте ромб, у которого высота равна одному из этих отрезков, а сторона – другому.

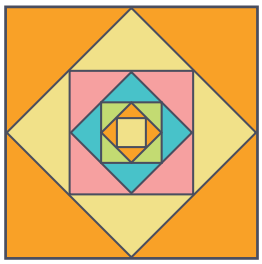
12. Возьмите прямоугольный лист чистой бумаги. Как согнуть его так, чтобы получить ромб, одна диагональ которого равна диагонали данного листа?

13. На рисунке клетчатой бумаги провели отрезок. Одной линейкой начертите на этой бумаге два ромба, у которых одна сторона совпадает с этим отрезком. А сможете вы нарисовать четыре таких ромба или даже шесть?

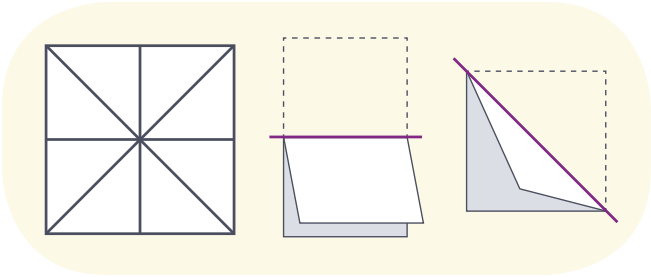


КВАДРАТ

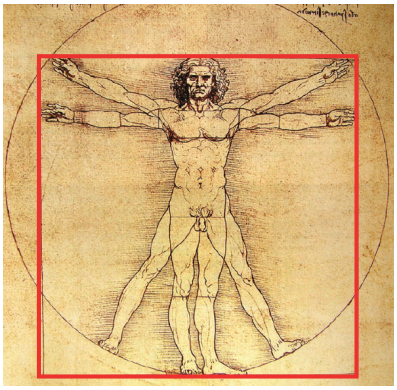
Как вы уже знаете, квадрат является правильным четырехугольником. Это означает, что у него равны все стороны и все углы. Поскольку в любом плоском четырехугольнике сумма углов равна 360°, то каждый угол квадрата должен быть равен 360° : 4 = 90°. Это означает, что квадрат является прямоугольником по определению. Поэтому можно сказать, что квадрат – это и прямоугольник и ромб одновременно.



Значит, квадрат должен обладать сразу всеми их свойствами. Например, его диагонали должны быть равны, поскольку он прямоугольник. А поскольку квадрат – это еще и ромб, то его диагонали должны быть перпендикулярны друг другу. А сколько у квадрата осей симметрии? Легко догадаться, что их всего четыре: две из них – проходят по его диагоналям, а две другие – через середины его противоположных сторон.



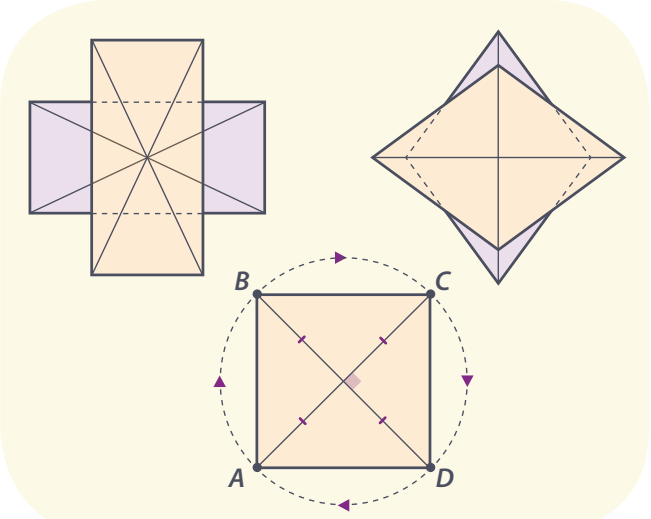
А вы знаете, что любого человека можно вписать в квадрат? Каждый из вас наверняка хорошо помнит свой рост. А теперь выпрямите руки, разведите их в стороны и измерьте расстояние между кончиками своих пальцев. Удивительно – данное расстояние в точности окажется равно вашему росту! Впервые это заметил знаменитый художник, ученый и изобретатель Леонардо да Винчи.



Можно подумать, что у квадрата нет своих особых свойств, которыми не обладают ромб или прямоугольник. Но это не так. Давайте приведем всего один пример такого особого свойства. И связано оно с поворотом фигуры вокруг точки.

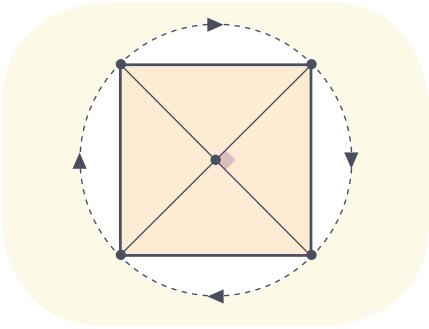
Что такое поворот? Все мы каждый день наблюдаем, как движутся стрелки часов на циферблате, как в доме открываются двери и окна, как раскачиваются во дворе качели. Так же как на карусели, колесе или на вращающейся музыкальной пластике, при повороте каждая точка фигуры движется по окружности вокруг центра. При этом все точки фигуры одновременно поворачиваются на один и тот же угол. Только в этом случае фигура вся будет поворачиваться как единое целое.

Но давайте вернемся к квадрату. Если повернуть его вокруг точки пересечения диагоналей на угол ***90°***, то квадрат совместиться сам с собой. В самом деле, если повернуть квадрат ***ABCD*** вокруг этой точки – центра квадрата, то его вершины последовательно перейдут друг в друга: ***A*** в ***B***, ***B*** в ***C***, ***C*** в ***D***, а ***D*** перейдет снова в ***A*** (подумайте, почему). Ничего подобного не случится при повороте на тот же угол прямоугольника или ромба. Значит, совмещение квадрата при этом повороте – действительно его особое свойство.



ОСОБОЕ СВОЙСТВО КВАДРАТА

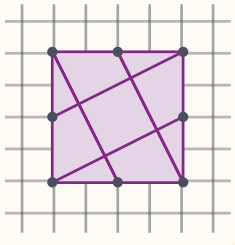
Квадрат переходит в себя при повороте на угол 90° вокруг его центра.



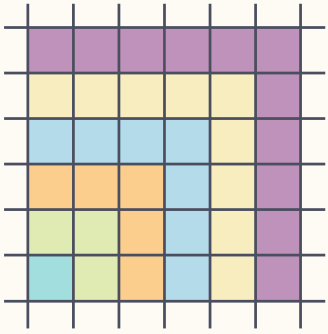
УПРАЖНЕНИЯ

14. Нарисуйте окружность на белом листе бумаги. А теперь циркулем и линейкой впишите в эту окружность квадрат.

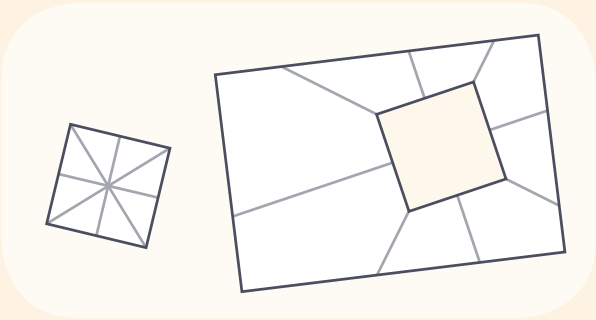
15. Нарисуйте на клетчатой бумаге квадрат, соедините каждую его вершину с серединой противоположной стороны так, как это показано на рисунке ниже. А теперь разрежьте квадрат на 5 частей так, как это показано на следущем рисунке. И сложите из этих частей 2 меньших квадрата.



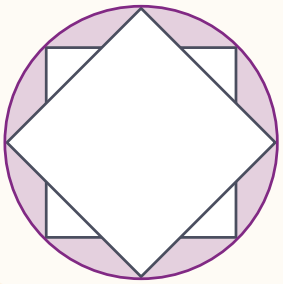
16. Помните, почему некоторые целые числа называют полными квадратами? Правильно: такое название появилось еще во времена Пифагора. Так называли любое число одинаковых предметов или клеток, которые можно было расположить в виде целого квадрата. На рисунке показано, как квадрат можно разрезать на так называемые «гномоны» – фигурки, своей формой напоминающие букву Г. Можно легко посчитать количество клеток в любом гномоне – у вас всегда получится нечетное число. Пользуясь данным рисунком, найдите сумму 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11. А чему равна сумма всех нечетных чисел от 1 до 99?



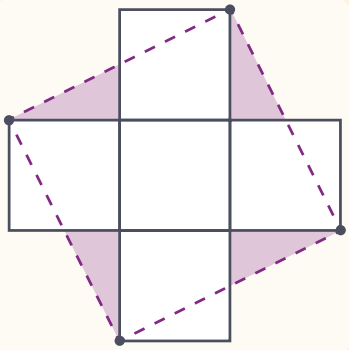
17. Сложите несколько раз листок белой бумаги, а потом сделайте один прямой разрез и получите в этом листе квадратную дырку. Посмотрите на бумажный квадрат, который вы вырезали: на нем должны быть видны все четыре его оси симметрии.



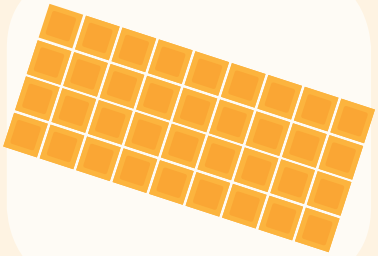
18. Постройте циркулем и линейкой два равных квадрата, повернутых относительно общего их центра на угол 45°. Будет ли пересечение этих квадратов правильным многоугольником?



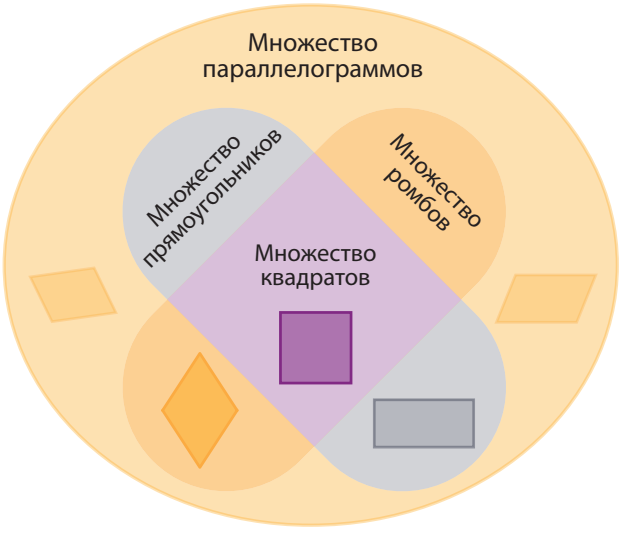
19. «Крест» на рисунке составлен из 5 равных квадратов. А во сколько раз больше каждого из них площадь квадрата, показанного пунктиром? И квадрат ли это?



20. Шоколадка имеет форму прямоугольника 4 x 9. Разделите ее на такие две части, чтобы из них можно было составить один квадрат!



В заключение этого параграфа давайте вспомним, что прямоугольник, ромб и квадрат являются параллелограммами. Квадрат же является и прямоугольником и ромбом одновременно. Наглядно это можно изобразить на языке множеств: множество всех прямоугольников и множество всех ромбов целиком должны содержаться в большом множестве параллелограммов. А на пересечении множества всех прямоугольников и множества всех ромбов должно находиться множество всех квадратов. Со времен Леонарда Эйлера множества условно изображают в виде овалов – так называемых «кругов Эйлера».



ВОПРОСЫ

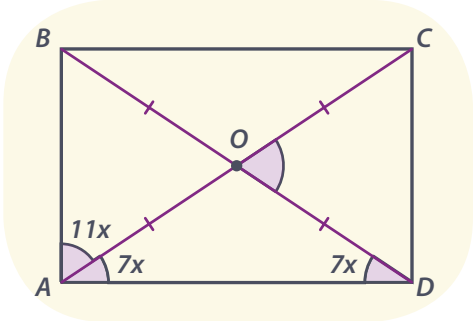
1. Как называют четырехугольник, все стороны которого равны? Является ли он параллелограммом?
2. Что на древней латыни означает слово quadratum?
3. Что такое румб? Сколько всего румбов в розе ветров?
4. Сколько ромбов было на петлице командира дивизии в Красной армии до 1935 года?
5. Какие многоугольники называют правильными? Как называют правильный четырехугольник?
6. Какие свойства прямоугольника вы знаете?
7. Как строители размечают участок прямоугольной формы? Какой признак прямоугольника они для этого используют?
8. В каком случае ромб можно вписать в окружность?
9. Как на чистом листе нарисовать прямоугольник циркулем и линейкой, проведя всего одну окружность?
10. Сколько осей симметрии имеет прямоугольник, ромб, квадрат?
11. Какое свойство есть у квадрата, а у прямоугольника и ромба его нет?
12. Назовите какой-нибудь признак квадрата, который не совпадает с его определением.
13. Как складывают листы бумаги, чтобы потом из них сшивать книги?
14. Как из 9 одинаковых спичек сложить 3 ромба?
15. Как из 12 одинаковых спичек сложить 6 равных квадратов?
16. Как из прямоугольного листа вырезать ромб, чтобы лист с дыркой имел ровно две оси симметрии?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1

Диагональ прямоугольника делит его угол на два угла, величины которых относятся как 7:11. Найдите угол между диагоналями этого прямоугольника.

РЕШЕНИЕ: Пусть диагонали данного прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Поскольку у прямоугольника диагонали равны и делятся точкой их пересечения пополам, то $AO = BO = CO = DO$. По условию углы CAD и BAC относятся как 7:11, поэтому мы обозначим их величины как $7x$ и $11x$.

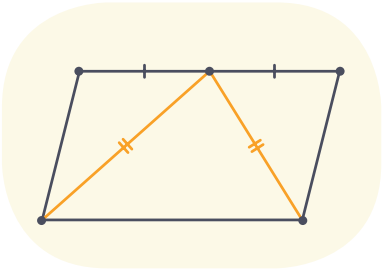


Каждый угол прямоугольника равен $90°$, значит $7x + 11x = 90°$. Откуда получаем, что $x = 5°$.

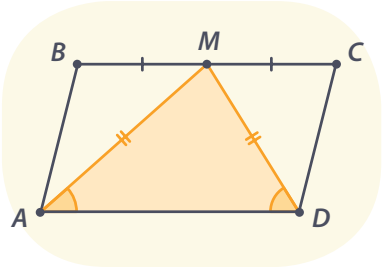
Следовательно угол $CAD = 7x = 35°$. Угол ADO тоже равен $35°$, поскольку треугольник AOD равнобедренный. Давайте теперь вычислим угол COD. Он является внешним к треугольнику AOD, поэтому равен $35° + 35° = 70°$. По определению данный угол является углом между диагоналями нашего прямоугольника, ведь это меньший из углов, возникающих при их пересечении.

ОТВЕТ: 70°

ПРИМЕР 2 ★☆☆

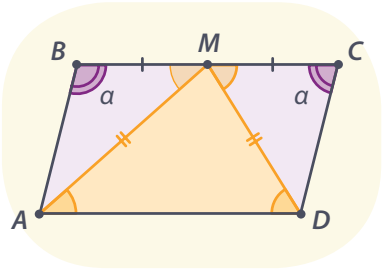


Середина одной стороны параллелограмма равноудалена от концов противоположной от нее стороны. Докажите, что этот параллелограмм – прямоугольник.



РЕШЕНИЕ: Обозначим середину стороны BC данного нам параллелограмма $ABCD$ буквой M. Если точка M равноудалена от концов A и D его противоположной стороны, то треугольник AMD равнобедренный и его углы при вершинах A и D должны быть равны.

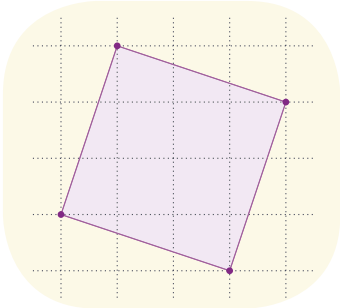
Поскольку стороны BC и AD у параллелограмма параллельны, то углы AMB и MAD равны как накрест лежащие при секущей AM. Точно так же равны углы DMC и ADM. Значит, угол AMB равен углу DMC. Отсюда следует, что треугольники AMB и DMC равны по первому признаку. Поэтому равны их углы при вершинах B и C. Обозначим их величину буквой α. Стороны AB и CD у параллелограмма параллельны, следовательно сумма его углов эти при вершинах должна быть равна $180°$. Поэтому $2\alpha = 180°$. Отсюда $\alpha = 90°$. Противоположные углы параллелограмма равны, значит, все его углы прямые. То есть, данный параллелограмм является прямоугольником.



Что и требовалось доказать.

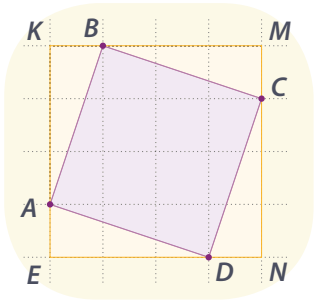
ПРИМЕР 3 ★☆☆

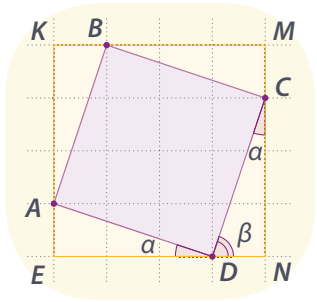
На клетчатой бумаге нарисовали четырехугольник так, как это показано на рисунке. Докажите, что этот четырехугольник – квадрат.



РЕШЕНИЕ: Обозначим данный четырехугольник $ABCD$ и впишем его в квадрат $EKMN$, образованный линиями сетки. Легко заметить, что прямоугольные треугольники AED, BKA, CMB и DNC равны по двум катетам. Следовательно равны их гипотенузы. Значит, четырехугольник $ABCD$ является ромбом. Мы покажем, что угол

этого ромба равен *90°*. В самом деле, давайте обозначим равные углы *ADE* и *DCN* в двух из рассмотренных равных треугольников буквой *α*, а угол *CDN* - буквой *β*. Легко понять, что *α + β = 90°*, ведь это сумма острых углов прямоугольного треугольника. Поэтому угол ADC нашего ромба будет равен *180° – (α + β) = 180° – 90° = 90°*. Значит, ромб *ABCD* имеет прямой угол. Но тогда и остальные его углы тоже прямые. Значит, он квадрат.

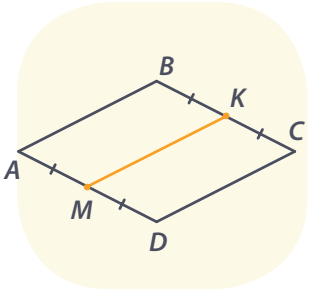




Что и требовалось доказать.

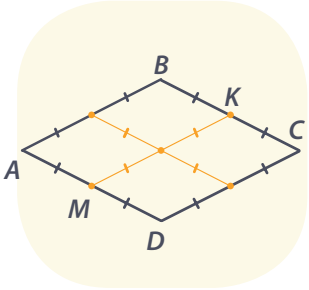
ПРИМЕР 4 ★★☆

Докажите, что середины сторон ромба образуют прямоугольник.

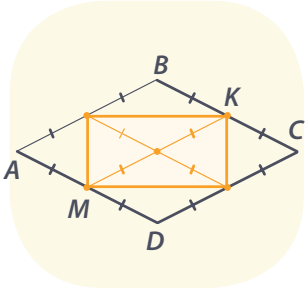


РЕШЕНИЕ: Пусть точки *M* и *K* – середины противоположных сторон *AD* и *BC* ромба *ABCD*. Четырехугольник *ABMK* должен быть параллелограммом по признаку, поскольку отрезки *AM* и *BK* равны и параллельны. Значит, отрезок *MK* параллелен и равен стороне *AB*.

Точно так же легко доказать, что отрезок *EF*, соединяющий середины сторон *AB* и *CD* параллелограмма, параллелен и равен его стороне *BC*. Отсюда сразу следует, что отрезки *MK* и *EF* разбивают весь большой ромб на четыре меньших ромба.



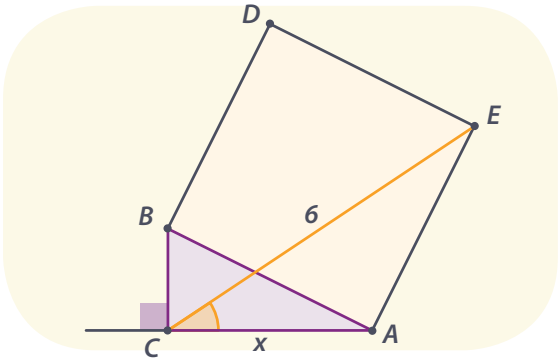
Обозначим точку пересечения этих отрезков буквой *O*. Тогда мы имеем, что *OM = OE = OK = OF*. Поэтому четырехугольник *MEKF* должен быть параллелограммом, ведь его диагонали *MK* и *EF* делят друг друга пополам. Но эти диагонали еще и равны, поэтому данный параллелограмм по признаку будет прямоугольником.



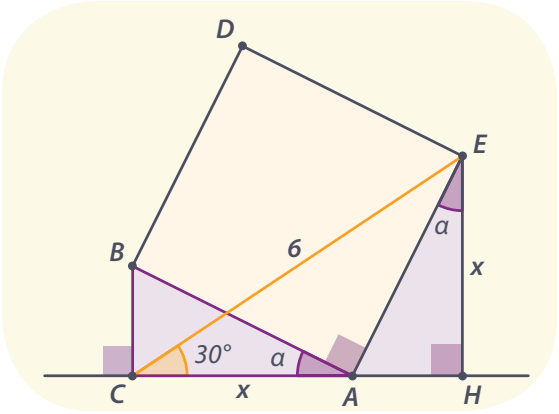
Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 5 ★★☆

На гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC* во внешнюю от него сторону построили квадрат *ABDE*. Известно, угол *ECB* равен *30°*. Найдите длину катета *AC*, если отрезок *CE* равен *6*.



РЕШЕНИЕ: Помните свойство прямоугольного треугольника с углом *30°*? В таком треугольнике против угла *30°* лежит катет, который равен половине гипотенузы. Но на данном чертеже нет такого треугольника... Значит, его нужно построить! Лучше всего взять за его гипотенузу сразу отрезок *CE*. Итак, давайте сделаем дополнительное построение: опустим из точки E перпендикуляр *CH* на прямую *AC*. Мы сразу получим прямоугольный треугольник *ECH* с углом *30°*. По свойству такого треугольника его катет *EH* равен половине гипотенузы, то есть, *EH = 6 : 2 = 3*.

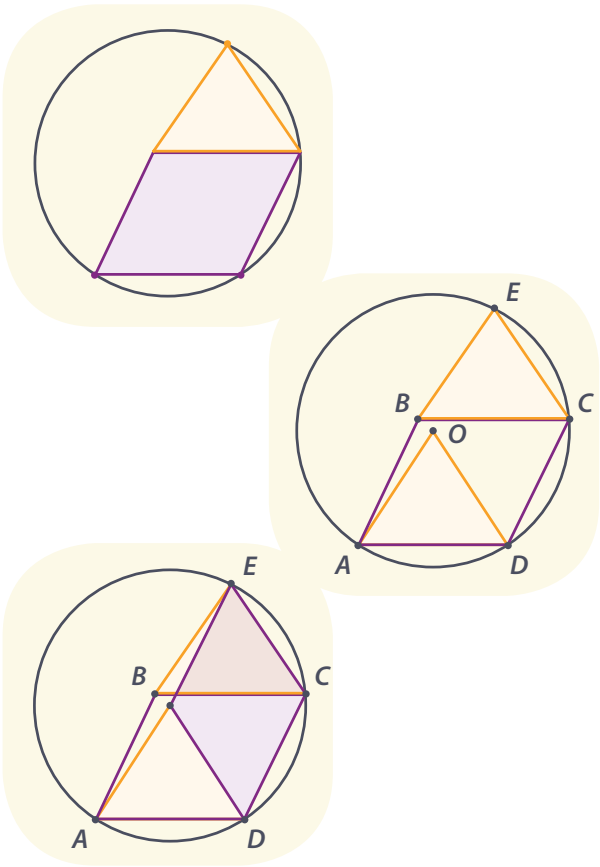


Какое все это отношение имеет к отрезку *AC*? Все очень просто – достаточно посмотреть на треугольники *AEH* и *BAC*. Эти прямоугольные треугольники имеют равные гипотенузы, поскольку стороны у квадрата равны. Кроме того, острые углы у данных треугольников тоже равны. В самом деле, давайте обозначим величину угла *BAC* одного из этих треугольников как *α*. Тогда угол *EAH* второго треугольника будет равен *180° – 90° – α = 90°– α*. Значит, его угол *AEH* равен *90° – (90° – α) = α*. Итак, треугольники *AEH* и *BAC* равны по гипотенузе и катету. Поэтому *AC = EH = 3*.

ОТВЕТ: 3

ПРИМЕР 6 ★★★

На стороне ромба во вне его построили равносторонний треугольник. Окружность проходит через одну вершину этого треугольника и две вершины ромба так, как это показано на рисунке. Найдите радиус окружности, если сторона ромба равна 1.



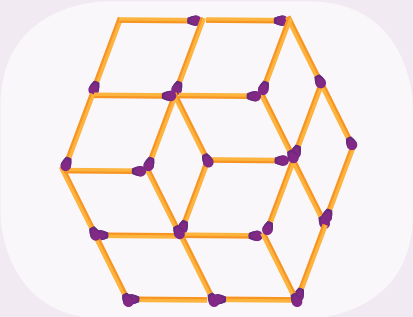
РЕШЕНИЕ: Обозначим данный нам ромб как *ABCD*, а равносторонний треугольник BEC.

А теперь сделаем «обратный ход»: построим на стороне *AD* нашего ромба такой же равносторонний треугольник *AOD*. Легко доказать, что стороны этих треугольников будут соответственно параллельны друг другу (подумайте, почему). Но тогда отрезки *OD* и *EC* параллельны и равны. Это значит, что четырехугольник *OECD* должен быть параллелограммом по признаку. Поэтому отрезок *OE = CD = 1*. Но тогда *OA = OE = OD = 1*. То есть, точка *O* равноудалена от вершин треугольника *AED* и должна совпадать с центром данной нам по условию окружности. А раз так, то радиус этой окружности равен стороне данного в условии ромба.

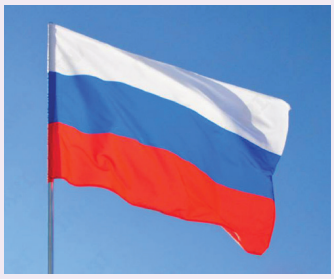
ОТВЕТ: 1

ЗАДАЧИ

1 ★☆☆ Из 30 одинаковых спичек сложили фигуру, показанную на рисунке. Сколько всего на ней ромбов? А сколько параллелограммов?



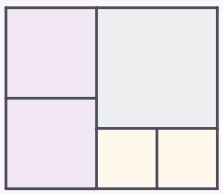
2 ★☆☆ Периметр Государственного флага или России равен 7 метрам, а отношение его сторон равно 2:3. Найдите площадь любой из его полос. Больше она или меньше квадратного метра?

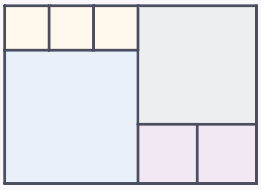


3 ★☆☆ Государственный флаг Бразилии представляет собой зеленый прямоугольник, на котором изображены желтый ромб и синий круг. Отношение сторон прямоугольника равно 7:10, а расстояния от всех вершин ромба до края полотна в 40 раз меньше его периметра. Найдите отношение диагоналей ромба на этом флаге.

4 ★☆☆ Прямоугольник разрезали на 5 квадратов так, как это показано на рисунке. Найдите отношение сторон этого прямоугольника.

5 ★☆☆ Прямоугольник разрезали на 7 квадратов так, как это показано на рисунке. Найдите отношение сторон этого прямоугольника.


к задаче 4

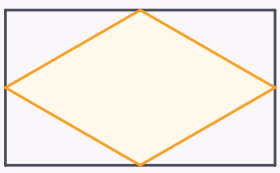

к задаче 5

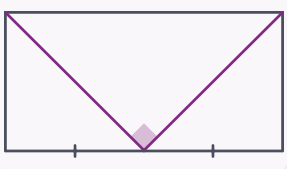
6 ★☆☆ Параллелограмм разрезали на три ромба. Найдите отношение сторон этого параллелограмма.

7 ★☆☆ Диагонали прямоугольника равны 8 и пересекаются под углом 60°. Найдите меньшую сторону этого прямоугольника.

8 ★☆☆ Докажите, что середины сторон прямоугольника образуют ромб. Найдите угол этого ромба, если его сторона равна одной из сторон прямоугольника.

9 ★☆☆ Одна сторона прямоугольника видна из середины его противоположной стороны под углом 90°. Найдите стороны этого прямоугольника, если его периметр равен 15 см.


к задаче 8

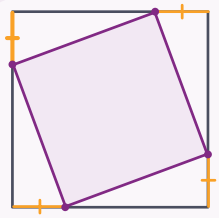

к задаче 9

10 ★☆☆ Из одной вершины ромба проведены две высоты и диагональ. Найдите угол между этими высотами, если одна из них в два раза меньше данной диагонали.

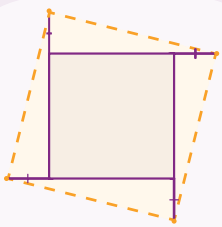
11 ★☆☆ Сторона ромба равна 1, а один его угол равен 150°. Найдите расстояние от точки пересечения его диагоналей до стороны.

12 ★☆☆ Две диагонали параллелограмма образуют равные углы с одной из его сторон. Докажите, что середина этой стороны равноудалена от всех вершин этого параллелограмма.

13 ★☆☆ На каждой стороне квадрата взяли по точке так, что отмеченные на рисунке отрезки равны. Докажите, что четыре отмеченные точки сами образуют квадрат.



к задаче 13



к задаче 14

14 ★☆☆ На продолжении каждой стороны квадрата взяли по точке так, что отмеченные на рисунке отрезки равны. Докажите, что четыре отмеченные точки сами образуют квадрат.

15 ★☆☆ Середины сторон параллелограмма образуют ромб. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.

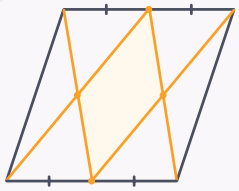
16 ★☆☆ Середины сторон параллелограмма образуют прямоугольник. Докажите, что данный параллелограмм – ромб.

17 ★☆☆ Середины двух противоположных сторон параллелограмма соединили с его вершинами так, как это показано на рисунке. Закрашенная на этом рисунке фигура является ромбом. Верно ли, что у данного параллелограмма равны диагонали?

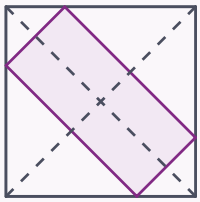
18 ★☆☆ На сторонах квадрата взяли по точке. Оказалось, эти точки составляют прямоугольник, стороны которого параллельны диагоналям квадрата. Найдите периметр этого прямоугольника, если диагональ квадрата равна 6.

19 ★☆☆ Из квадрата со стороной 1 вырезали прямоугольник так, как это показано на рисунке. Найдите периметр вырезанного прямоугольника.

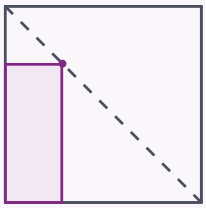
20 ★☆☆ Вершины M и K равностороннего треугольника AMK принадлежат сторонам BC и CD квадрата ABCD. Докажите, что MK параллельно BD.



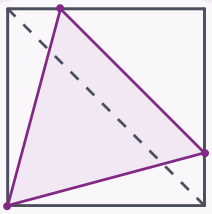
к задаче 17



к задаче 18

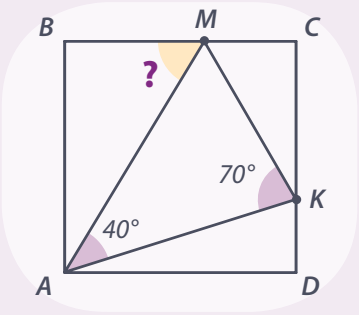


к задаче 19

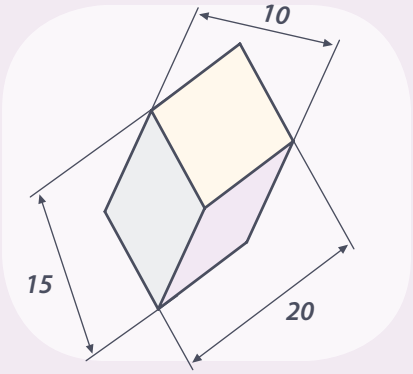


к задаче 20

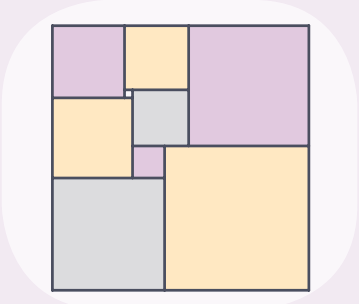
21 ★★☆ На сторонах BC и CD квадрата ABCD взяли точки M и K так, что угол KAM равен 40°, а угол AKM равен 70°. Найдите угол AMB.



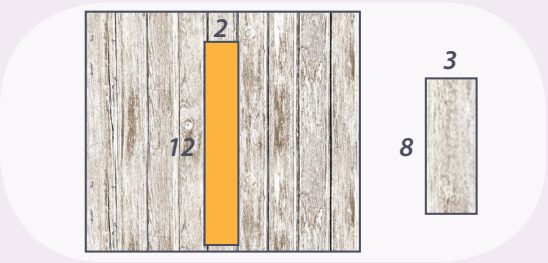
22 ★★☆ Из трех ромбов составили шестиугольник так, как это показано на рисунке. Расстояния между противоположными сторонами этого шестиугольника равны 10, 15 и 20. Найдите высоту каждого из данных ромбов.



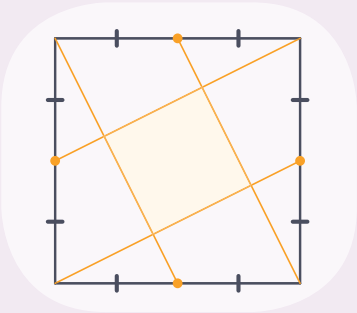
23 ★★☆ Прямоугольник разрезан на 9 различных квадратов так, как это показано на рисунке. Сторона самого маленького квадрата равна 1. Найдите стороны прямоугольника



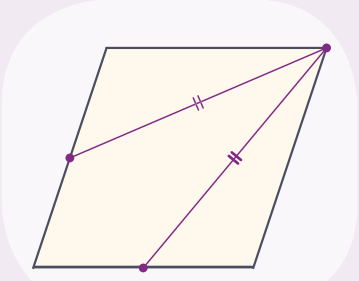
24 ★☆☆ Плотнику предстояло заделать прямоугольную дыру в деревянном полу. Дыра была 12 футов в длину и 2 фута в ширину. У плотника в наличии был только один лист деревянной плиты размером 8 на 3 фута. Будучи искусным и находчивым, он сумел распилить этот лист плиты на две части и заделать дыру. Как он это сделал?



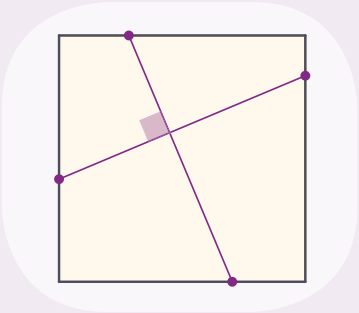
25 ★☆☆ Вершины квадрата соединили отрезками с серединами сторон так, как показано на рисунке. Докажите, что закрашенная на рисунке фигура – квадрат.



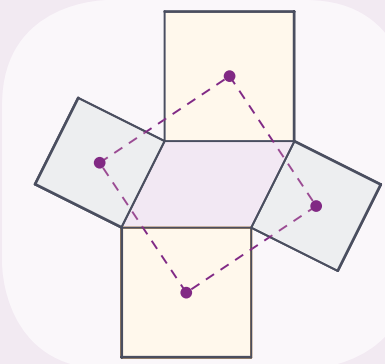
26 ★☆☆ Вершина параллелограмма равноудалена от середин двух его сторон. Докажите, что этот параллелограмм – ромб



27 ★★☆ В квадрате провели два перпендикулярных отрезка так, как показано на рисунке. Докажите, что они равны.

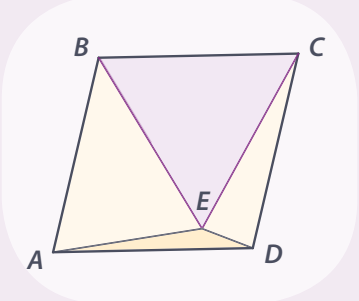


28 ★★☆ На сторонах параллелограмма во вне его построили квадраты. Докажите, что их центры тоже образуют квадрат.

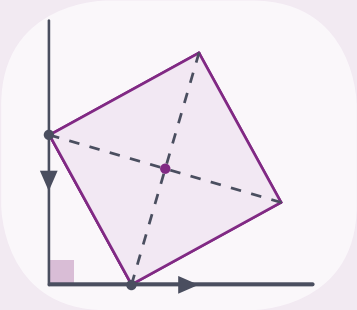


29 ★★☆ Угол между диагоналями прямоугольника равен 60°. В каком отношении делит сторону этого прямоугольника серединный перпендикуляр к его диагонали?

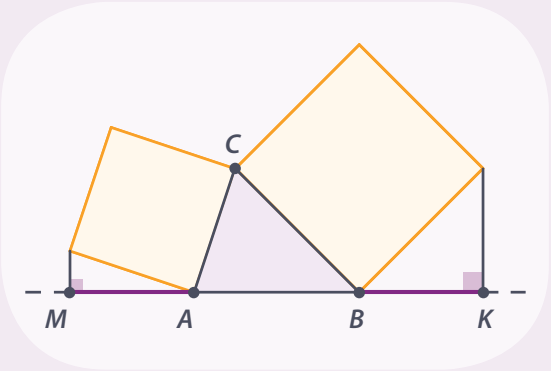
30 ★★☆ Сторона ромба ABCD равна 1. На одной из его сторон построили равносторонний треугольник BCE так, как это показано на рисунке. Найдите радиус окружности. проходящей через вершины треугольника AED.



31 ★★☆ Две соседние вершины квадрата «скользят» по сторонам прямого угла. Докажите, что его центр все время находится на биссектрисе этого угла.

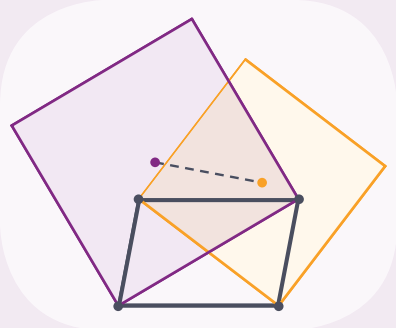


32 ★★☆ На сторонах AC и BC треугольника ABC построили два квадрата. из двух вершин квадратов, противоположных точке C, на прямую AB опустили перпендикуляры. Докажите, что отрезки MA и BK равны.

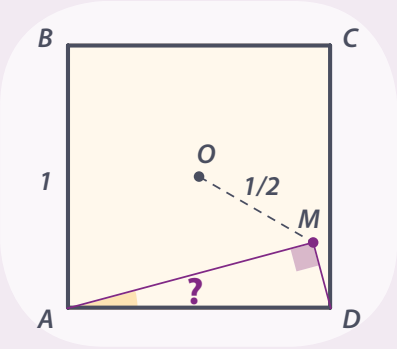


33 ★★☆ В данный прямоугольник впишите ромб так, чтобы на каждой стороне прямоугольника находилось по одной вершине ромба, причем одна из них была в заданной точке. Всегда ли это возможно?

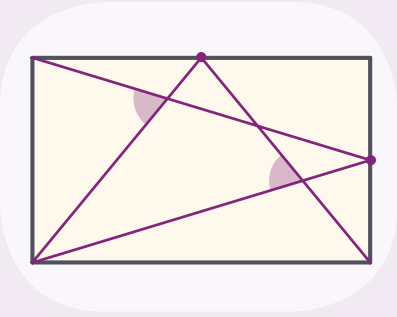
34 ★★☆ На каждой диагонали параллелограмма построили по квадрату. Докажите, что расстояние между центрами квадратов равно одной из сторон параллелограмма.



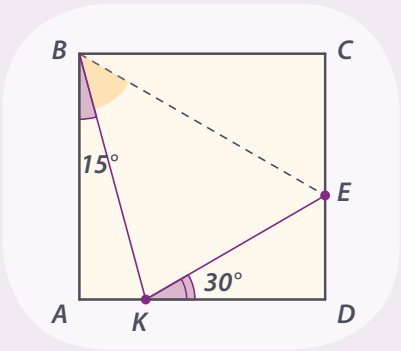
35 ★★★ Диагонали квадрата ABCD пересекаются в точке O. В нем взяли точку M так, что угол AMD равен 90°, а отрезок OM равен половине стороны квадрата. Найдите угол MAD.



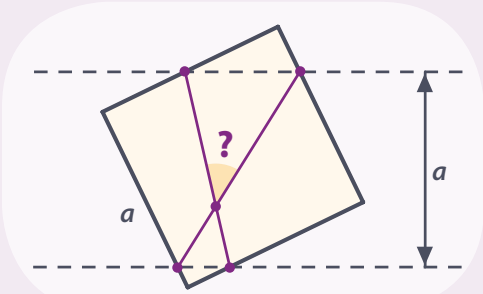
36 ★★★ Отмеченные на рисунке точки – середины сторон прямоугольника. Докажите, что отмеченные на нем углы равны.



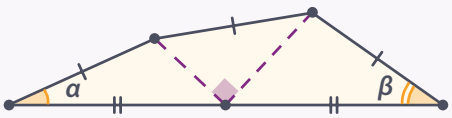
37 ★★★ На сторонах AD и CD квадрата ABCD взяли точки K и E так, что угол ABK равен 15°, а угол EKD равен 30°. найдите угол KBE.



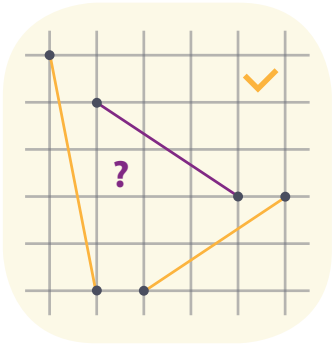
38 ★★★ Две прямые, расстояние между которыми равно стороне квадрата, пересекают его стороны в 4 точках так как это показано на рисунке. Найдите угол между двумя отмеченными отрезками, соединяющими эти точки.



39 ★★★ Три стороны четырехугольника равны, причем одна из них видна под прямым углом из середины четвертой. Найдите сумму углов α + β при четвертой стороне.

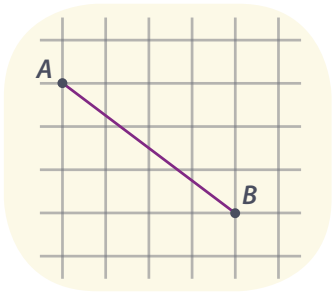


ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

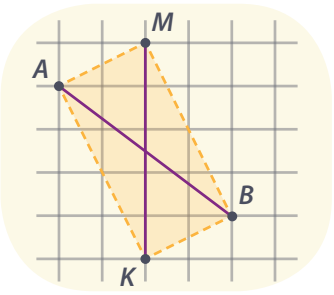


Отрезок на клетчатой бумаге. Попробуйте на клетчатой бумаге нарисовать отрезок с концами в узлах сетки, чтобы он не лежал на линиях этой сетки, а его длина равнялась бы целому числу клеток. Вы сразу поймете, что это не так просто. Может, таких отрезков и вовсе не существует?

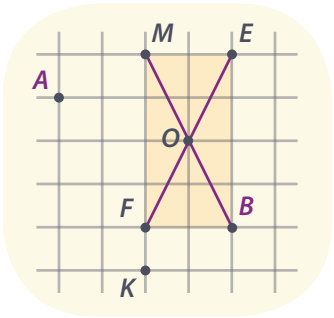
Как это ни удивительно, но такие отрезки есть. А те из вас, кто слышал о ***теореме Пифагора***, наверняка уже догадались, что каждый такой отрезок связан с так называемыми «***пифагоровыми тройками***»... Не пугайтесь – мы не будем сейчас использовать теорему Пифагора, с ней вы познакомитесь только в конце учебного года. Но один такой отрезок мы вам покажем, а чтобы его вычислить, нам потребуется использовать только прямоугольники.



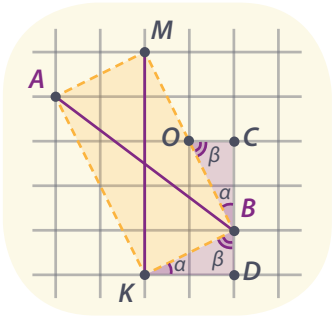
Давайте расположим на клетчатой бумаге отрезок *AB* так, как это показано на рисунке справа. Мы сейчас докажем, что его длина равна ровно 5 клеткам. Для этого на линии сетки мы возьмем еще один отрезок *MK*, который очевидно равен 5 клеткам, и докажем, что эти два отрезка равны.



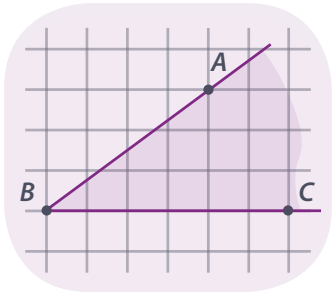
Посмотрите на четырехугольник *AMBK* – он очень похож на прямоугольник! Если это окажется действительно так, то отрезки *AB* и *MK* будут равны как диагонали прямоугольника. Почему же четырехугольник *ABMK* – это на самом деле прямоугольник? Мы убедимся в этом так. Отрезок *MB* очевидно является диагональю прямоугольника *MEBF*, стороны которого идут по линиям сетки. Середина этой диагонали – точка *O* равноудалена от всех его вершин. Поэтому она лежит на серединных перпендикулярах к сторонам этого прямоугольника. А ведь эти серединные перпендикуляры – просто линии нашей сетки! Таким образом, точка O находится прямо в узле клетчатой бумаги.



Нам осталось уже немного. Посмотрите на треугольники *KBD* и *BOC* – они равны по двум катетам. Обозначим их соответственно равные острые углы буквами α и β. Из суммы углов треугольника следует, что $\alpha + \beta = 90°$. Поэтому угол *KBO* равен $180° - (\alpha + \beta) = 90°$. Таким образом мы доказали, что один из углов четырехугольника *AMBK* прямой. Точно так же можно легко проверить, что и другие его углы тоже прямые. Значит, данный четырехугольник – это действительно прямоугольник. Поэтому его диагонали равны, следовательно, $AB = MK = 5$ клеткам.



Не хотите теперь поиграть в геометрическую игру? В ней все построения делают только одной линейкой на клетчатой бумаге. Попробуйте решить следующую задачу и применить для этого то, что вы только что узнали.



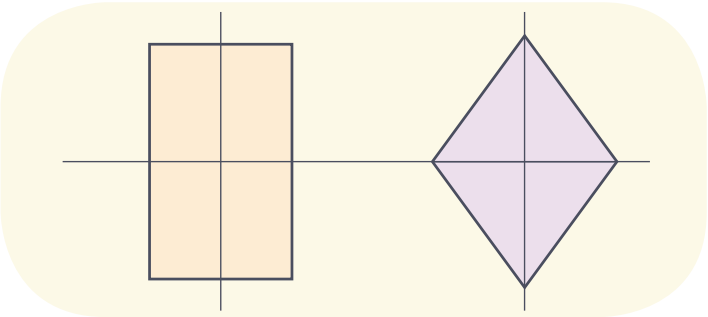
41 ★★★ Только одной линейкой постройте биссектрису отмеченного на клетчатой бумаге угла *ABC*. Линейкой можно проводить прямую линию через любые два узла сетки, а так же через точки пересечения уже проведенных прямых.

И снова об осях симметрии. Вы уже знаете, что ромб и прямоугольник имеют по две оси симметрии. А есть ли другие четырехугольники, которые тоже имеют две оси симметрии?

На самом деле других четырехугольников с таким свойством больше нет. То есть, верна:

ТЕОРЕМА

Если четырехугольник имеет две оси симметрии, то он либо прямоугольник, либо ромб.



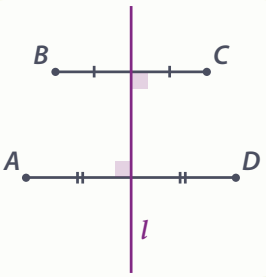
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

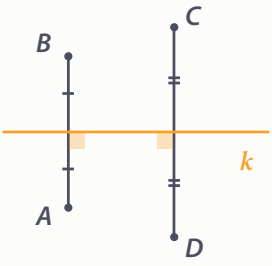
Если посмотреть на ромб и прямоугольник, то сразу станет видно, что у одного его оси симметрии проходят через вершины, а у другого они пересекают стороны. Давайте мы все четырехугольники с осями симметрии тоже разделим на эти два случая.

***Первый случай:* ни одна вершина четырехугольника не лежит на оси его симметрии.**

В начале давайте рассмотрим как могут располагаться вершины четырехугольника относительно его первой оси симметрии.

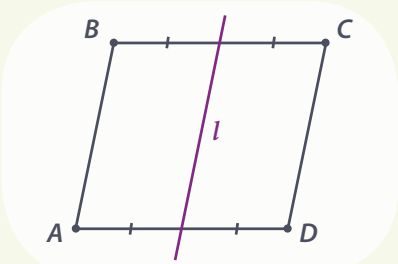
Поскольку при симметрии относительно своей оси четырехугольник переходит в себя, то каждая его вершина переходит в другую вершину – симметричную относительно данной прямой ***l****. Значит, все вершины четырехугольника разбиваются на две пары точек, симметричных относительно этой оси. Но тогда две противоположные стороны такого четырехугольника либо лежат на одной прямой (что невозможно!), либо должны быть параллельными, поскольку они перпендикулярны прямой* ***l****.*

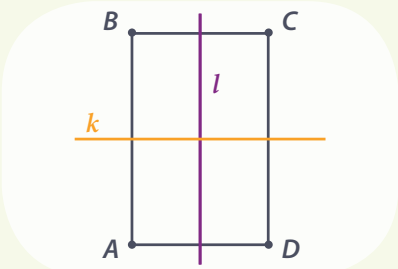




Точно такое же рассуждение проходит и для второй оси четырехугольника – прямой ***k****. Но тогда стороны нашего четырехугольника попарно параллельны и он должен быть параллелограммом по определению. Кроме того, каждая ось симметрии проходит через середины его противоположных сторон. Значит, стороны параллелограмма должны быть параллельны двум этим осям. Отсюда сразу следует, что такой параллелограмм должен быть прямоугольником.*

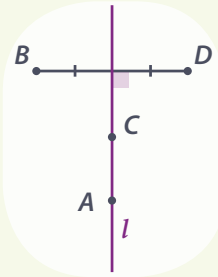
Тем самым первый случай мы разобрали.

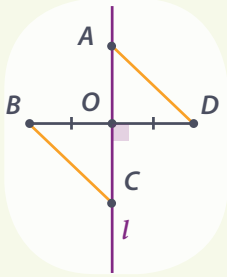




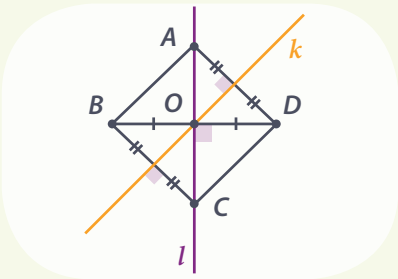
Второй случай: *хотя бы одна вершина четырехугольника лежит на его оси симметрии.*

Сразу сделаем следующее наблюдение – на оси симметрии не может находиться только одна вершина четырехугольника. Ведь тогда остальные три его вершины не получится разбить на пары симметричных точек относительно этой прямой. Значит, на первой оси симметрии лежат ровно две его вершины – пусть это будут вершины ***A*** *и* ***C****. Обозначим данную прямую буквой* ***l****. Другие две вершины четырехугольника* ***B*** *и* ***D*** *должны быть симметричны относительно* ***l****.*

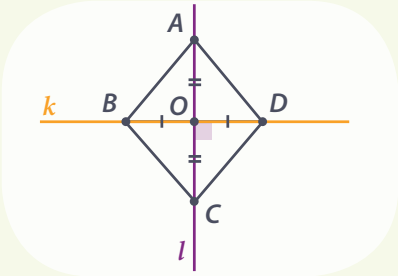




Но как может проходить вторая ось симметрии нашего четырехугольника – прямая ***k****? Если на ней нет его вершин, то мы уже знаем из первого случая, что у такого четырехугольника должны быть две стороны, перпендикулярные оси* ***k****. Тогда эти стороны параллельны друг другу. А для этого точки* ***A*** *и* ***C*** *должны находится в разных полуплоскостях относительно прямой* ***BD*** *(подумайте, почему).*



Пусть, например, прямые ***AD*** *и* ***BC*** *параллельны (случай параллельности* ***AB*** *и* ***CD*** *разбирается так же). Обозначим середину отрезка* ***BD*** *буквой* ***O****. Треугольники* ***AOD*** *и* ***COB*** *равны по второму признаку, поскольку углы* ***ADO*** *и* ***CBO*** *накрестлежащие при параллельных. Отсюда следует, что* ***AD = BC****. Значит, четырехугольник* ***ABCD*** *параллелограмм по признаку. Но прямая* ***k*** *должна быть серединным перпендикуляром к отрезкам* ***AD*** *и* ***BC****, поэтому наш четырехугольник будет прямоугольником. А поскольку его*



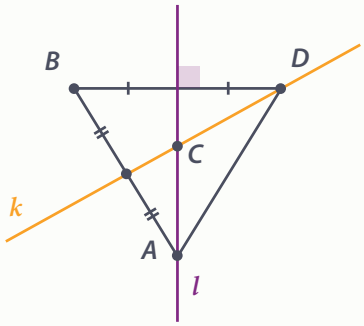
диагонали еще и перпендикулярны, он будет квадратом. Квадрат – это ромб и прямоугольник одновременно. Значит, в этом случае наша теорема тоже верна.

Остается последний случай – когда вторая ось симметрии ***k*** *тоже проходит через вершину нашего четырехугольника. Мы уже знаем, что тогда на ней лежит еще одна его вершина. Итак, в этом случае на каждой оси симметрии лежат по две вершины четырехугольника. Если на прямой* ***k*** *лежат вершины* ***B*** *и* ***D****, то точки* ***A*** *и* ***C*** *должны быть симметричны относительно нее. Тогда* ***AB = BC = CD = AD****. То есть, четырехугольник* ***ABCD*** *является ромбом.*

Если же вторая ось симметрии ***k*** *проходит через вершины* ***C*** *и* ***D****, то точки* ***A*** *и* ***B*** *должны быть симметричны относительно нее. Тогда треугольник* ***ABD*** *будет равносторонним. В этом случае расположение всех вершин четырехугольника действительно будет иметь две оси симметрии – прямые* ***l*** *и* ***k****. Но сам четырехугольник при каждой такой симметрии не перейдет сам в себя. Например, четырехугольник* ***ABDC*** *при симметрии относительно прямой* ***l*** *перейдет в четырехугольник* ***ACBD****. Это два равных четырехугольника, которые не совпадают как фигуры, хотя имеют одни и те же вершины! Абсолютно так же разбирается случай, когда* ***k*** *прямая проходит через точки* ***B*** *и* ***C****.*

Итак, мы разобрали все случаи и выяснили, что из всех четырехугольников две оси симметрии могут иметь только прямоугольник или ромб.

Что и требовалось доказать.



Если вы прочли до конца доказательство последней теоремы, то легко справитесь со следующими задачами:

42 ★★★ Архитектор университета хочет расположить на ровной местности четыре круглых здания его факультетов и проложить две прямые улицы так, чтобы человеку, идущему по каждой из этих улиц, положение всех зданий казался симметричным. Чему может быть равен угол между данными улицами?

43 ★☆☆ Сложите из двух разных прямоугольников фигуру, у которой есть только одна ось симметрии.

44 ★★☆ Можно ли из двух прямоугольников сложить фигуру так, чтобы ее ось симметрии не совпадала с осями симметрий данных прямоугольников ?

45 ★★☆ Можно ли из трех ромбов сложить фигуру, у которой есть 6 осей симметрии?

46 ★★★ Сложите из четырех равных прямоугольников фигуру, у которой есть 4 оси симметрии.

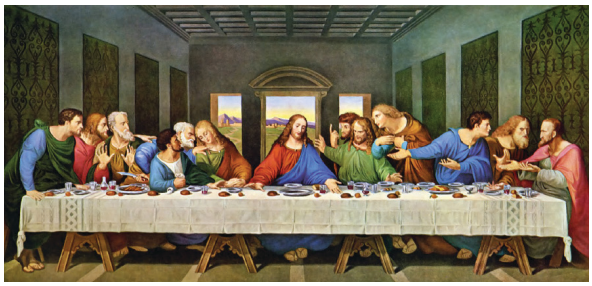
§ 4 ТРАПЕЦИЯ

На что похожа трапеция?

Кроме прямоугольников и ромбов существует еще один вид четырехугольников, которые имеют свое собственное название. Как вы уже догадались, такие четырехугольники называют ***трапециями***.

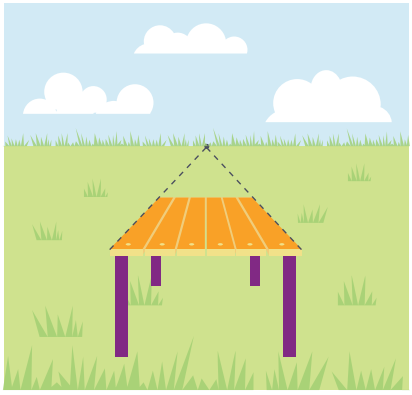
На рисунке справа изображено несколько различных трапеций. Если вы посмотрите на них, то сразу заметите, что у всех этих трапеций есть что-то общее. Попробуйте сами сформулировать, в чем состоит это общее, пока вы не прочитали определения трапеции.

А теперь скажите: является ли параллелограмм трапецией? Не знаете? Хорошо, тогда попробуйте найти русское слово с тем же корнем. Мы предложим вам на выбор несколько слов: трап, трапеза, сатрап. Какое из них однокоренное? Удивительно, что трапеция не имеет ничего общего ни с трапом, ни с сатрапом. А вот трапеза имеет к ней прямое отношение.



Трапеза – слово устаревшее, пришло оно к нам из греческого языка и означает «прием пищи». Уже потом от него образовались слова ***трапезная***, ***затрапезный*** и другие. А где обычно принимают пищу? Правильно – за столом. Так вот, трапеция – это и есть стол. Почему же все четырехугольники, которые называют трапециями, имеют форму стола? Неужели древние греки принимали пищу за такими странными столами? Не пугайтесь – столы у греков, да и всех других народов были обычно тоже прямоугольной формы, как и у нас. А вот изображение прямоугольного стола на картинах как раз имеет форму трапеции.

Человеческий глаз именно так видит окружающий нас трехмерный мир. Если вы посмотрите на параллельные рельсы железной дороги, то увидите, что они «пересекаются» прямо на горизонте. Конечно, пересекаться параллельные прямые не могут. Но при изображении трехмерного мира на плоской картине изображения почти всех пар параллельных сходятся на линии горизонта. Такое изображение очень правдоподобно и называется ***перспективой***. А точку, где сходятся на картине или фотографии рельсы железной дороги, называют их ***«точкой схода»***. Возьмите теперь произвольную трапецию и расположите ее так, чтобы две стороны этой трапеции были параллельны краю вашего листа. А теперь дорисуйте к этой трапеции четыре вертикальные «ножки». Вы сразу увидите, что у вас получился обыкновенный стол! Если продолжить две другие стороны этого стола, то они пересекутся в «точке схода», которая по правилам перспективы должна быть расположена на линии горизонта.



Итак, поскольку трапеция – это изображение прямоугольного стола в перспективе[1], то две ее стороны должны быть параллельны, а продолжения двух других обязаны пересекаться в точке их схода.

1 - Более точно нужно сказать так: трапеция – это изображение прямоугольного стола, одна сторона которого параллельна картине, на которой он изображен.

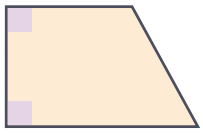
Нам же с вами давно пора дать определение трапеции.

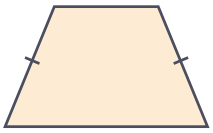
Трапеция – это четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие – нет.

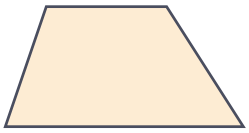
Параллельные стороны трапеции называют ее **основаниями**, а две другие – **боковыми сторонами** трапеции.

Какие же бывают виды трапеций? Трапеции бывают ***прямоугольные***, ***равнобокие***, и просто трапеции ***общего вида***.

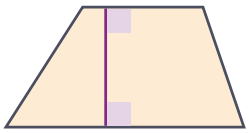
Как следует из названия, прямоугольная трапеция должна иметь прямой угол. Но легко догадаться, что у такой трапеции должно быть сразу два прямых угла при одной из боковых ее сторон (подумайте, почему?). Равнобокими же называют трапеции, у которых равны их «бока», или же боковые стороны.


Прямоугольная трапеция


Равнобокая трапеция

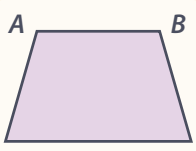

Трапеция общего типа

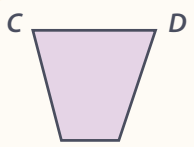
Поскольку основания трапеции параллельны, то расстояния от точек одного из них до другого постоянно. Это расстояние или длину общего перпендикуляра к основаниям трапеции логично называют ее ***высотой***.


Высота трапеции

УПРАЖНЕНИЯ

1. На рисунке показаны две трапеции. Какой из отрезков больше: AB или CD? Вначале сравните их на глаз, а потом проверьте с помощью линейки. Как вы могли бы объяснить данную иллюзию?





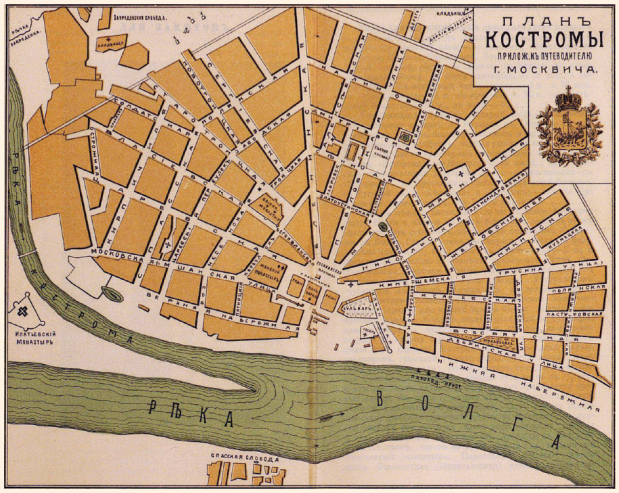
Интересно, что на церковных иконах тоже часто изображают стол в форме трапеции, но только трапецию эту на них «переворачивают» - длинную и короткую ее стороны меняют местами. Продолжения двух других сторон трапеции там будут пересекаться уже не на линии горизонта, а где-то перед иконой. Получается так называемая «обратная перспектива».

Выглядит она неправдоподобно, но вероятнее всего, иконописцы рисовали так специально, чтобы подчеркнуть отличие духовного мира иконы от мира материального. Ведь на иконах не должно быть иллюзии настоящего пространства. Например, на них не бывает теней от предметов или фигур святых.

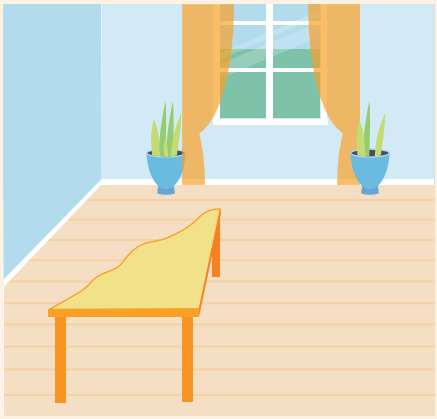
Икона апостола Матфея в технике обратной перспективы

УПРАЖНЕНИЯ

2. На рисунке изображен план города Костромы 1903 года. Найдите на нем как можно больше трапеций. Каких они видов?



3. На рисунке изображена перспектива комнаты с окном и стоящий в ней прямоугольный стол. Две стороны этого стола показаны полностью. Нарисуйте две другие стороны этого стола по правилам перспективы.

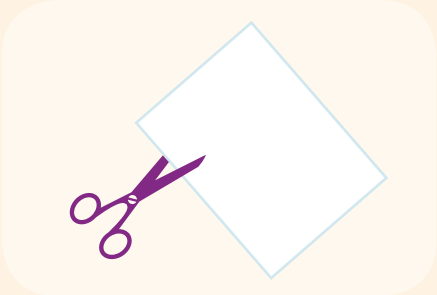


4. Перед вами обычный прямоугольный лист бумаги.

а) Двумя прямыми разрезами получите из него 3 трапеции

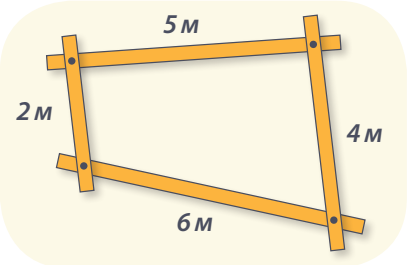
б) Можно ли так получить 4 трапеции?

в) А как сложить этот лист три раза, чтобы линии сгибов на нем образовали сразу 12 трапеций?

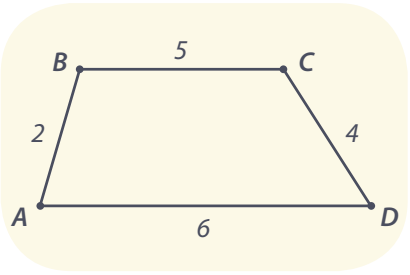


Когда существует трапеция?

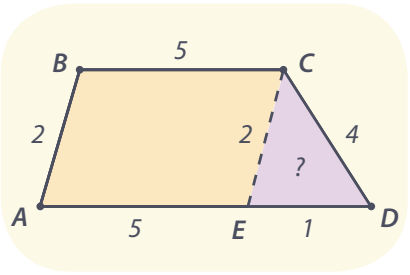
Для того чтобы из четырех деревянных палочек или отрезков «собрать» какой-нибудь четырехугольник, достаточно, чтобы каждая взятая вами палочка была короче суммы трех других палочек. Это вполне понятно: по известному неравенству ломаная всегда длиннее отрезка, который соединяет ее начало и конец. Но для того, чтобы из четырех отрезков собрать трапецию с данными основаниями, этого мало. Давайте возьмем четыре доски, длины которых равны 2, 5, 4 и 6 метрам, и в этом же порядке «сколотим» их концы между собой. Мы получим «двигающийся» четырехугольник, которому можно будет придавать различную форму: менять его углы, не изменяя при этом сторон. Сможем ли мы в какой-то момент добиться того, чтобы две самые длинные его стороны



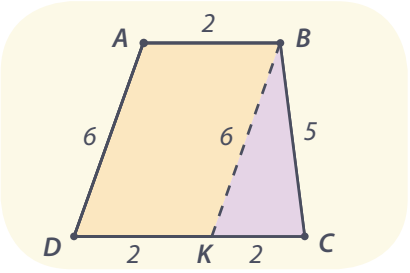
стали параллельными? Другими словами, можно получить из нашего шарнирного четырехугольника трапецию с основаниями 5 и 6 метров? Оказывается, что это невозможно. И вот почему.



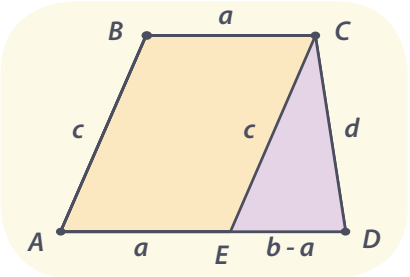
Предположим, что в какой-то момент из наших отрезков мы получили трапецию ABCD, основания BC и AD которой равны 5 и 6 метрам. Тогда боковые стороны этой трапеции очевидно будут иметь длины 2 и 4 метра. Давайте сделаем теперь дополнительное построение: отложим на большем основании AD этой трапеции отрезок AE, равный меньшему ее основанию BC. Тогда четырехугольник ABCE будет параллелограммом по признаку, ведь две его стороны параллельны и равны друг другу. Можно сказать и так: от нашей трапеции мы «отрезали» параллелограмм ABCE. Тогда CE = AB = 2, а ED = 6 – 5 = 1. Посмотрите на треугольник ECD: его стороны равны 1, 2 и 4 метрам. Значит, одна его сторона больше суммы двух других! То есть, для него не выполняется основное неравенство треугольника – и его просто не существует. Следовательно, не существует и такой трапеции. Поэтому, как бы мы ни старались добиться параллельности двух наиболее длинных сторон нашего шарнирного четырехугольника, у нас ничего не получится!



А вот короткие его стороны AB и CD можно сделать параллельными. Если мы проведем такое же рассуждение и отрежем от трапеции параллелограмм ABKD, то получим треугольник KBC со сторонами 2, 5 и 6 метров. Он существует, поскольку каждая его сторона меньше суммы двух других. Если теперь расположить отрезки BC и DC под углом KCB, равным углу данного треугольника, то отрезок BK станет равен стороне AD. Отсюда сразу будет следовать, что четырехугольник ABKD параллелограмм, по признаку. Поэтому в этом положении короткие стороны AB и CD шарнирного четырехугольника станут параллельными.



Итак, когда же существует трапеция ABCD с основаниями a и b, боковые стороны которой равны c и d ? Теперь легко ответить на данный вопрос. Если «отрезать» от данной нам трапеции параллелограмм ABCE так, как это показано на нашем рисунке, то от нее останется треугольник ECD со сторонами b – a, c и d. Когда существует этот треугольник, существует и вся трапеция.



В самом деле, чтобы получить такую трапецию, нужно на продолжении стороны ED этого треугольника отложить отрезок AE, равный меньшему основанию a нашей трапеции. Тогда ее вершина B строится однозначно – достаточно провести через точки A и C прямые, параллельно прямым EC и AE.

УПРАЖНЕНИЯ

5. На клетчатой бумаге постройте трапецию, стороны которой равны 3, 4, 5 и 6 клеткам. Какого вида она будет?

6. На клетчатой бумаге постройте трапецию с углом 45°, основания которой равны 1 и 3 клеткам, а высота 2 клеткам. Верно ли, что одна из ее диагоналей равна стороне?

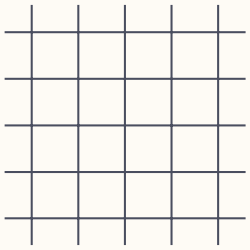
Равнобокие трапеции

Так же как прямоугольник или ромб, равнобокая трапеция имеет свои свойства и признаки. На рисунке справа изображено несколько таких трапеций. Какие общие свойства вы можете у них заметить? Попробуйте отыскать два или даже три таких свойства. А теперь скажите: может ли быть равнобокая трапеция еще и прямоугольной? Мы с вами разберем три свойства равнобоких трапеций и увидим, что для каждого из них верен соответствующий ему признак. Но вначале выполните три упражнения.

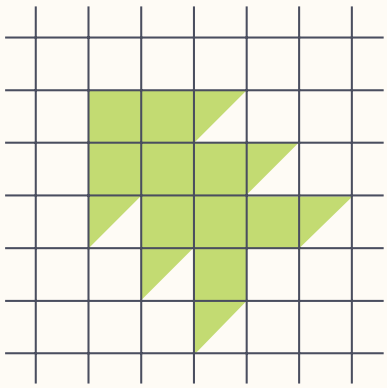
УПРАЖНЕНИЯ

7. Разрежьте параллелограмм на две равнобокие трапеции.

8. Нарисуйте на клетчатой бумаге равнобокую трапецию, все вершины которой находятся в узлах сетки. А можете ли вы нарисовать ее так, чтобы ни одна ее сторона не проходила по линиям сетки?



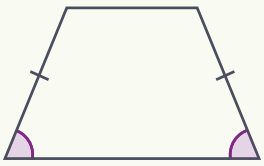
9. Разрежьте «елочку», показанную на рисунке, на равнобокие трапеции.



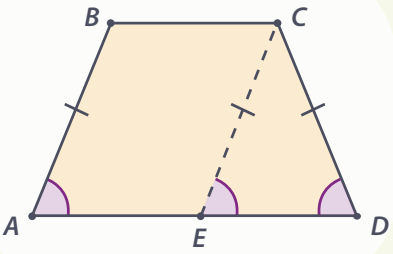
Итак, наверняка вы уже заметили, что равнобокая трапеция имеет одинаковые углы при каждом ее основании. Так оно и есть. Мы запишем это как первое ее свойство.

1 СВОЙСТВО РАВНОБОКОЙ ТРАПЕЦИИ

Углы при основании равнобокой трапеции равны.



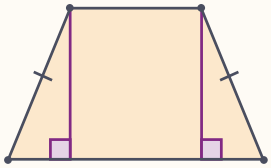
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



*Пусть в трапеции **ABCD** равны боковые стороны **AB** и **CD**. Для определенности мы будем считать, что ее основание **AD** больше основания **BC**. Давайте покажем, что углы при основании **AD** нашей трапеции равны между собой. Для этого мы применим уже известное нам дополнительное построение: отложим на ее большем основании **AD** отрезок **AE** равный меньшему основанию **BC**. Тогда четырехугольник **ABCE** будет параллелограммом по признаку. Значит, отрезок **CE** будет равен и параллелен стороне **AB**. Следовательно, треугольник **CED** будет равнобедренным, поэтому должны быть равны его углы при вершинах **E** и **D**. Но угол **CED** должен быть равен углу при вершине **A** нашей трапеции, поскольку они соответствующие при параллельных **CE** и **AB**. Значит, углы трапеции при вершинах **A** и **D** равны. То есть мы доказали, что углы при большем основании **AD** нашей трапеции равны между собой.*

Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ



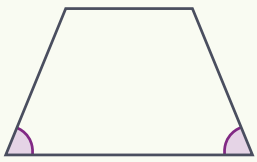
10. Докажите, что углы при меньшем основании равнобокой трапеции равны.

11. Используя приведенный чертеж, найдите другое доказательство первого свойства равнобокой трапеции.

Помните, как называют верное утверждение, обратное свойству фигуры? Правильно, его называют ее признаком. Давайте сформулируем

1 ПРИЗНАК РАВНОБОКОЙ ТРАПЕЦИИ

Если углы при основании трапеции равны, то она равнобокая.

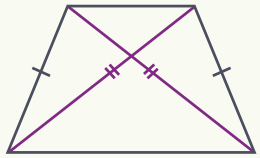


12. Докажите первый признак равнобокой трапеции.

Рассматривая равнобокие трапеции, можно легко заметить и второе их свойство. Оно касается диагоналей трапеции.

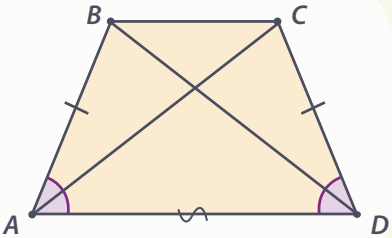
2 СВОЙСТВО РАВНОБОКОЙ ТРАПЕЦИИ

Диагонали равнобокой трапеции равны.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Обозначим нашу трапецию **ABCD** и проведем в ней диагонали. Поскольку трапеция равнобокая, то по первому свойству углы при ее основании **AD** должны быть равны. Давайте теперь рассмотрим треугольники **ABD** и **ACD**. Они равны по первому признаку, поскольку **AB** = **CD**, сторона **AD** у них общая, а углы при вершинах **A** и **D** равны. Из равенства этих треугольников следует, что **AC** = **BD**. То есть, диагонали равнобокой трапеции равны.*

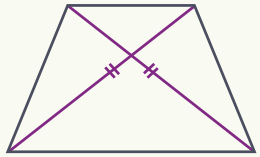


Что и требовалось доказать.

Как вы догадываетесь, обратным утверждением ко второму свойству равнобокой трапеции должен стать ее второй признак. И как обычно, его принято формулировать в терминах «если, то».

2 ПРИЗНАК РАВНОБОКОЙ ТРАПЕЦИИ

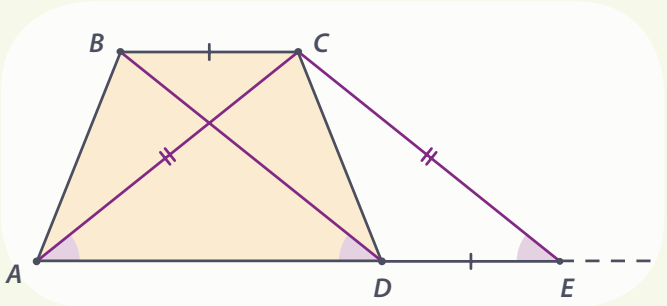
Если диагонали трапеции равны, то она равнобокая.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Пусть у трапеции **ABCD** равны диагонали **AC** и **BD**. Сделаем дополнительное построение: на продолжении основания **AD** возьмем точку **E** так, что **DE** = **BC**.*

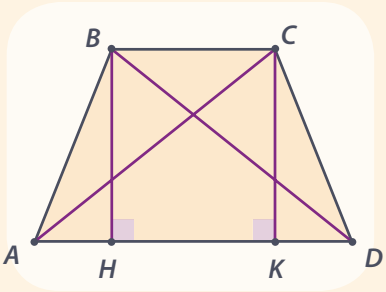
*Тогда четырехугольник **DBCE** будет параллелограммом по признаку, ведь две его стороны параллельны и равны. Следовательно, отрезок **CE** должен быть параллелен и равен диагонали **BD** трапеции. Образно можно сказать и так: мы параллельно «сдвинули» диагональ **BD** трапеции в точку **C** – ее концы как бы «скользили» по параллельным прямым **AD** и **BC**. По условию диагонали трапеции равны, **BD** = **CE**, поэтому **AC** = **CE**. Треугольник **ACE** равнобедренный, значит, углы при его вершинах **A** и **E** равны. Но угол **CEA** должен быть равен углу **BDA**, поскольку они соответственные при параллельных **BD** и **CE**. Мы получаем, что угол **BDA** равен углу **CAD**. Отсюда сразу следует равенство треугольников **ABD** и **ACD**. В самом деле, эти треугольники равны по первому признаку, ведь у них **AC** = **BD**, сторона **AD** общая и углы при вершинах **A** и **D** равны. Из равенства данных треугольников следует, что **AB** = **CD**. Значит, наша трапеция равнобокая.*



Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

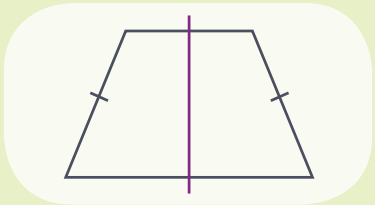
13. Используя приведенный чертеж, найдите другое доказательство второго признака равнобокой трапеции.



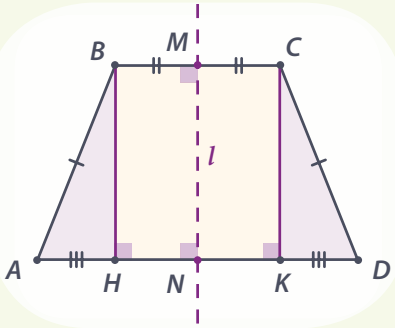
Даже на первый взгляд видно, что равнобокая трапеция – симметричная фигура. Причем ось симметрии у нее одна. Давайте это запишем как ее третье свойство.

3 СВОЙСТВО РАВНОБОКОЙ ТРАПЕЦИИ

Равнобокая трапеция имеет одну ось симметрии.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

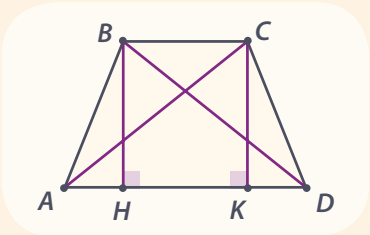


*Пусть равнобокая трапеция **ABCD** имеет основания **BC** и **A** перпендикуляр. Этот перпендикуляр и окажется осью симметрии трапеции. Давайте сделаем дополнительное построение: опустим высоты **BH** и **CK** на большее основание трапеции **AD**. Поскольку прямые **BC** и **AD** параллельны, то расстояния от точек **B** и **C** до прямой **AD** одинаковы и, значит, **BH** = **CK**. Прямоугольные треугольники **ACK** и **DBH** равны по гипотенузе и катету, поэтому **AH** = **KD**.*

*Пусть серединный перпендикуляр **l** к меньшему основанию трапеции **BC** пересекает его в точке **M**, а большее основание **AD** в точке **N**. Из параллельности прямых **BC** и **AD** следует, что прямая **l** будет также перпендикулярна **AD**. Тогда четырехугольники **HBMN** и **NMCK** будут прямоугольниками, поэтому **HN** = **BM** = **CM** = **NK**. Значит, **AN** = **DN**. Следовательно прямая **l** – это серединный перпендикуляр и к большему основанию трапеции **AD**. При симметрии относительно прямой **l** точки **B** и **C** перейдут друг в друга, то же будет с вершинами **A** и **D**. Боковые стороны трапеции **AB** и **CD** поменяются местами, а ее основания перейдут сами в себя. Таким образом, при симметрии относительно прямой **l** трапеция перейдет в себя. То есть, прямая **l** – это ось ее симметрии.**D**. Мы с вами покажем, что у них есть общий серединный.*

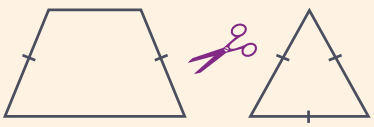
Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ



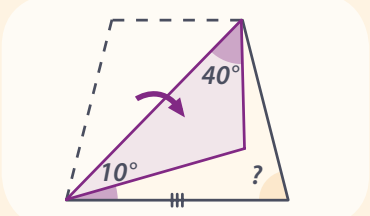
14. Сформулируйте и докажите третий признак равнобокой трапеции.

15. Разрежьте произвольную равнобокую трапецию на три меньшие равнобокие трапеции.



16. Разрежьте равносторонний треугольник на три равнобокие трапеции.

17. Лист бумаги в форме равнобокой трапеции согнули по ее диагонали и получили фигуру, показанную на рисунке. Отмеченные на этом рисунке два угла равны 10° и 40°. Найдите острый угол этой трапеции.



ВОПРОСЫ

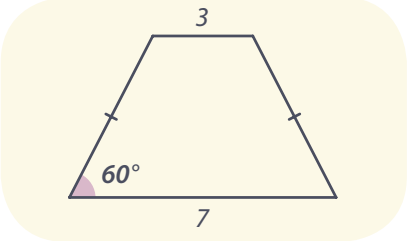
1. Что в переводе с греческого языка означает слово трапеция? Какие еще русские слова вы знаете с этим корнем?
2. Как называют параллельные стороны трапеции?
3. Где на изображении прямоугольного стола в перспективе должны пересекаться продолжения двух его сторон?
4. Какие бывают виды трапеций?
5. Где трапеции изображают в обратной перспективе?
6. Какие свойства равнобокой трапеции вы знаете?
7. Что называют высотой трапеции?
8. Может ли высота быть короче ее боковой стороны?
9. Может ли трапеция иметь одинаковые основания?
10. Может ли трапеция иметь только один прямой угол?
11. Один угол равнобокой трапеции равен 100°. Чему равен ее противоположный угол?
12. Трапецию разрезали на две трапеции. Обязательно ли линия разреза должна быть параллельна ее основаниям?
13. Верно ли, что четырехугольник, который имеет только одну ось симметрии, должен быть трапецией?
14. Можно ли всегда составить треугольник из двух диагоналей трапеции и отрезка, равного сумме ее оснований?
15. У четырехугольника равны диагонали. Верно ли, что он является равнобокой трапецией либо прямоугольником?
16. У четырехугольника равны два острых угла при одной стороне и равны диагонали. Верно ли, что этот четырехугольник – равнобокая трапеция?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

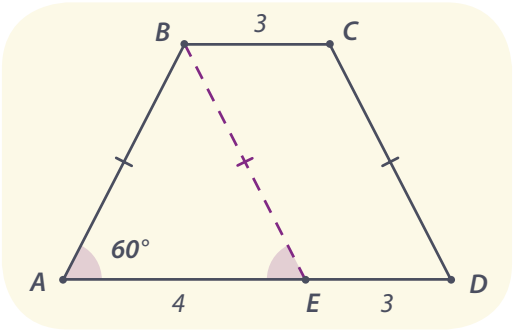
ПРИМЕР 1 ★☆☆

Острый угол равнобокой трапеции равен 60°. Найдите ее боковую сторону, если основания трапеции равны 3 и 7.

РЕШЕНИЕ: Пусть трапеция $ABCD$ имеет основания AD и BC, а угол при ее вершине A равен $60°$. Возьмем на большем основании AD нашей трапеции точку E так, что $ED = BC = 3$. Тогда четырехугольник $EBCD$ будет параллелограммом по признаку.



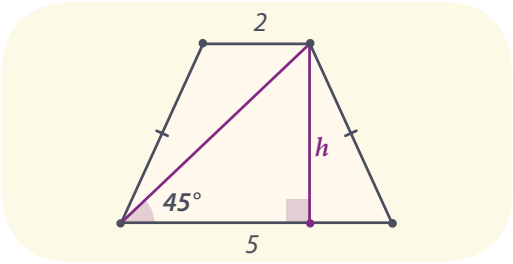
Отсюда следует, что $BE = CD$. Следовательно, $AB = BE$ и треугольник ABE равнобедренный. Поскольку угол при его вершине A равен $60°$, то данный треугольник будет равносторонним. Значит, боковая сторона трапеции $AB = AE = 7 - 3 = 4$.



ОТВЕТ: боковая сторона равна 4

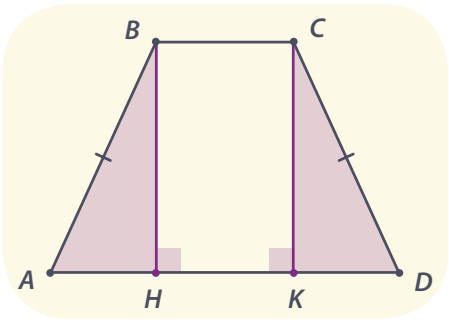
ПРИМЕР 2

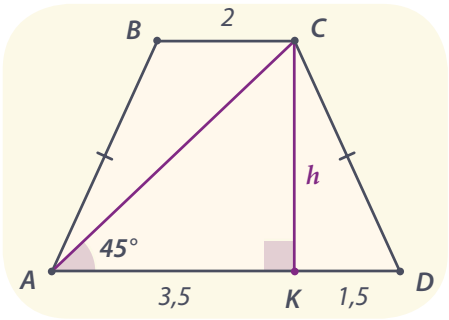
Диагональ равнобокой трапеции образует с ее основаниями угол 45°. найдите высоту трапеции, если ее основания равны 2 и 5.



РЕШЕНИЕ: Опустим из концов меньшего основания BC трапеции $ABCD$ высоты BH и CK на ее большее основание AD. Четырехугольник $HBCK$ будет прямоугольником, следовательно $BH = CK$ и $HK = BC = 2$. Прямоугольные треугольники ABH и DCK равны по гипотенузе и катету, поэтому $AH = KD = (AD - BC) / 2 = 1,5$. А теперь давайте рассмотрим прямоугольный треугольник ACK. По условию его острый угол равен $45°$, значит, он равнобедренный. Но тогда высота трапеции $CK = AK = 5 - 1,5 = 3,5$.

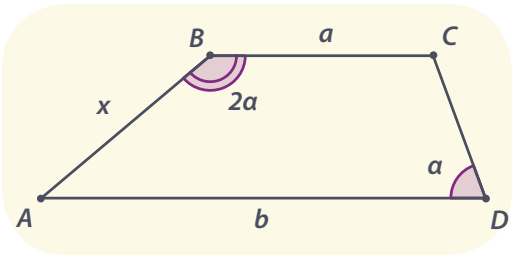
ОТВЕТ: 3,5





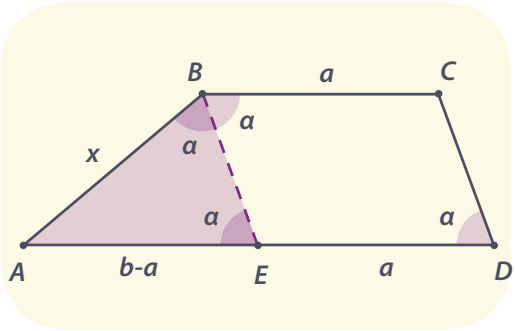
ПРИМЕР 3

Один из углов трапеции в два раза больше противоположного. Найдите боковую сторону при данном угле, если ее основания равны a и b. $(a < b)$



РЕШЕНИЕ: Пусть угол при вершине D трапеции $ABCD$ равен a, а ее противоположный угол при вершине B в два раза его больше. Значит, он равен $2a$. Сделаем дополнительное построение: на большем основании AD трапеции возьмем точку E так, что $ED = BC = a$. Тогда четырехугольник $EBCD$ будет параллелограммом по 4 признаку.

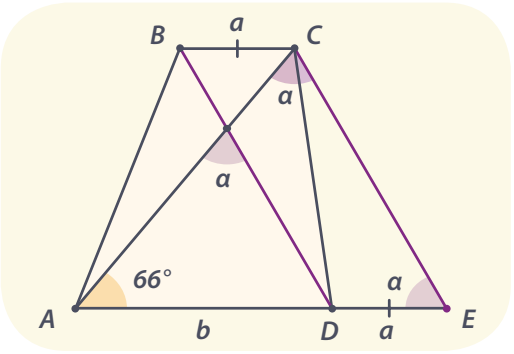
Противоположные углы параллелограмма равны, значит, угол *EBC* тоже равен *α*. Но тогда и угол *ABE* равен *α*. А поскольку прямые *BE* и *CD* параллельны, то углы *AEB* и *ADC* должны быть равны как соответствующие. Таким образом, угол *AEB* равен углу *ABE* и треугольник *ABE* будет равнобедренным. А раз так, то *AB = AE = b - a*.



ОТВЕТ: **b-a**

ПРИМЕР 4 ★★☆

Одна из диагоналей трапеции равна сумме ее оснований и образует с ними углы 66°. Найдите угол между диагоналями этой трапеции.

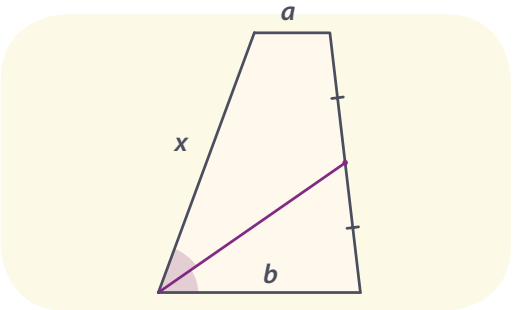


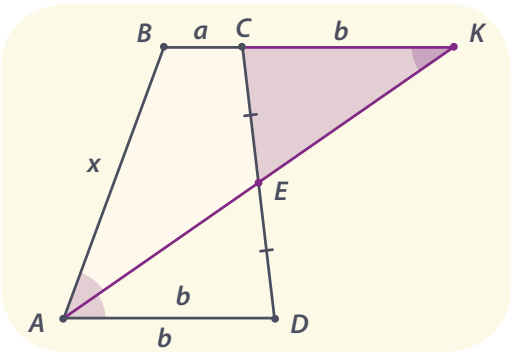
РЕШЕНИЕ: Пусть диагональ *AC* трапеции *ABCD* равна сумме ее оснований *BC* и *AD*. По условию угол *CAD* равен *66°*. Сделаем дополнительное построение: на продолжении основания *AD* трапеции отложим отрезок *DE = BC*. Тогда четырехугольник *DBCE* по признаку будет параллелограммом. Значит, прямые *BD* и *CE* параллельны и угол *ACE* равен углу между диагоналями трапеции *α*. По условию диагональ *AC* равна сумме ее оснований, то есть, должно быть *AC = AE*. Тогда треугольник *ACE* равнобедренный, откуда *2α + 66° = 180°*. Значит, *α = 57°*.

ОТВЕТ: **57°**

ПРИМЕР 5 ★★★

Биссектриса угла трапеции делит одну ее боковую сторону пополам. Найдите вторую боковую сторону этой трапеции, если ее основания раны a и b.



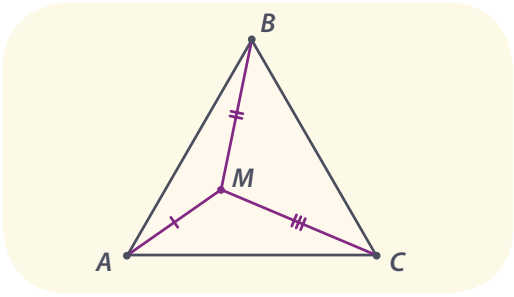


РЕШЕНИЕ: Пусть биссектриса угла *A* трапеции *ABCD* делит ее боковую сторону *CD* пополам. Обозначим середину этой стороны как точку *E*. Сделаем дополнительное построение: продлим прямые *AE* и *BC* до пересечения в точке *K*. Треугольники *AED* и *KEC* равны по второму признаку, поскольку *ED = EC*, углы при вершине *E* у них вертикальные, а углы при вершинах *D* и *E* равны как накрест лежащие при параллельных. Значит, *CK = AD = b*. Кроме того, угол *AKC* равен углу *KAD*, и поэтому равны углы *BAK* и *AKB*. Это означает, что треугольник *ABK* равнобедренный по признаку, то есть, *AB = BK = a + b*.

ОТВЕТ: **a + b**

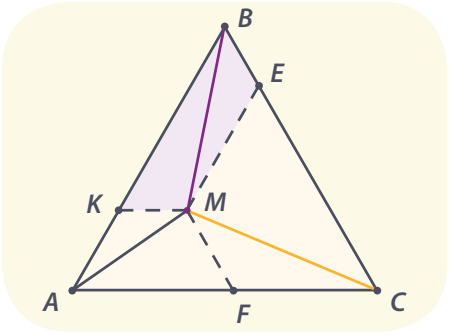
ПРИМЕР 6 ★★★

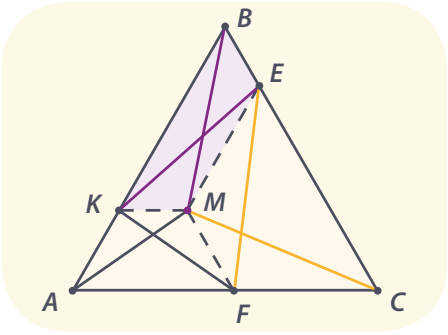
Произвольную точку *M* внутри равностороннего треугольника *ABC* соединили с его вершинами. Докажите, что на каждой стороне этого треугольника можно выбрать по одной точке так, чтобы расстояния между ними были равны *AM*, *BM* и *CM*.



РЕШЕНИЕ: Сделаем дополнительное построение: через точку *M* параллельно сторонам треугольника проведем три отрезка *MK*, *ME* и *MF*. По этим отрезкам весь треугольник *ABC* можно разрезать на три трапеции. Острые углы всех этих трапеций будут равны *60°*, поэтому они будут равнобокими. По свойству у равнобокой трапеции равны диагонали. Значит, *AM = KF, BM = KE, CM = EF*. Таким образом, точки *K*, *E* и *F* – искомые.

ОТВЕТ: **Что и требовалось доказать**





ЗАМЕЧАНИЕ:

Из результата данной задачи следует, что три расстояния от произвольной точки внутри равностороннего треугольника до его вершин подчиняются неравенству треугольника: любое из них меньше суммы двух других.

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

1 ★☆☆ Один угол трапеции равен 80°. Найдите противоположный ее угол, если диагонали трапеции равны.

2 ★☆☆ Найдите углы равнобокой трапеции, если разность двух из них равна 20°.

3 ★☆☆ Диагональ равнобокой трапеции образует с ее основаниями углы 40°. Найдите больший угол трапеции, если одно ее основание равно боковой стороне.

4 ★☆☆ Диагонали равнобокой трапеции перпендикулярны. Найдите острый угол трапеции, если угол между ее диагональю и боковой стороной равен 65°.

5 ★☆☆ Два угла трапеции равны 60°. Найдите ее большее основание, если одна ее боковая сторона равна 3 см, меньшее основание равно 2 см.

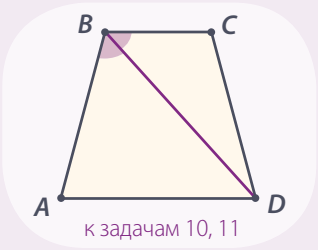
6 ★☆☆ Два противоположных угла трапеции равны 60° и 120°. Найдите боковые стороны этой трапеции, если ее основания равны 3 и 5.

7 ★☆☆ Два угла трапеции равны 45° и 90°. Найдите высоту трапеции, если ее основания равны 2 и 5.

8 ★☆☆ Два угла трапеции равны 60° и 90°. Найдите большую боковую сторону этой трапеции, если ее основания равны 2 и 5.

9 ★☆☆ Одна из боковых сторон прямоугольной трапеции в два раза больше другой. Найдите больший угол этой трапеции.

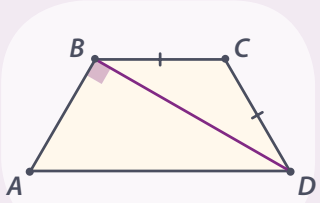
10 ★☆☆ Основания равнобокой трапеции относятся как 2:5, а диагональ делит ее тупой угол пополам. Найдите боковую сторону трапеции, если её периметр равен 68 см.



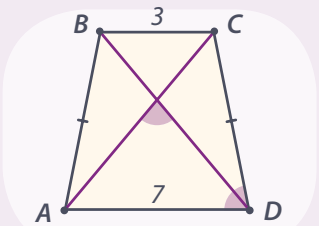
к задачам 10, 11

11 ★☆☆ Основания равнобокой трапеции относятся как 2:3, а диагональ делит ее острый угол пополам. Найдите боковую сторону этой трапеции, если её периметр равен 45 см.

12 ★☆☆ Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне, а меньшее основание равно боковой стороне. Найдите углы трапеции.



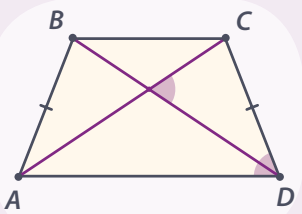
к задаче 12



к задаче 13

13 ★☆☆ Отмеченный на рисунке острый угол равнобокой трапеции равен углу между ее диагоналями. Найдите периметр этой трапеции, если ее основания равны 3 и 7.

14 ★☆☆ Отмеченный на рисунке острый угол равнобокой трапеции равен углу между ее диагоналями. Найдите периметр этой трапеции, если ее основания равны 4 и 6.



к задаче 14

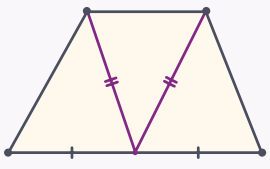
15 ★☆☆ Существует ли трапеция, основания которой равны 2 и 6, а боковые стороны – 1 и 5 ?

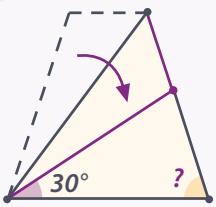
16 ★☆☆ Существует ли трапеция, основания которой равны 4 и 9, а диагонали равны 5 и 7 ?

17 ★☆☆ Середина основания трапеции равноудалена от концов другого основания. Обязательно ли данная трапеция равнобокая?

18 ★☆☆ Одно основание трапеции равно 2, а боковые стороны равны 2 и 3. Найдите второе основание трапеции, если его длина – целое число.

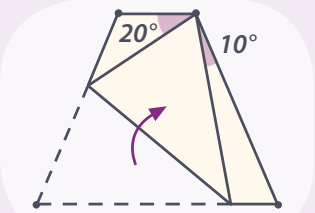
19 ★☆☆ Равнобокую трапецию согнули вдоль ее диагонали. При этом вершина ее «загнутого» угла попала на боковую сторону так, как это показано на рисунке. Найдите острый угол трапеции, если отмеченный на рисунке угол равен 30°.


к задаче 17



к задаче 19

20 ★★☆ Равнобокую трапецию согнули так, что совместились ее противоположные вершины. На рисунке показано, как эта трапеция выглядит в сложенном состоянии. Найдите острый угол данной трапеции, если отмеченные на рисунке два угла равны 10° и 20°.

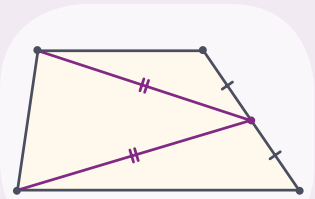


к задаче 20

21 ★★☆ Углы при одном основании трапеции равны 50° и 80°. Докажите, что одна из ее боковых сторон равна разности оснований.

22 ★★☆ Каждая диагональ трапеции равна сумме ее оснований. Найдите угол между ее диагоналями.

23 ★★☆ Середина боковой стороны трапеции равноудалена от двух противоположных от нее вершин. Докажите, что трапеция прямоугольная.


к задаче 23

24 ★★☆ Постройте трапецию по четырем отрезкам, два из которых равны ее основаниям, а два другие – ее диагоналям.

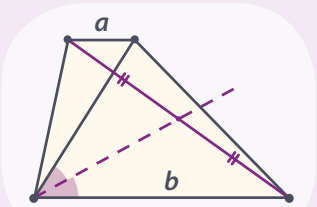
25 ★★☆ Сколько существует трапеций, стороны которых в любом порядке равны 5, 5, 6 и 7?

26 ★★☆ Разрежьте трапецию на две части, из которых можно сложить параллелограмм.

27 ★★☆ Разрежьте трапецию на две части, из которых можно сложить треугольник.

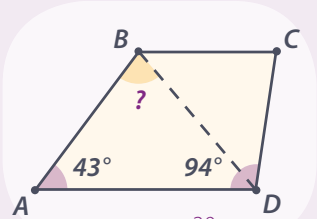
28 ★★☆ Боковая сторона трапеции равна a. Параллельно ей через середину другой боковой стороны провели прямую. Какой отрезок этой прямой заключен внутри трапеции?

29 ★★☆ Биссектриса угла между основанием и первой диагональю трапеции делит вторую ее диагональ пополам. Найдите первую диагональ трапеции, если ее основания равны a и b.

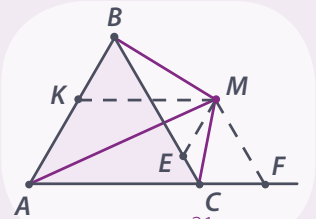


к задаче 29

30 ★★★ Угол A трапеции ABCD равен 43°, угол D равен 94°. Боковая сторона CD трапеции в два раза меньше ее основания AD. Найдите угол ABD.



к задаче 30



к задаче 31

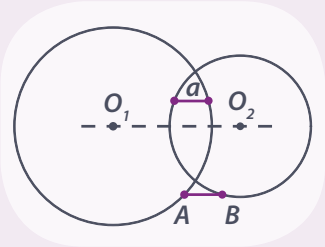
31 ★★★ Точку M вне равностороннего треугольника ABC соединили тремя отрезками с его вершинами. Кроме того, через нее параллельно сторонам этого треугольника провели три прямые, которые пересекали его стороны в точках K, E и F так, как это показано на рисунке. Известно, что точки K,E и F лежат на одной прямой.

а) Найдите угол BMC.

б) Найдите AM, если BM = a, CM = b.

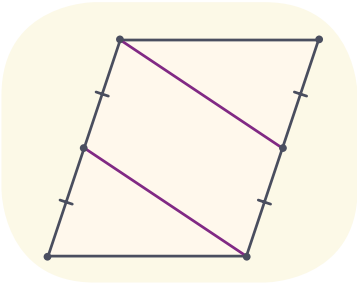
32 ★★★ Любую точку M внутри равнобокой трапеции ABCD соединили отрезками с ее вершинами. Докажите, что из отрезков AM, BM, CM и DM всегда можно составить четырехугольник, вершины которого лежат на четырех прямых, содержащих стороны данной трапеции.

33 ★★☆ Даны две пересекающиеся окружности разных радиусов с центрами O_1 и O_2. Постройте отрезок AB данной длины a с концами на этих окружностях, параллельный прямой O_1O_2. Сколько решений может быть у этой задачи?

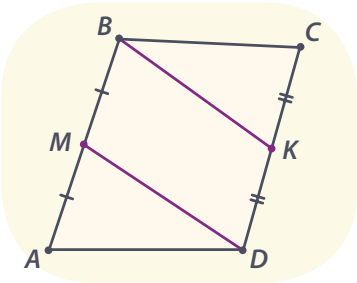


ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

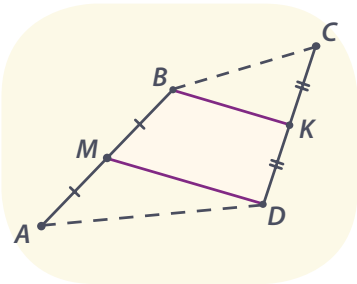
Если две противоположные вершины параллелограмма соединить с серединами его сторон так, как это показано на рисунке, то два полученные отрезка будут параллельны и равны (вспомните, почему!).



Очень легко понять, что другие четырехугольники этим свойством не обладают. В самом деле, если соответствующие отрезки BK и DM в каком-то четырехугольнике ABCD параллельны и равны, то четырехугольник MBKD будет параллелограммом по признаку. Тогда его стороны BM и DK тоже будут параллельны и равны. Отсюда сразу следует, что параллельны и равны должны быть стороны AB и CD. Получается, что по тому же признаку сам четырехугольник ABCD должен быть параллелограммом.



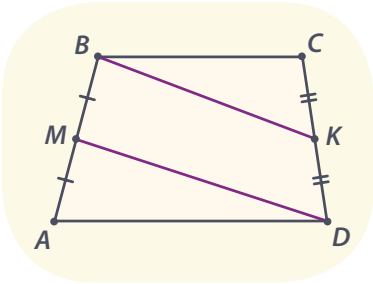
Давайте теперь из двух условий (параллельности и равенства) данных отрезков BK и DM оставим только одно. Поставим вопрос так: есть ли четырехугольники, отличные от параллелограммов, у которых эти два отрезка параллельны? Ответ будет положительным. Легко построить пример такого четырехугольника. Нужно взять любую трапецию MBKD и продлить ее боковые стороны MB и KD на свою длину за точки M и K. Мы получим четырехугольник ABCD, у которого стороны AB и CD заведомо не будут параллельны. То есть, параллелограммом этот четырехугольник уже точно не будет. А может ли он быть трапецией? Ведь прямые BC и AD очень похожи на параллельные...



Давайте попробуем усилить наше требование, и поставим вопрос уже так: существует ли трапеция, у которой данные два отрезка параллельны друг другу? Этот вопрос совсем не так очевиден – посмотрите на данный чертеж: на нем прямые BK и DM практически параллельны. И, тем не менее, параллельными они не могут быть ни в одной трапеции.

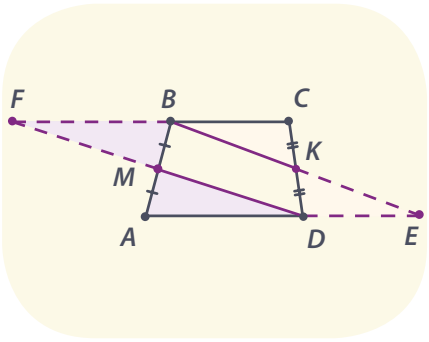
Давайте это докажем. Сделаем уже стандартное для нас дополнительное построение: продлим наши отрезки до пересечения с прямыми AD и

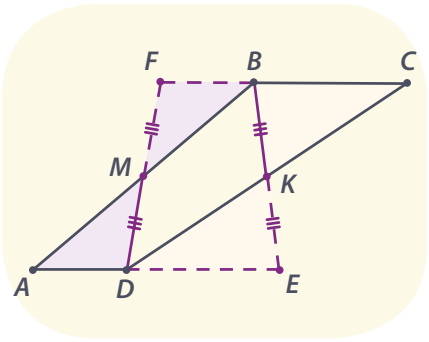
BC в точках E и F. Тогда треугольник AMD будет равен треугольнику BMF по стороне и двум углам (каким?). Так же будут равны треугольники BCK и EDK. Значит, в любой трапеции должно быть верно, что AD = FD, BC = DE. А теперь давайте предположим, что прямые BK и DM параллельны друг другу. Тогда четырехугольник DFBC должен быть параллелограммом по определению. Поэтому его противоположные стороны равны: FB = DE. Но тогда должно быть BC = AD. То есть, основания нашей трапеции должны быть равны. Но тогда это уже не трапеция, а параллелограмм.

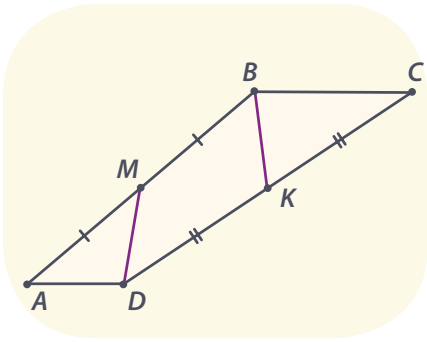


Итак, ни в одной трапеции отрезки BK и MD не могут быть параллельны. А могут ли они быть одинаковой длины? На самом деле, могут. Но придумать такую трапецию совсем непросто. И здесь нам опять помогут наши дополнительные построения. Из равенства треугольников AMD и BMF следует, что DM = MF. Точно так же BK = KE.

А теперь давайте рассуждать так: если BK = MD, то FD должно быть равно BE. То есть, четырехугольник DFBE должен быть равнобокой трапецией! Давайте нарисуем эту равнобокую трапецию DFBE и уже по ней построим нужную нам трапецию ABCD. Нужное построение показано на данном рисунке. А искомая трапеция ABCD изображена на данном рисунке.

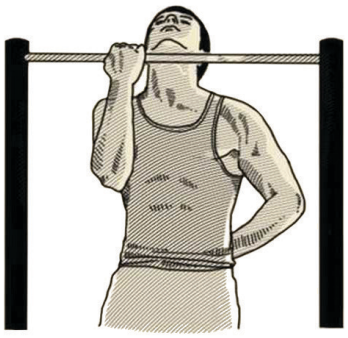




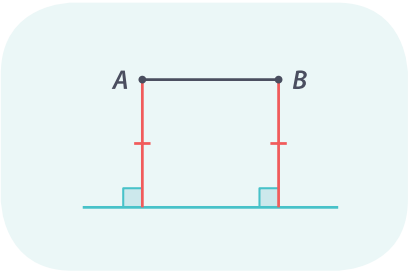


§ 5 СРЕДНИЕ ЛИНИИ

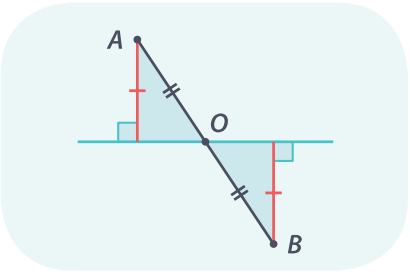
Точки на равном расстоянии от прямой



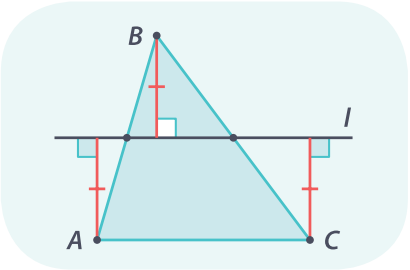
Помните, что расстояние от точки до прямой линии – это длина перпендикуляра, опущенного из неё на эту прямую?



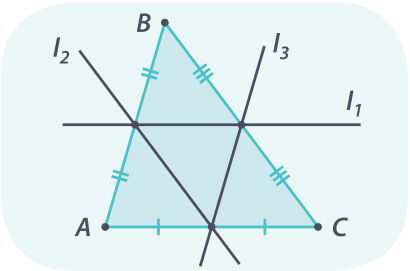
Давайте возьмём две точки A и B на равных расстояниях от прямой. Как они могут быть расположены? Здесь есть всего две возможности: либо эти точки лежат по одну сторону от данной нам прямой, либо – по разные стороны. В первом случае отрезок AB будет параллелен этой прямой, а во втором – должен пересекать её в некоторой точке O. В этом случае образуются два равных прямоугольных треугольника, поэтому точка O должна быть серединой отрезка AB. Верно и обратное: если прямая проходит через середину отрезка AB, то расстояния от его концов A и B до данной прямой одинаковы. Это следует из равенства тех же прямоугольных треугольников.



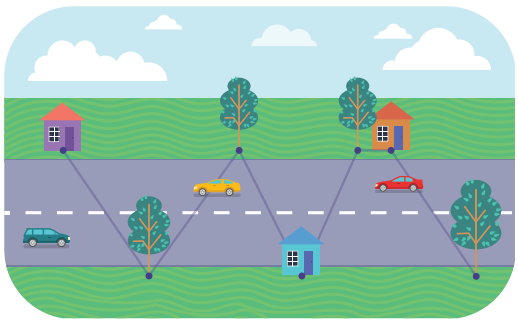
А могут ли все вершины треугольника находиться на равном расстоянии от одной прямой? И как эта прямая должна быть расположена относительно него?

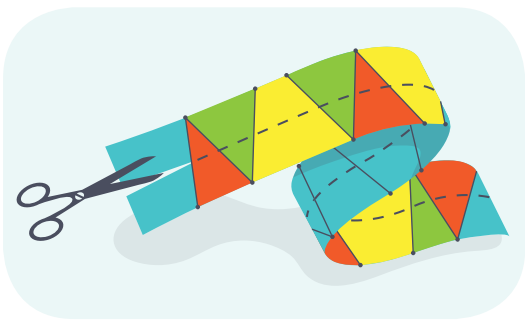


Давайте возьмём любой треугольник ABC и попробуем провести прямую l, так, чтобы расстояния до неё от всех вершин треугольника были равны. У нас есть всего два случая: либо прямая l не пересекает ни одной стороны треугольника ABC, либо пересекает сразу две его стороны. В первом случае точки A, B и C будут лежать в одной полуплоскости относительно прямой l на равном от неё расстоянии. Мы с вами уже знаем, что все такие точки лежат на одной прямой, параллельной l. Значит, этот случай невозможен для треугольника. Во втором случае прямая l должна пересекать ровно две стороны треугольника, причём проходить через середины этих сторон. Кроме того, легко видеть, что в этом случае прямая l должна быть ещё и параллельна третьей стороне треугольника.

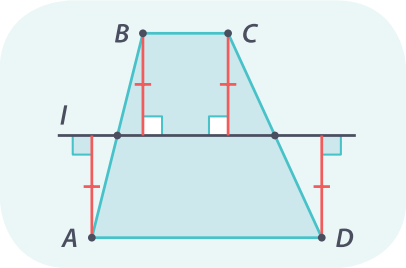


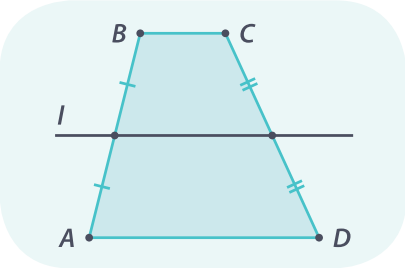
Сколько таких прямых можно провести? Легко догадаться – ровно три прямые. И каждая из них должна быть параллельна своей стороне.





А существуют ли четырёхугольники, все вершины которых находятся на одинаковых расстояниях от данной прямой *l*? Конечно, существуют – и построить такой четырёхугольник совсем не сложно. Ведь каждая его сторона должна либо быть параллельна прямой *l*, либо делиться этой прямой пополам. Легко убедиться, что у такого четырёхугольника должны быть две параллельные стороны, то есть он может быть или параллелограммом, или трапецией. В случае трапеции прямая *l* должна проходить через середины двух её боковых сторон.



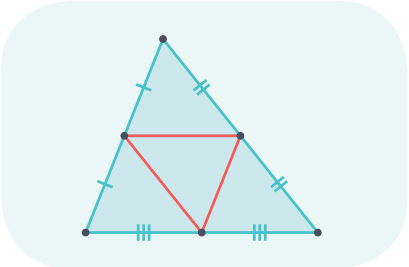


Средняя линия треугольника

Как вы уже догадались, мы не случайно проводили прямую через середины двух сторон треугольника. Отрезки, которые соединяют их середины, называют средней линией треугольника. А сами эти средние линии обладают важными свойствами, которые помогают доказывать теоремы и решать задачи. Итак, по определению

Средней линией треугольника называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

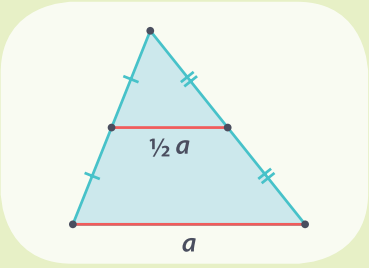
Легко понять, что у треугольника всего три средние линии. Каждая из них соединяет середины двух его сторон и не пересекает третью. Эту третью сторону треугольника для краткости обозначают его основанием. Получается, что основанием треугольника может служить каждая из его сторон.



А нам пора доказать важное свойство средней линии треугольника.

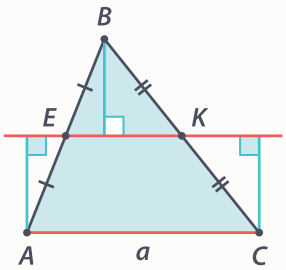
СВОЙСТВО СРЕДНЕЙ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Средняя линия треугольника параллельна его основанию и равна половине основания.

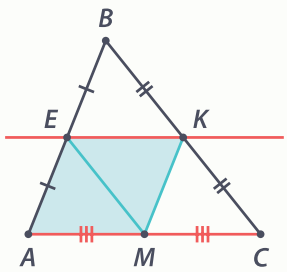


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Возьмём произвольный треугольник **ABC** и проведём в нем среднюю линию **EK**, которая соединяет середины двух его сторон **AB** и **BC**. В начале этого параграфа мы убедились, что расстояния от всех вершин треугольника **ABC** до этой прямой одинаковы. Точки **A** и **C** находятся по одну сторону от прямой **EK**, поэтому прямые **AC** и **EK** должны быть параллельны. Итак, средняя линия треугольника всегда параллельна его основанию.*



*Докажем теперь вторую часть теоремы. Возьмем точку **M** – середину основания **AC**. Отрезки **MK** и **ME** – тоже средние линии нашего треугольника, поэтому они должны быть параллельны его сторонам **AB** и **BC**. Значит, четырёхугольник **AEKM** будет параллелограммом по определению. Противоположные стороны параллелограмма должны быть равны, поэтому **EK = AM = ½ AC = ½ a**. Таким образом, длина средней линии треугольника равна половине параллельной ей стороны, то есть половине основания треугольника.*



Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Прямая параллельна одной стороне треугольника и делит другую его сторону пополам. Докажите, что эта прямая делит пополам и третью сторону треугольника.

2. Существует ли пятиугольник, все вершины которого равноудалены от одной прямой?

Как может звучать утверждение, обратное свойству средней линии треугольника? Чтобы в этом разобраться, сформулируем доказанное нами свойство в терминах «если, то». Тогда звучать оно будет так:

если отрезок соединяет середины двух сторон треугольника, то он параллелен его основанию (третьей стороне) и равен половине этого основания.

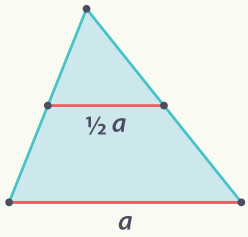
Давайте поменяем местами условие и заключение этой теоремы. Мы получим следующее утверждение:

если отрезок параллелен основанию треугольника и равен половине этого основания, то он соединяет середины двух других сторон этого треугольника.

Верно ли такое утверждение? Легко догадаться, что оно неверно, но что ещё хуже – оно совершенно несодержательно. Ведь равных отрезков, которые параллельны одной прямой, сколько угодно, и они могут вообще не иметь никакого отношения к нашему треугольнику! Поэтому при формулировке обратных утверждений нужно быть очень внимательным. В данном случае содержательное обратное утверждение получится только тогда, когда мы дополнительно потребуем, чтобы концы нужного нам отрезка лежали на сторонах данного треугольника. Такое утверждение тогда станет верным, и его можно будет считать признаком средней линии треугольника.

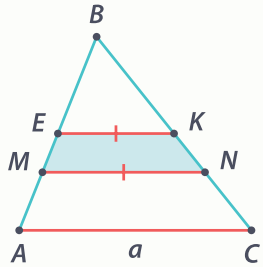
ПРИЗНАК СРЕДНЕЙ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Если отрезок с концами на двух сторонах треугольника параллелен его третьей стороне и равен её половине, то этот отрезок – средняя линия треугольника.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

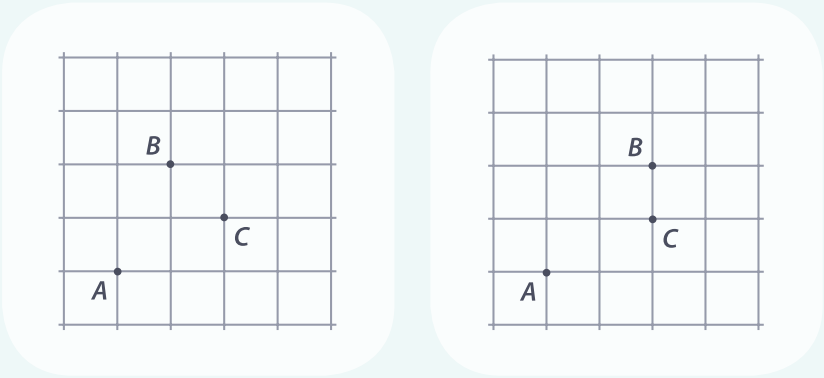
*Пусть отрезок **MN** параллелен основанию **AC** треугольника **ABC** и равен половине этого основания, а его концы лежат на двух других сторонах треугольника. Отметим точки **E** и **K** – середины сторон **AB** и **BC**. Отрезок **EK** будет средней линией треугольника **ABC** и по свойству тоже должен быть параллелен **AC** и равен его половине. Если отрезки **MN** и **EK** не совпадают, то образуется четырёхугольник **MEKN**, две стороны которого равны и параллельны друг другу. Но такой четырёхугольник по признаку должен быть параллелограммом! Тогда прямые **ME** и **KN** должны быть параллельными. Но они пересекаются в точке **B**. Мы получили противоречие. Значит, отрезок **MN** должен совпадать с отрезком **EK**. Это и означает, что он является средней линией данного нам треугольника.*



Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

3. На клетчатой бумаге отметили точки A, B и C так, как это показано на рисунках. Постройте на каждом рисунке треугольник, для которого данные точки были бы серединами его сторон.



Средняя линия трапеции

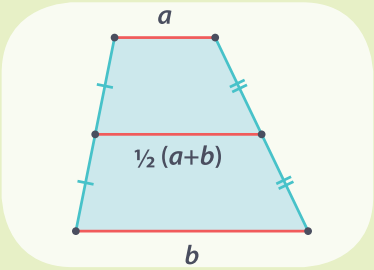
Обратимся теперь к трапеции. Как и у треугольника, у трапеции тоже есть своя средняя линия, и соединяет она середины её боковых сторон. Таким образом

Средней линией трапеции называют отрезок, который соединяет середины её боковых сторон.

Так же, как и средняя линия треугольника, средняя линия трапеции обладает важным свойством, которое мы запишем как теорему

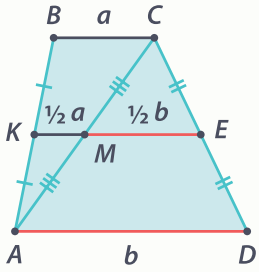
СВОЙСТВО СРЕДНЕЙ ЛИНИИ ТРАПЕЦИИ

Средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна половине их суммы.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Возьмём любую трапецию **ABCD**, у которой длины оснований **BC** и **AD** равны **a** и **b**.*



*Пусть точки **K** и **E** – середины боковых сторон этой трапеции. Проведем диагональ **AC** – она разделит трапецию на два треугольника. Пусть точка **M** – середина этой диагонали. Отрезок **KM** является средней линией треугольника **ABC**. По свойству средней линии он параллелен его основанию **BA** и равен половине этого основания. Точно так же отрезок **ME** – средняя линия треугольника **ACD**, поэтому он параллелен его основанию **AD** и равен его половине.*

*Основания трапеции параллельны, а прямая **KM** параллельна одному из них. Значит, по транзитивности она должна быть параллельна и другому основанию этой трапеции. Получается, что прямые **KM** и **ME** должны быть параллельны одной прямой **AD**. Но через точку **M** по аксиоме можно провести только одну прямую, параллельную данной. Значит, прямые **KM** и **ME** должны совпасть. Следовательно, точки **K**, **M** и **E** лежат на одной прямой, которая параллельна основаниям трапеции.*

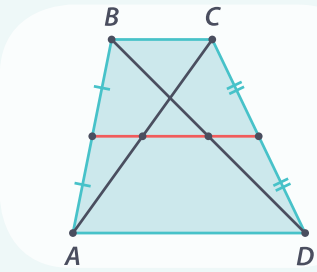
Кроме того, длина средней линии трапеции $KE = KM + ME = ½\,a + ½\,b = ½\,(a + b)$.

Таким образом, средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна половине их суммы.

Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

4. Докажите, что середины диагоналей любой трапеции лежат на её средней линии.



5. Прямая параллельна основаниям трапеции и делит одну её боковую сторону пополам. Докажите, что она разделит пополам и другую её боковую сторону.

6. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции параллелен её основаниям и равен половине их суммы. Докажите, что данный отрезок – средняя линия трапеции. Является ли данное утверждение признаком средней линии трапеции?

УПРАЖНЕНИЯ

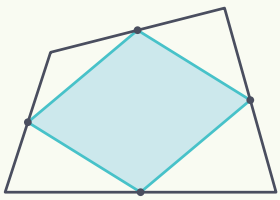
7. В Новодевичьем монастыре есть вот такое необычное окно, на картинке оно слева. Какую форму оно имеет? А какую форму имеют его стеклянные ячейки? Есть ли в нём одинаковые ячейки? Предположив, что длина его левой вертикальной стороны рамы равна a, а длина его правой вертикальной стороны рамы равна b, найдите длины других его вертикальных конструктивных элементов. Как вам кажется, в чём состоят сложности изготовления подобных окон?

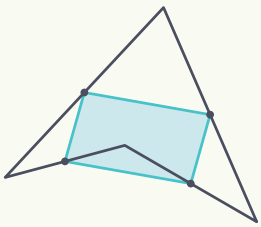
Теорема Вариньона

Посмотрите на середины сторон любого четырёхугольника: удивительно, но они всегда образуют параллелограмм. Этот факт верен для всех четырёхугольников – выпуклых и невыпуклых. Считается, что впервые его заметил и доказал французский механик и математик Пьер Вариньон ещё в конце 17 века. Поэтому его и называют теоремой Вариньона.

ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА

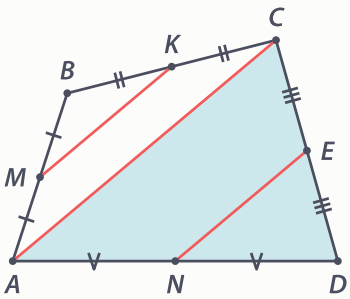
Середины сторон любого четырёхугольника образуют параллелограмм.





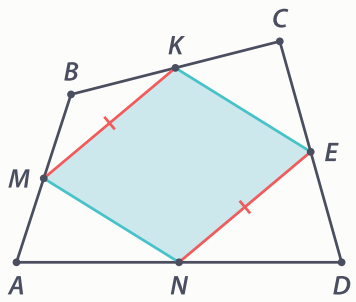
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Пусть точки **M**, **K**, **E** и **N** – середины сторон четырёхугольника **ABCD**. Мы докажем, что эти точки являются вершинами параллелограмма. Давайте проведем в данном четырёхугольнике диагональ **AC**. Тогда отрезок **MK** окажется средней линией треугольника **ABC**.*

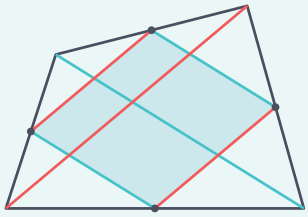


*Значит, он должен быть параллелен этой диагонали и равен её половине. Точно так же отрезок **NE** будет средней линией треугольника **ACD**, поэтому он тоже параллелен диагонали **AC** и равен её половине. Значит, отрезки **MK** и **NE** параллельны друг другу и равны. Тогда четырёхугольник **MKEN** должен быть параллелограммом по признаку, ведь две его противоположные стороны равны и параллельны друг другу.*

Что и требовалось доказать.



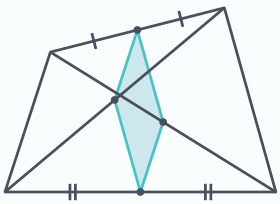
Замечание: Из нашего доказательства следует, что стороны параллелограмма Вариньона параллельны диагоналям данного четырёхугольника.



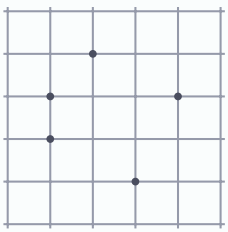
УПРАЖНЕНИЯ

8. Докажите теорему Вариньона для случая невыпуклого четырёхугольника.

9. Докажите, что середины двух противоположных сторон любого четырёхугольника и середины двух его диагоналей тоже образуют параллелограмм либо лежат на одной прямой. Для каких четырёхугольника середины данных отрезков лежат на одной прямой?



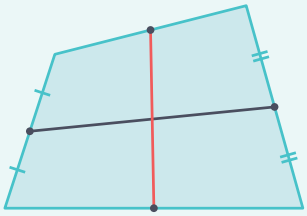
10. На рисунке клетчатой бумаги отметили 5 точек. Постройте на ней такой четырёхугольник, чтобы четыре из данных точек оказались в серединах сторон этого четырёхугольника. Сколько таких четырёхугольников можно построить?



Средние линии четырёхугольника

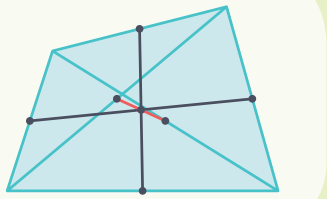
Если соединить середины двух противоположных сторон любого четырёхугольника отрезком, то получится его средняя линия.

У четырёхугольника всего две такие линии, хотя в случае трапеции её средней линией принято называть лишь одну из них (какую?). Оказывается, что средние линии четырёхугольника обладают интересным свойством, которое мы запишем как теорему



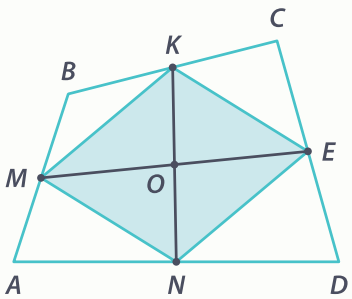
ТЕОРЕМА

Две средние линии четырёхугольника и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и делят друг друга пополам.

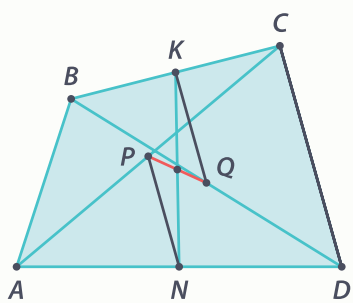


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

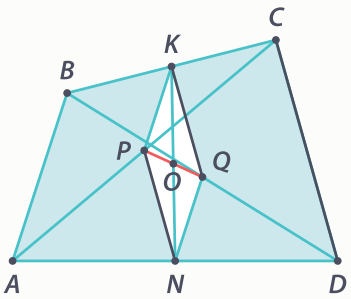
*Пусть средние линии **ME** и **KN** четырёхугольника **ABCD** пересекаются в точке **O**. По теореме Вариньона четырёхугольник **MKEN** является параллелограммом, а отрезки **ME** и **KN** – его диагоналями. Диагонали параллелограмма по его свойству делят друг друга пополам. Значит, точка **O** будет общей серединой отрезков **ME** и **KN**.*



*Рассмотрим теперь отрезок **PQ**, который соединяет середины диагоналей **AC** и **BD** данного нам четырёхугольника. Отрезок **KQ** является средней линией треугольника **CBD**, поэтому он параллелен его основанию **CD** и равен его половине. Точно так же отрезок **PN** – средняя линяя треугольника **ACD**. Значит, он тоже параллелен стороне **CD** и равен половине этой стороны. Из этого следует, что отрезки **PN** и **KQ** должны быть равны между собой. Кроме того, они параллельны одной прямой **CD**. Значит, эти отрезки либо параллельны, либо могут лежать на одной прямой.*

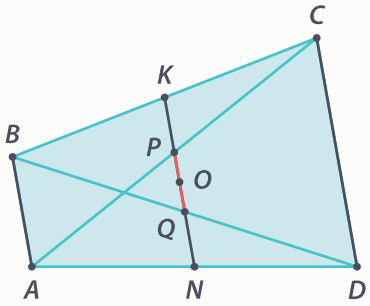


*Рассмотрим вначале первый случай, когда отрезки **PN** и **KQ** параллельны друг другу. Тогда четырёхугольник **PKQN** будет параллелограммом по признаку. Отрезки **KN** и **PQ** окажутся его диагоналями и по свойству параллелограмма должны иметь общую середину, поэтому отрезок **PQ** должен пройти через середину отрезка **KN** – точку **O**. Но тогда все три отрезка **KN**, **ME** и **PQ** будут пересекаться в одной точке **O** – середине всех этих отрезков.*



*Во втором случае, когда отрезки **KQ** и **PN** лежат на одной прямой, точка **O** также окажется серединой отрезка **PQ**, поскольку **KQ** = **PN**. В этом случае стороны **AB** и **CD** данного четырёхугольника должны быть параллельны друг другу.*

Что и требовалось доказать.

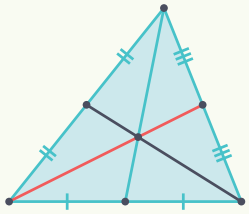


Медианы треугольника

Если в треугольнике провести три его медианы, то они пересекутся в одной точке. Этот замечательный факт можно проверить, сгибая любой треугольник, сделанный из бумаги. Но как он следует из геометрической теории, то есть из аксиом геометрии? Давайте запишем его как теорему.

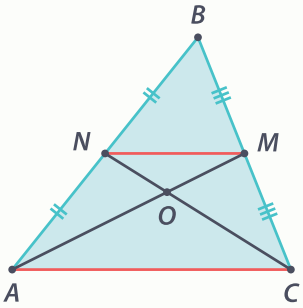
ТЕОРЕМА О МЕДИАНАХ ТРЕУГОЛЬНИАКА

Три медианы любого треугольника пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении 2:1, считая от его вершин.

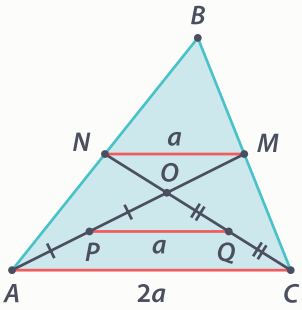


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

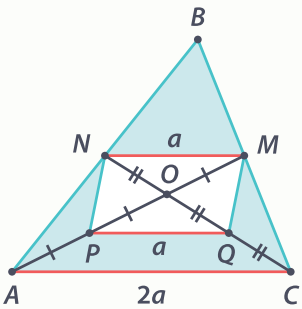
*Пусть в треугольнике **ABC** проведены три медианы **AM**, **BK** и **CN**. Мы докажем, что они всегда пересекаются в одной точке. Возьмем вначале две медианы **AM** и **CN**. Пусть они пересекают друг друга в точке **O**. Отрезок **MN** является средней линией треугольника **ABC**, поэтому он параллелен его основанию **AC** и равен его половине.*

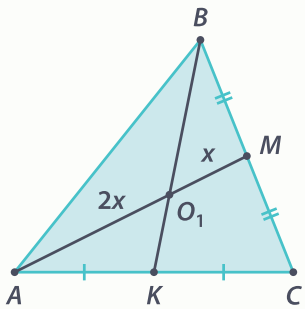


*Сделаем теперь дополнительное построение: проведём среднюю линию **PQ** в треугольнике **AOC**, которая параллельна его основанию **AC**. По теореме отрезок **PQ** равен половине основания **AC**. Значит, отрезки **MN** и **PQ** равны и параллельны. Поэтому четырёхугольник **PNMQ** по признаку должен быть параллелограммом. Но раз так, то его диагонали делят друг друга пополам и точка **O** должна быть серединой отрезков **PM** и **QN**. Значит, точка **O** делит каждую из медиан **AM** и **CN** в отношении **2:1**, если считать от вершин треугольника.*



*Нам осталось совсем немного. Давайте на чертеже оставим медиану **AM** и проведём медиану **BK**. Предположим, что они пересекаются в точке O_1. Так же можно доказать, что точка O_1 разделит каждую из этих медиан в отношении 2:1. Значит, отрезок AO_1 равен отрезку **AO**, и точка O_1 должна совпасть с точкой **O**. А раз так, то через точку **O** проходят все три медианы треугольника.*

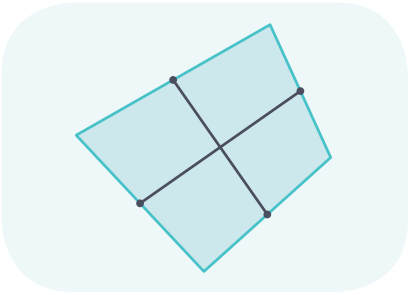




Что и требовалось доказать.

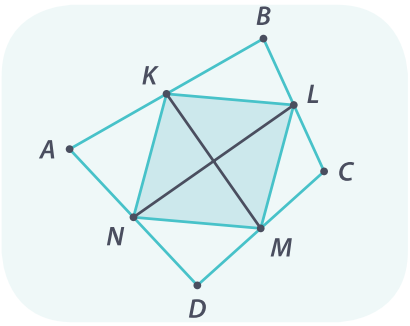
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1



Диагонали четырёхугольника равны. Докажите, что его средние линии перпендикулярны.

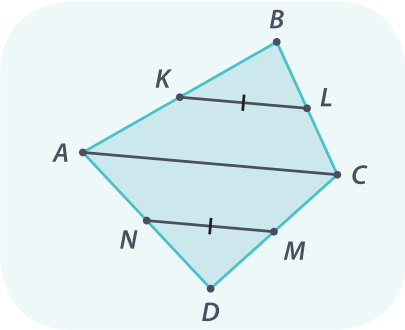
РЕШЕНИЕ: Давайте рассмотрим четырёхугольник *KLMN*, образованный серединами всех сторон исходного четырёхугольника. Мы докажем, что диагонали четырёхугольника *KLMN* перпендикулярны.

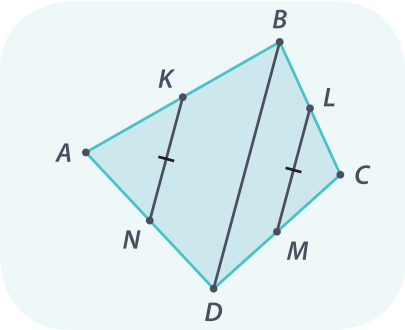


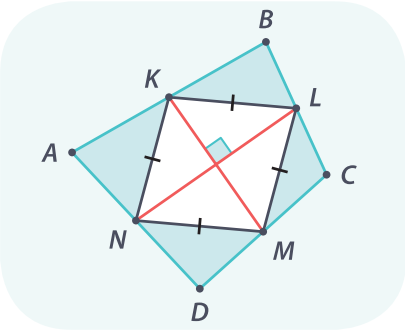
Вначале посмотрим на его стороны *KL* и *MN*. Они являются средними линиями треугольников *ABC* и *ADC* с одинаковым основанием *AC*. По свойству средней линии треугольника эти отрезки равны половине диагонали *AC*.

А теперь посмотрите на стороны *LM* и *NK*. Они являются средними линиями в треугольниках *BCD* и *BAD*. Поскольку у этих треугольников основание *BD* общее, то по теореме о средней линии данные отрезки равны половине диагонали *BD*. По условию диагонали *AC* и *BD* четырёхугольника *ABCD* равны, значит, и все отрезки *KL*, *LM*, *MN* и *NK* будут равны между собой.

Мы доказали, что все стороны четырёхугольника *KLMN* равны, значит, он ромб. По свойству ромба, его диагонали перпендикулярны. Но тогда перпендикулярны и средние линии четырёхугольника *ABCD*.



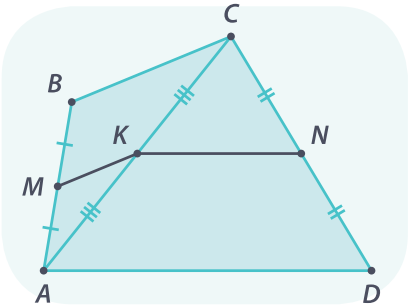




Что и требовалось доказать.

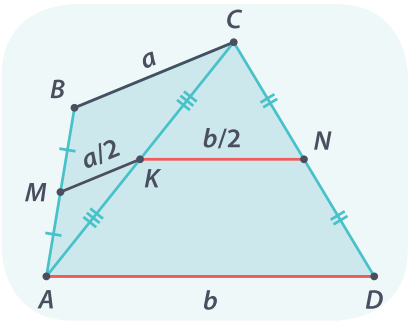
ПРИМЕР 2

Средняя линия четырёхугольника равна половине суммы двух его сторон, не имеющих с ней общих точек. Докажите, что данный четырёхугольник трапеция или параллелограмм.

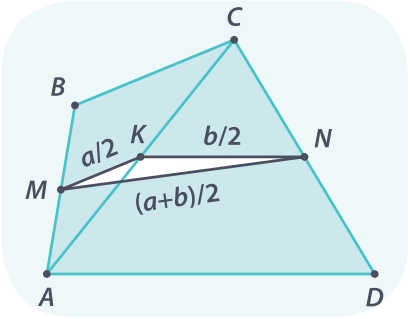


РЕШЕНИЕ: Пусть точки *M* и *N* – середины противоположных сторон *AB* и *CD* четырёхугольника *ABCD*. Тогда отрезок *MN* будет средней линией этого четырёхугольника. По условию он равен половине суммы двух других сторон *BC* и *AD* нашего четырёхугольника. Мы с вами докажем, что эти стороны должны быть параллельными.

Сделаем дополнительное построение: проведем диагональ *AC* и отметим её середину – точку *K*. Отрезки *MK* и *KN* будут средними линиями в треугольниках *BAC* и *ACD* соответственно. По свойству средних линий эти отрезки будут параллельны соответственно сторонам *BC* и *AD* и равны их половинам.



Давайте теперь проведём нашу среднюю линию *MN* и посмотрим на треугольник *MKN*. Если обозначить длины сторон *BC* и *AD* четырёхугольника буквами *a* и *b*, то $MK = a/2$, $KN = b/2$. По условию средняя линия четырёхугольника $MN = a/2 + b/2$. Но тогда получается, что $MK + KN = MN$. То есть в треугольнике *MKN* одна сторона равна сумме двух других. Но ведь по известному неравенству треугольника такого не может быть! Значит, треугольника *MKN* не существует.



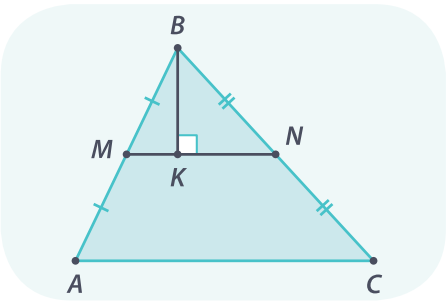
Догадываетесь, что из этого следует? Правильно: точки *M*, *K* и *N* лежат на одной прямой. Именно в этом случае выполняется равенство $MK + KN = MN$. Помните, что прямая BC была параллельна прямой *MK*, а прямая *AD* параллельна прямой *KN* ? Поскольку отрезки *MK* и *KN* лежат на одной прямой, то стороны *BC* и *AD* должны быть параллельны этой прямой, значит, они параллельны друг другу.

Итак, мы доказали, что стороны *BC* и *AD* четырёхугольника параллельны, то есть он может быть трапецией или параллелограммом.

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 3 ★★☆

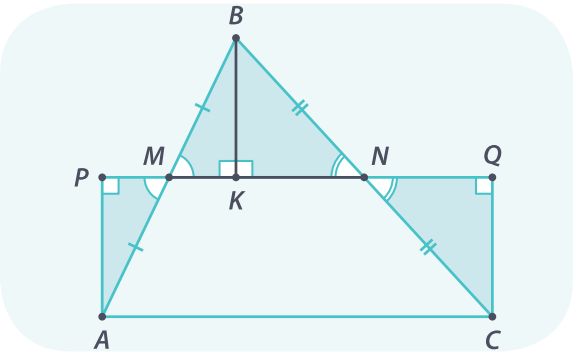
Разрежьте произвольный треугольник на три части, из которых можно сложить прямоугольник.



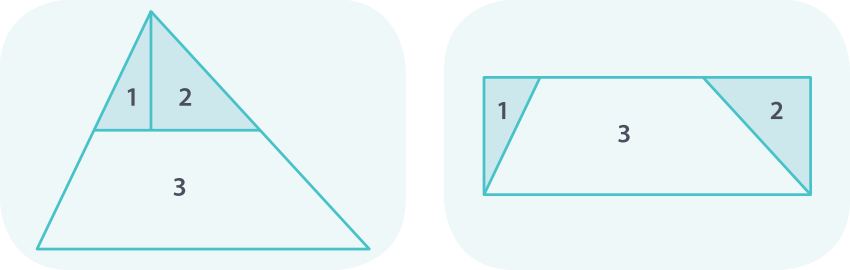
РЕШЕНИЕ: Эту задачу можно решить многими способами. Разберём один из них. Пусть нам необходимо разрезать треугольник *ABC* на 3 части, а потом из этих частей сложить прямоугольник.

Вначале давайте выберем наибольшую сторону *AC* треугольника и проведём его среднюю линию *MN*, которая параллельна этой стороне.

Помните, что расстояния от всех вершин треугольника до прямой MN одинаковы? Давайте опустим перпендикуляры *AP*, *BK* и *CQ* из вершин нашего треугольника на прямую *MN*. Легко видеть, что тогда треугольник *APM* окажется равен треугольнику *BKM*, а треугольник *CQN* равен *BKN*. Но самое главное – четырёхугольник *APQC* будет прямоугольником, ведь прямые *MN* и *AC* параллельны.



Теперь уже ясно, на какие три части можно разрезать данный нам треугольник: это трапеция *AMNC* и прямоугольные треугольники *MBK* и *NBK*. Если отрезать эти треугольники и поставить их на место равных треугольников *APM* и *CQN*, то получится прямоугольник *APQC*.

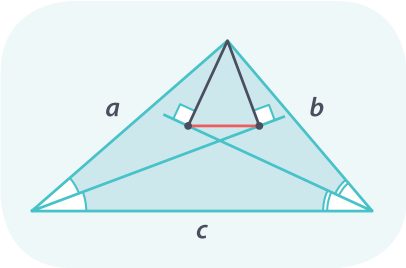


Что и требовалось получить.

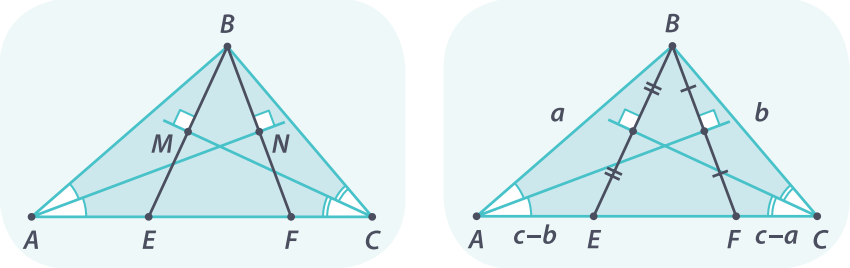
Замечание: Нам осталось ответить лишь на один вопрос: почему мы в решении провели среднюю линию треугольника *ABC*, параллельную его наибольшей стороне *AC*? Всё очень просто: нам нужно было, чтобы высота *BK* разделила треугольник *MBN* на два прямоугольных треугольника. Если какой-то из его углов при вершинах *M* или *N* оказался бы тупым, то высота *BK* упала бы на продолжение отрезка *MN* и мы не смогли бы разрезать по ней треугольник. В нашем случае этого не произойдёт, поскольку *AC* наибольшая сторона в треугольнике. Ведь по теореме против неё в треугольнике лежит его больший угол. Значит, углы при вершинах *M* и *N* будут меньше, и они обязательно будут острыми.

ПРИМЕР 4 ★ ★ ★

На биссектрисы двух углов треугольника из третьей его вершины опустили перпендикуляры. Найдите отрезок между основаниями этих перпендикуляров, если стороны треугольника равны *a*, *b* и *c*.



РЕШЕНИЕ: Пусть из вершины *B* треугольника *ABC* на биссектрисы его углов *A* и *C* опустили перпендикуляры *BM* и *BN*. Нам необходимо выразить отрезок *MN* через длины сторон треугольника. Сделаем дополнительное построение: продолжим эти два перпендикуляра до пересечения с основанием *AC* в точках *E* и *F* соответственно. Тогда в треугольниках *ABF* и *CBE* отрезки *AN* и *CM* будут биссектрисами и высотами. Значит, треугольники *ABF* и *CBE* будут равнобедренными по признаку. Следовательно, $AB = AF = a$, $CB = CE = b$. Кроме того, в равнобедренных треугольника отрезки *AN* и *CM* будут ещё и медианами, значит, точки *M* и *N* окажутся серединами сторон *BE* и *BF*. Но тогда отрезок будет средней линией треугольника *BEF*! Это значит, что он параллелен стороне *AC* нашего треугольника и равен половине отрезка *EF*.



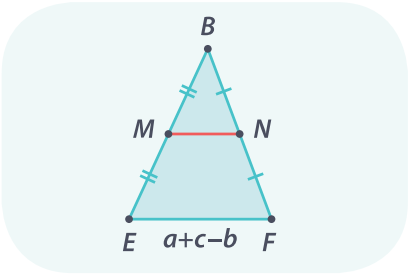
Давайте найдём длину отрезка EF.

Для этого представим $AE = AC - CE = c - b$ и $FC = AC - AF = c - a$. Следовательно,

$$EF = AC - AE - FC = c - (c - b) - (c - a) = c - c + b - c + a = a + b - c$$

Но тогда $MN = \frac{EF}{2} = \frac{(a + b - c)}{2}$

ОТВЕТ: $\frac{(a + b - c)}{2}$

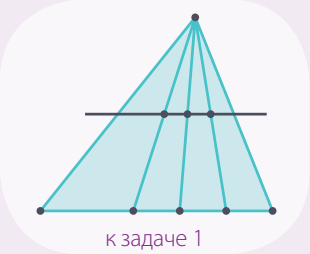


ВОПРОСЫ

1. Что называют средней линией треугольника?
2. Какое свойство средней линии треугольника вы знаете?
3. Что называют средней линией трапеции? Какое её свойство вы знаете?
4. Верно ли, что средняя линия треугольника лежит на прямой, равноудаленной от всех его вершин?
5. В чём заключается теорема Вариньона?
6. Что такое средняя линия четырёхугольника? Какое свойство средних линий четырёхугольника вам известно?
7. Какое свойство медиан треугольника вы знаете?

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

1 ★☆☆ Вершину треугольника соединяют с произвольной точкой на противоположной его стороне. Докажите, что середины всех полученных отрезков лежат на одной прямой.

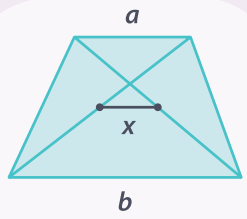


к задаче 1

2 ★☆☆ Средняя линия трапеции делится её диагоналями на три равные части. Найдите отношение оснований трапеции.

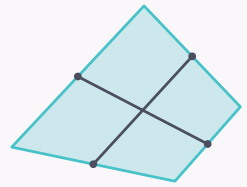
3 ★☆☆ Основание треугольника равно 1. Найдите отрезок, соединяющий середины его медиан, проведённых к боковым сторонам.

4 ★☆☆ Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, если её основания равны a и b.



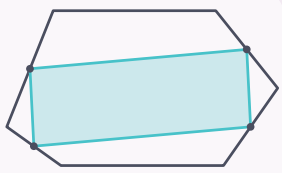
к задаче 4

5 ★☆☆ Известно, что средние линии четырёхугольника равны. Докажите, что его диагонали перпендикулярны.


к задаче 5

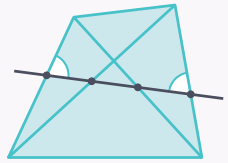
6 ★☆☆ Докажите, что средние линии четырёхугольника и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке.

7 ★☆☆ Две противоположные стороны шестиугольника параллельны и равны. Докажите, что середины четырёх остальных его сторон образуют параллелограмм.

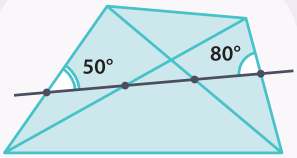

к задаче 7

8 ★☆☆ Докажите, что биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на её средней линии.

9 ★★☆ Противоположные стороны четырёхугольника равны. Докажите, что прямая, проходящая через середины его диагоналей, образует с этими сторонами равные углы.

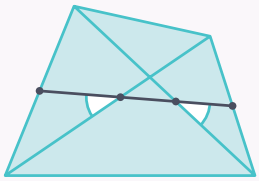

к задаче 9

10 ★★☆ Прямая, проходящая через середины диагоналей четырёхугольника, образует с его сторонами углы 50° и 80°. Докажите, что расстояние между серединами диагоналей равно половине стороны четырёхугольника.



к задаче 10

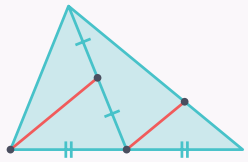
11 ★★☆ Средняя линия четырёхугольника образует с его диагоналями равные углы. Докажите, что диагонали этого четырёхугольника равны.


к задаче 11

12 ★★☆ Диагонали четырёхугольника равны, а одна из его средних линий в два раза их меньше. Найдите угол между диагоналями.

13 ★★☆ Вершину треугольника соединили с точкой, делящей его основание в отношении 2:1. Докажите, что получившийся отрезок разбивает данный треугольник на два треугольника, у которых есть по равной медиане.

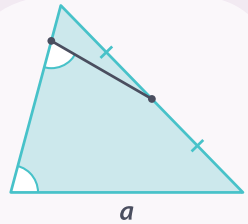
14 ★★☆ Вершину треугольника соединили отрезком с серединой его медианы. Второй отрезок проходит через основание медианы и параллелен первому. Найдите отношение этих отрезков на чертеже.



к задаче 14

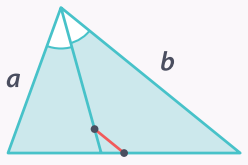
15 ★★☆ Докажите, что середины всех сторон треугольника и основание любой его высоты образуют равнобокую трапецию.

16 ★★☆ Основание треугольника равно a. Середину его боковой стороны соединили с точкой на другой стороне так, что отмеченные на рисунке углы равны. Найдите длину полученного отрезка.



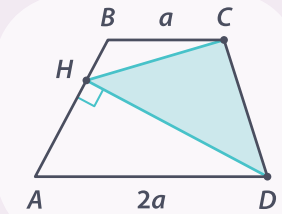
к задаче 16

17 ★★☆ Боковые стороны треугольника равны a и b. Через середину его основания проводят прямую, параллельную большей из них. Найдите расстояние от указанной точки до пересечения с биссектрисой, проведённой к основанию треугольника.



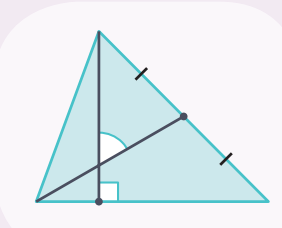
к задаче 17

18 ★★☆ В трапеции ABCD основание AD в два раза больше основания BC. Из вершины D на сторону опустили перпендикуляр DH. Докажите, что треугольник CHD равнобедренный.



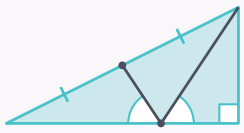
к задаче 18

19 ★★☆ В треугольнике медиана равна высоте, проведённой к другой его стороне. Найдите угол между ними.

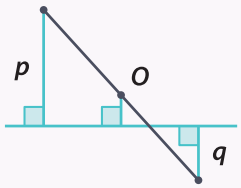


к задаче 19

20 ★★☆ Точку на катете прямоугольного треугольника соединили с одной его вершиной и серединой гипотенузы. При этом оказалось, что отмеченные на рисунке углы равны. В каком отношении данная точка делит катет?



к задаче 20



к задаче 21

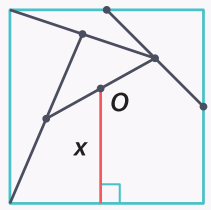
21 ★★☆ Расстояния от двух точек до некоторой прямой равны p и q. Найдите расстояние от середины соединяющего их отрезка до этой прямой, если точки находятся:

а) по одну сторону от прямой;

б) по разные стороны от прямой.

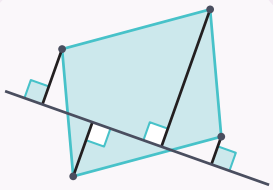
22 ★★☆ Разрежьте квадрат на три части так, чтобы из них можно было сложить треугольник без равных сторон и прямых углов.

23 ★★☆ Сторона квадрата равна 1. Каждая из отмеченных точек на рисунке является серединой своего отрезка. Найдите расстояние от точки O до стороны квадрата.



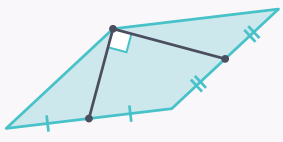
к задаче 23

24 ★★☆ Прямая пересекает две соседние стороны параллелограмма. На неё из всех его вершин опущены перпендикуляры. Докажите, что один из них равен сумме трёх других.


к задаче 24

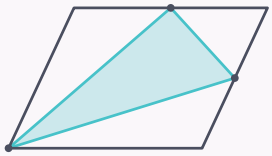
25 ★★☆ На двух сторонах треугольника вовне его построили квадраты. Докажите, что их центры равноудалены от середины третьей его стороны.

26 ★★☆ Два отрезка, соединяющих вершину параллелограмма с серединами его противоположных сторон, перпендикулярны. Найдите отношение диагоналей параллелограмма.

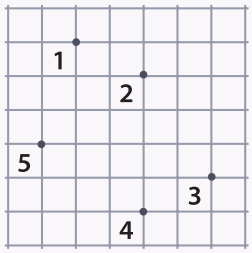

к задаче 26

27 ★☆☆ Постройте а) треугольник; б) параллелограмм, если заданы середины всех его сторон.

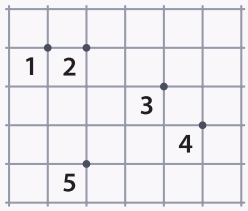
28 ★★☆ Постройте параллелограмм по одной вершине и серединам двух противоположных от неё сторон.


к задаче 28

29 ★★☆ На рисунках с клетчатой бумагой изображены по 5 точек, рядом с которыми стоят их номера. Постройте на этой бумаге два пятиугольника так, чтобы данные точки оказались в серединах сторон этих пятиугольников под теми же номерами.

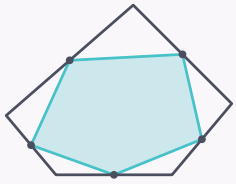


к задаче 28



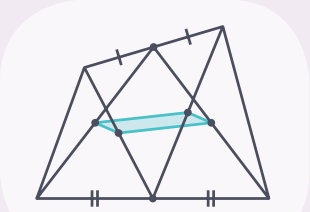
к задаче 28

30 ★★★ На доске нарисовали пятиугольник. Потом его стерли, но оставили середины всех сторон. Как по этим пяти точкам восстановить пятиугольник?


к задаче 29

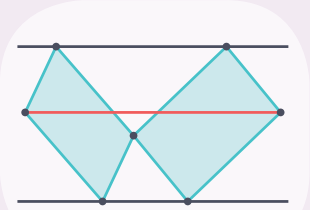
31 ★★★ Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, но для семиугольника.

32 ★★★ Середины двух противоположных сторон четырёхугольника соединили с его вершинами так, как показано на рисунке. Докажите, что середины полученных отрезков образуют параллелограмм.



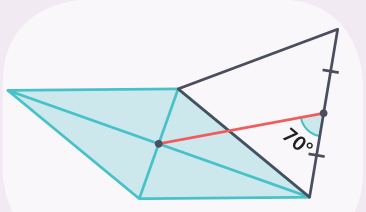
к задаче 32

33 ★★★ Два параллелограмма имеют общую вершину, а также по одной вершине на двух параллельных прямых. Докажите, что отрезок, соединяющий оставшиеся две вершины, параллелен данным прямым.



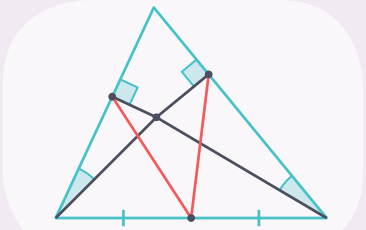
к задаче 33

34 ★★★ На стороне ромба построили равносторонний треугольник. Отрезок, который соединяет центр ромба с серединой стороны треугольника, образует с ней угол 70°. Найдите острый угол ромба.



к задаче 34

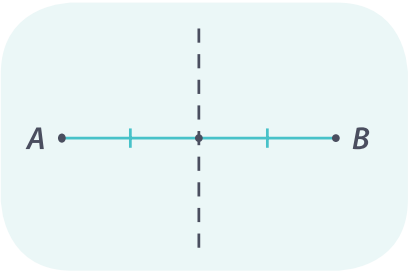
35 ★★★ В треугольнике взяли точку так, что отмеченные на рисунке углы равны. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на боковые стороны треугольника, равноудалены от середины основания.



к задаче 35

§ 6 ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

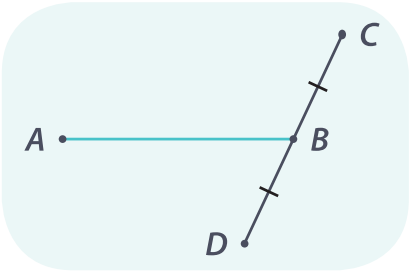
Как разделить отрезок на равные части?

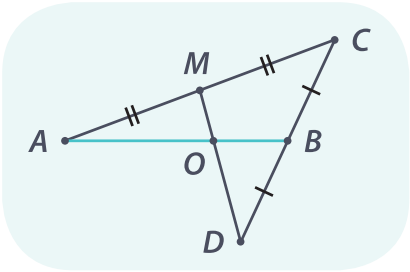


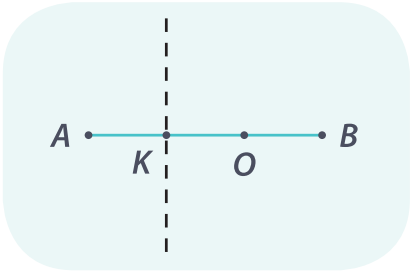
Вы наверняка помните, как циркулем и линейкой разделить данный отрезок пополам. Для этого достаточно построить к нему серединный перпендикуляр, то есть сделать одно из элементарных построений. Так же легко поделить отрезок и на четыре равные части. А знаете, как разделить его на три равные части?

Давайте подумаем: на прошлом уроке мы с вами проходили теорему о медианах треугольника. Помните, что они делят друг друга в отношении 2:1? Но тогда от концов каждой медианы до точки их пересечения должны быть треть и две трети её длины. Поэтому, если сделать данный нам отрезок медианой некоторого треугольника, а потом провести другие его медианы… Но давайте по порядку.

Пусть *AB* – данный нам отрезок. Проведём через точку *B* любую прямую и отложим на ней равные отрезки *BC* и *BD*. Потом строим середину отрезка *AC* – точку *M*. Теперь пересекаем отрезки *AB* и *DM* в точке *O*. Последним ходом строим середину отрезка *AO* – точку *K*. Тогда точки *O* и *K* делят отрезок *AB* на три равные части.







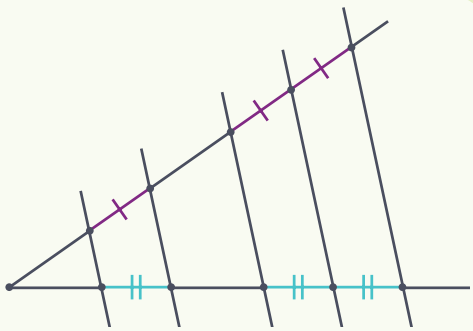
УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что описанное выше построение действительно приводит к делению данного отрезка *AB* на три равные части.

Данное построение годится для деления отрезка на три равные части. А что делать, если данный отрезок нужно разделить не на три, а на пять или даже семь равных частей? Здесь необходимо придумать что-то новое и желательно универсальное. Считается, что такой способ был предложен уже больше 2500 лет назад мудрецом Фалесом. Но перед тем как вы узнаете, в чём состоял этот способ, мы с вами познакомимся с теоремой, которая в российских учебниках по геометрии носит его же имя.

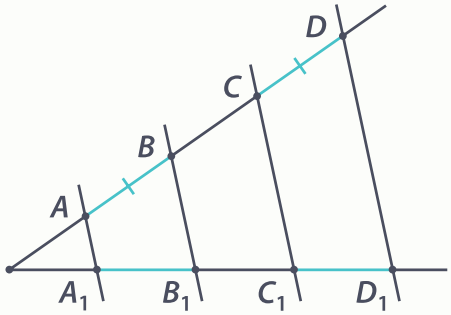
ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

Если параллельные прямые пересекают угол, и на одной его стороне между ними лежат равные отрезки, то соответствующие отрезки на другой стороне угла тоже будут равны.

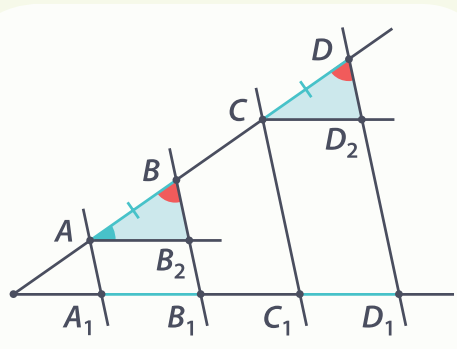


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

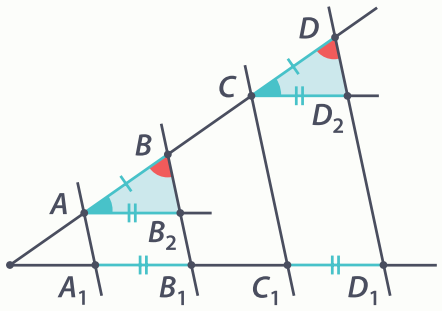
Давайте вначале докажем утверждение теоремы Фалеса для двух отрезков. Пусть параллельные прямые пересекают одну сторону угла в точках A, B, C *и* D, *а другую его сторону – в точках* A_1, B_1, C_1 *и* D_1 *соответственно (рис. 4). По условию на одной стороне угла между ними лежат равные отрезки* AB *и* CD. *Мы докажем, что и на другой стороне угла между этими прямыми тоже лежат равные отрезки* A_1B_1 *и* C_1D_1, *то есть покажем, что* $A_1B_1 = C_1D_1$.



Проведём через точки A *и* C *на одной стороне этого угла две прямые, параллельные другой его стороне. Пусть первая такая прямая пересекает отрезок* BB_1 *в точке* B_2, *а вторая – отрезок* DD_1 *в точке* D_2 *(рис. 5). Поскольку эти прямые параллельны, то углы* BAB_2 *и* DCD_2 *равны как соответственные при секущей* AD. *При той же секущей и параллельных прямых* BB_1 *и* DD_1 *возникает ещё одна пара равных соответственных углов с вершинами в точках* B *и* D. *Посмотрите теперь на треугольники* ABB_2 *и* CDD_2. *Они равны по второму признаку, поскольку* $AB = CD$ *и к этим сторонам в них прилегают по два равных угла. Значит, другие стороны этих треугольников тоже равны, поэтому имеем, что* $AB_2 = CD_2$.



Нам осталось уже немного. Посмотрите на четырёхугольники $AA_1B_1B_2$ и $CC_1D_1D_2$. Все их противоположные стороны лежат на параллельных прямых. Значит, они являются параллелограммами по определению. По свойству параллелограмма его противоположные стороны должны быть равны, поэтому $A_1B_1 = AB_2$ и $C_1D_1 = CD_2$. Но мы уже доказали, что $AB_2 = CD_2$. Следовательно, $A_1B_1 = C_1D_1$.



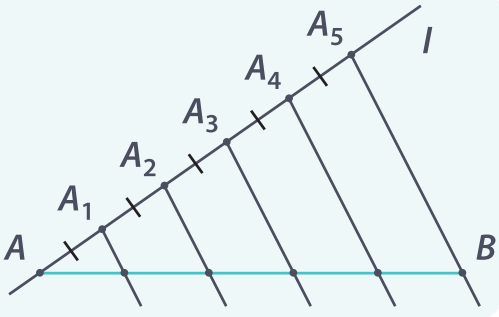
Таким образом, теорема Фалеса доказана для любых двух равных отрезков на сторонах угла. Отсюда сразу следует, что она должна быть верна и для любого числа равных отрезков. В самом деле, если на одной стороне угла лежит много таких отрезков, то все они равны одному из них. Обозначим этот выбранный отрезок как AB, а любой другой равный ему отрезок CD. По доказанному выше на другой стороне угла соответствующие им отрезки A_1B_1 и C_1D_1 тоже будут равны. Значит, любой отрезок C_1D_1 на другой стороне угла должен быть равен отрезку A_1B_1. Поэтому они все равны между собой.

Что и требовалось доказать.

Как же Фалес предполагал делить данный отрезок на любое число равных частей? Теперь догадаться до этого уже нетрудно. Для примера давайте покажем, как разделить данный отрезок на пять равных частей.

Деление отрезка на 5 равных частей.

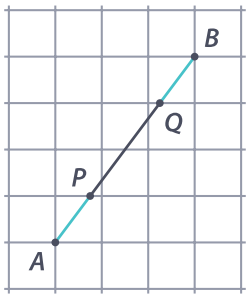
Возьмём любой отрезок AB и проведём через его конец A любую прямую l, которая не проходит через точку B. На этой прямой от точки A последовательно отложим 5 равных отрезков: $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$. Теперь через точку B и конец последнего отрезка проведём прямую BA_5. Нам останется параллельно этой прямой через точки A_1, A_2, A_3 и A_4 провести еще четыре прямые. Построить параллельную прямую через данную точку можно циркулем и линейкой – это одно из элементарных построений. Если проделать все эти построения, то вместе с прямой BA_5 мы получим пять параллельных прямых, которые на луче AA_5 высекают пять равных отрезков. По теореме Фалеса для угла BAA_5 эти прямые должны разделить данный нам отрезок AB тоже на пять равных частей. Ясно, что таким же методом легко разделить данный отрезок на любое число равных частей.

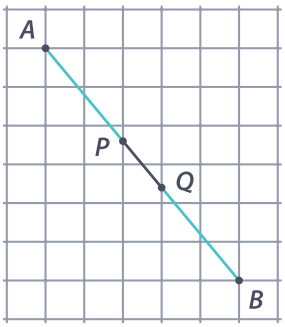


УПРАЖНЕНИЯ

2. Знаете, как без линейки или рулетки разделить карандаш на равные части? Для этого просто нужно положить его на лист тетради в линейку так, чтобы концы карандаша оказались на двух её линиях. На рисунке показано как этим способом делить карандаш на 5 равных частей. Как это связано с теоремой Фалеса? А теперь положите карандаш так, чтобы линии на бумаге разделили его на 7 равных частей.

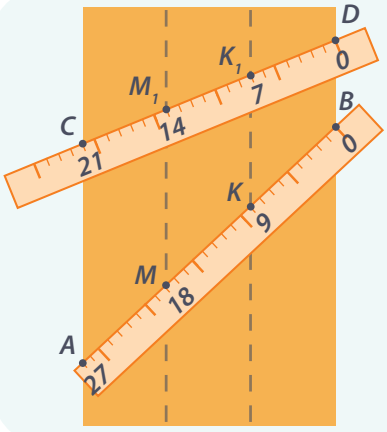
3. Точки A и B на клетчатой бумаге соединили отрезком так, как это показано на данных рисунках. Равны ли на них отрезки AP и BQ?





Часто для деления широкой доски на несколько узких досок одинаковой ширины плотники используют такой прием.

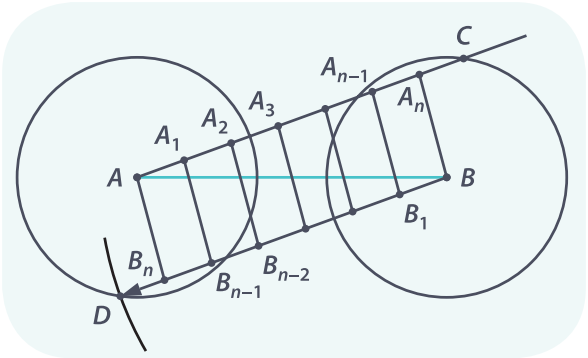
Пусть вам необходимо разрезать данную широкую доску на три равные узкие доски такой же длины. Тогда наискосок к доске прикладывают рулетку так, чтобы расстояние по ней между краями доски было любым числом сантиметров, которое нацело делится на 3. Например, на рисунке показано положение рулетки, когда расстояние AB равно 27 см. На отрезке AB карандашом отмечают точки M и K, которые делят отрезок AB на три равные части. Потом берут другое положение рулетки, когда расстояние CD между краями доски равно, например, 21 см. На этом отрезке отмечают такие же точки M_1 и K_1. Потом с помощью рулетки проводят прямые MM_1 и KK_1. По этим прямым и режут доску на нужные части.



УПРАЖНЕНИЯ

4. Объясните, как описанный выше метод связан с теоремой Фалеса.

Ещё один приём для деления отрезков небольшой длины на равные части показан на рисунке . Пусть требуется разделить данный отрезок AB на равные части. Вначале из точек A и B циркулем проводят две окружности одинакового радиуса. Потом из точки A проводят любую прямую, которая пересекает вторую окружность в точке C. На следующем шаге строят окружность с центром в точке B и радиусом, равным отрезку AC. Эту окружность пересекают с первой в точке D, которая лежит по другую сторону от прямой AB, чем точка C. Далее на луче AC циркулем откладывают нужное количество равных отрезков и получают точки $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Такие же отрезки откладывают от точки B на луче BD и получают на нём точки $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$. После чего по линейке соединяют точку A с точкой B_n, точку A_1 с точкой B_{n-1} и так далее. Тогда полученные прямые $AB_n, A_1B_{n-1}, A_2B_{n-2}, \ldots, A_nB$ делят отрезок AB на n равных частей.

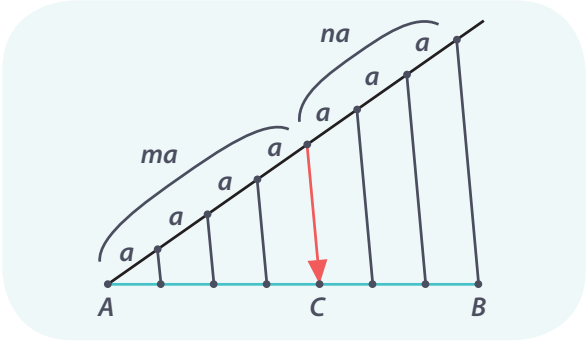


УПРАЖНЕНИЯ

5. Докажите, что описанный приём действительно приводит к делению отрезка AB на n равных частей. Как он связан с теоремой Фалеса?

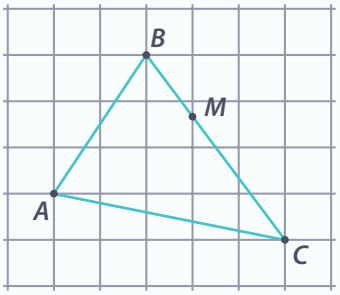
Как разделить отрезок на равные части?

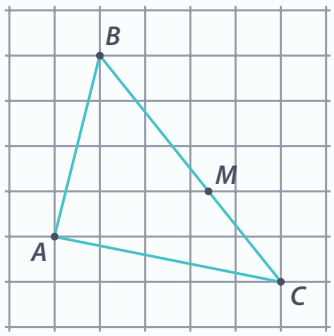
Как разделить данный отрезок в нужном отношении? То есть как разбить его на два меньших отрезка, длины которых относятся как нужные нам числа? Если эти числа целые, то такое построение всегда легко сделать по теореме Фалеса. Например, чтобы разделить данный отрезок AB в отношении $m : n$, нужно вначале разбить его на $m + n$ равных отрезков помощью теоремы Фалеса, а потом в качестве точки деления C просто взять конец отрезка с номером m.



УПРАЖНЕНИЯ

6. На клетчатой бумаге изображён треугольник ABC. В каком отношении его сторону BC делит точка M на рисунках?



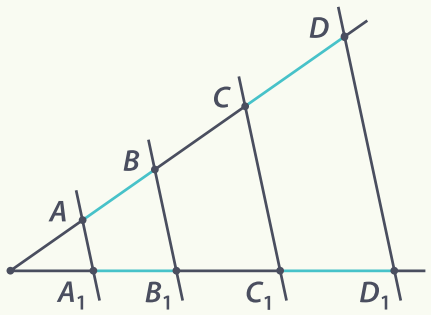


Можно ли разделить данный отрезок на две части, длины которых относятся между собой как два других произвольных отрезка? Оказывается, сделать так можно, но для этого применяют уже теорему о пропорциональных отрезках, которая является обобщением теоремы Фалеса. А что такое пропорциональные отрезки? Это отрезки, длины которых составляют одну пропорцию, то есть одинаково относятся между собой. Ведь любая пропорция – это всегда равенство двух отношений. В теореме Фалеса параллельные прямые на каждой стороне угла высекали равные между собой отрезки. Значит, и отношение длин этих отрезков на каждой его стороне было равно 1. В общем же случае отношение таких отрезков может быть любым положительным числом, но будет одинаковым для двух сторон угла. Именно в этом и заключается

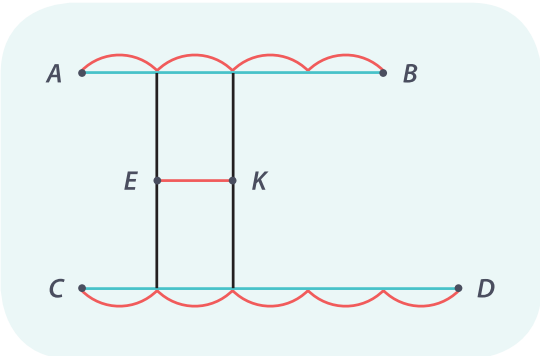
ТЕОРЕМА О ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ОТРЕЗКАХ

Если параллельные прямые пересекают угол, то отрезки между ними на каждой его стороне относятся одинаково.

$$AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1$$



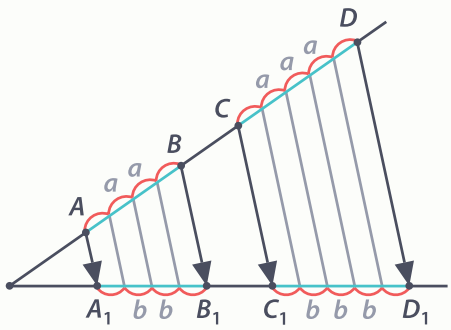
Мы проведём сейчас доказательство для случая, когда длины указанных отрезков на одной стороне угла относятся как два целых числа. Древние греки называли такие отрезки соизмеримыми. Это значило, что у них есть общая мера – некоторый третий отрезок, который можно целое число раз уложить и в первом, и во втором отрезках. Помните, что длину можно мерить в сантиметрах, а можно в дюймах или ладонях? По сути, любая единица длины и есть такой третий отрезок – эталон, по отношению к которому потом сравнивают все остальные отрезки. Для примера на рисунке показаны отрезки *AB* и *CD*, и третий отрезок *EK*, который можно четыре раза уложить в отрезке *AB* и пять раз в отрезке *CD*. То есть отрезки *AB* и *CD* соизмеримы по определению.



Ещё ученики Пифагора установили, что не любые два отрезка соизмеримы между собой. Например, не могут быть соизмеримы диагональ квадрата и его сторона. То есть у них нет общей меры. Тем не менее, теорема верна и для таких отрезков, но полное её доказательство вы можете прочитать лишь в конце этого параграфа.

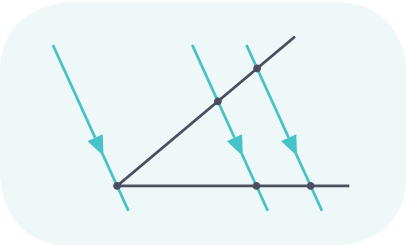
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (СЛУЧАЙ СОИЗМЕРИМЫХ ОТРЕЗКОВ)

Пусть параллельные прямые пересекают одну сторону угла в точках A, B, C *и* D, *а другую его сторону соответственно в точках* A_1, B_1, C_1 *и* D_1. *Мы с вами должны доказать, что* $AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1$. *Предположим, что отрезки* AB *и* CD *соизмеримы, то есть каждый из них состоит из целого числа одинаковых малых отрезков длины* a. *Тогда можно написать, что* $AB = ma$, $CD = na$, *откуда* $AB : CD = m : n$. *Давайте разобьём отрезки* AB *и* CD *на эти малые части и через каждую точку их деления проведём прямую параллельную* AA_1. *По теореме Фалеса все эти параллельные прямые разобьют отрезки* A_1B_1 *и* C_1D_1 *на другой стороне угла на такое же число одинаковых частей длины* b. *Поэтому должно быть* $A_1B_1 = mb$, $C_1D_1 = nb$. *Следовательно* $A_1B_1 : C_1D_1 = m : n = AB : CD$.



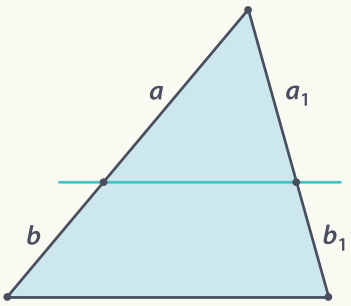
Что и требовалось доказать.

Замечание. Теорема о пропорциональных отрезках остаётся верной и в том случае, когда одна из параллельных прямых проходит через вершину угла. Этот случай показан на рисунке. Доказательство для него проводится точно так же. А само утверждение в этом случае можно сформулировать так:



ТЕОРЕМА О ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ОТРЕЗКАХ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Если прямая, параллельная основанию треугольника, пересекает его стороны, то она делит их в одном отношении.

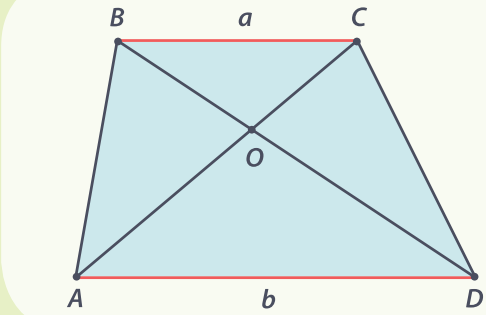


Теорема о пропорциональных отрезках имеет множество применений. В следующем параграфе мы получим из неё главный признак подобия треугольников. А пока докажем два утверждения, очень полезных для решения разных задач.

СВОЙСТВО ДИАГОНАЛЕЙ ТРАПЕЦИИ

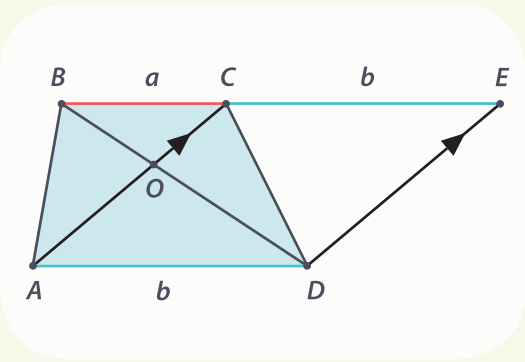
Диагонали трапеции делят друг друга на отрезки, пропорциональные её основаниям.

$$CO : AO = BO : DO = a : b$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Пусть диагонали трапеции **ABCD** пересекаются в точке **O**, а длины её оснований **BC** и **AD** равны **a** и **b**. Сделаем дополнительное построение: проведём через точку **D** прямую параллельно диагонали **AC** трапеции до пересечения с прямой **BC** в точке **E**. Тогда четырёхугольник **ACED** будет параллелограммом по определению. Значит, по свойству параллелограмма **CE = AD = b**. А теперь посмотрите на угол **EBD**. Параллельные прямые **AC** и **DE** пересекают его стороны и должны по теореме высекать на них пропорциональные отрезки. Поэтому **BO : OD = BC : CE = a : b**. Точно так же можно доказать, что тому же равно отношение отрезков и на другой диагонали трапеции.*



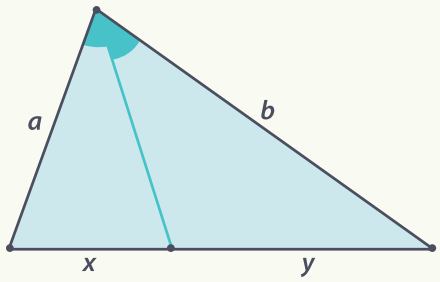
Что и требовалось доказать.

Ещё одно важное утверждение связано с биссектрисой треугольника. Оно тоже следует из теоремы о пропорциональных отрезках.

СВОЙСТВО БИССЕКТРИСЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим его сторонам.

$$x : y = a : b$$

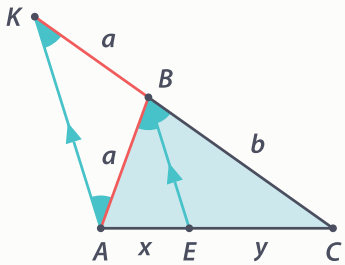


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Пусть длины сторон **AB** и **BC** треугольника **ABC** равны **a** и **b**, а его биссектриса **BE** делит сторону **AC** на отрезки **AE** и **CE** с длинами **x** и **y**. Мы докажем, что отрезки **AE** и **EC** пропорциональны сторонам треугольника, то есть что $x : y = a : b$.*

*Сделаем дополнительное построение: через точку **A** параллельно биссектрисе **BE** проведем прямую до пересечения с прямой **BC** в точке **K**. По свойству параллельных угол **KAB** будет равен углу **EB**, поскольку они накрест лежащие при секущей **AB**. Углы **AKB** и **BEC** равны как соответственные при тех же параллельных и секущей **BK**. Таким образом треугольник **ABK** имеет два равных угла при вершинах **A** и **K**, поэтому по признаку он равнобедренный. Значит, $BK = AB = a$. Посмотрите теперь на угол **ACK**. Его стороны пересекают параллельные прямые **BE** и **AK** и по теореме между ними на этих сторонах должны лежать пропорциональные отрезки. Значит, $x : y = AE : EC = KB : BC = a : b$.*

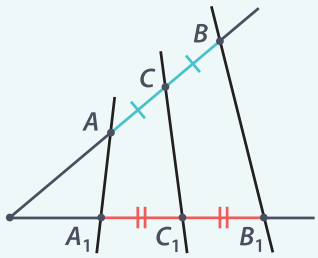
Что и требовалось доказать.



Обратная теорема

Как может звучать утверждение, обратное к теореме о пропорциональных отрезках? Вы уже знаете: чтобы его получить, нужно в теореме поменять местами её условие и заключение. Давайте попробуем это сделать. Тогда мы получим следующее утверждение:

Если несколько прямых пересекают угол и отрезки между ними на каждой его стороне относятся одинаково, то такие прямые должны быть параллельны.

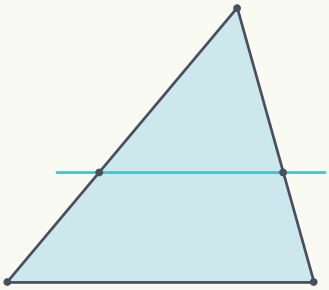


Верно ли такое утверждение? Оказывается, нет. В этом легко убедиться, если пересечь стороны угла двумя непараллельными прямыми AA_1 и BB_1, а потом через середины полученных отрезков AB и A_1B_1 провести прямую CC_1. Тогда три проведённые прямые не будут параллельны между собой, но отрезки между ними на каждой стороне угла будут относиться одинаково.

Получается, что в общем случае обратная теорема о пропорциональных отрезках неверна. Так же неверна в общем случае и теорема Фалеса. Но в некоторых частных случаях эти теоремы верны. Давайте разберём здесь эти случаи.

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

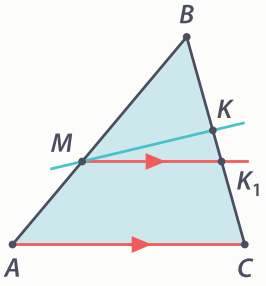
Если прямая делит две стороны треугольника в одном отношении, считая от их общей вершины, то эта прямая параллельна третьей стороне треугольника.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и K, причём делит их в одном отношении, считая от вершины B. То есть по условию известно, что $BM : AM = BK : CK$. Мы докажем, что прямая MK параллельна стороне AC треугольника.

Будем рассуждать от противоположного: пусть эта прямая не параллельна прямой AC.



*Давайте тогда через точку **M** параллельно стороне **AC** проведём другую прямую, которая пересечёт сторону **BC** в точке K_1. Поскольку прямые **MK** и **AC** параллельны, то по теореме о пропорциональных отрезках должно получиться: $BM : AM = BK_1 : K_1C$. Но по условию $BM : AM = BK : CK$. Значит, $BK : CK = BK_1 : K_1C$, и различные точки **K** и K_1 делят отрезок **BC** в одинаковом отношении. Но это невозможно, ведь числитель второй дроби больше числителя первой дроби, а знаменатель меньше. Таким образом, прямая **MK** должна быть параллельна стороне **AC** треугольника.*

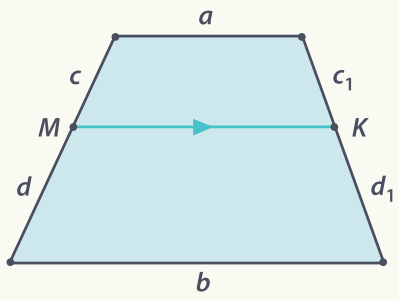
Что и требовалось доказать.

Похожее обратное утверждение верно и для трапеции.

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ТРАПЕЦИИ

Если прямая делит боковые стороны трапеции соответственно в одном отношении, то она параллельна основаниям трапеции.

Если $c : d = c_1 : d_1$,
то $MK \parallel a, b$



УПРАЖНЕНИЯ

7. Докажите последнее утверждение.

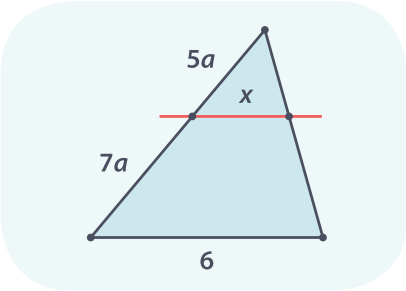
ВОПРОСЫ

1. Как разделить данный отрезок на три равные части? А на пять равных частей?
2. Что такое соизмеримые отрезки?
3. Почему любой отрезок, соединяющий узлы клетчатой сетки, делится её линиям на равные части?
4. В чём состоит теорема о пропорциональных отрезках? Для каких отрезков она верна?
5. Верна ли теорема, обратная к теореме Фалеса?
6. В чём заключается теорема о пропорциональных отрезках в треугольнике?
7. Каким свойством обладают диагонали трапеции?
8. В чём заключается свойство биссектрисы треугольника?
9. Как разделить прямую доску на три равные доски с той же длиной, если у вас есть только верёвка, карандаш и пила?
10. Какие утверждения могут быть обратными к теореме о пропорциональных отрезках? Верны ли эти утверждения?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

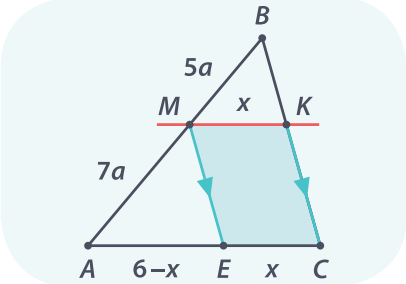
ПРИМЕР 1

Прямая, параллельная основанию треугольника делит две другие его стороны в отношении 5 : 7, считая от их общей вершины. Найдите отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, если его основание равно 6.



РЕШЕНИЕ: Пусть прямая параллельна основанию AC треугольника ABC пересекает его стороны AB и BC в точках M и K. По условию $BM : AM = 5 : 7$.

Сделаем дополнительное построение: через точку M параллельно стороне BC треугольника проведем прямую до пересечения с его основанием в точке E. Тогда четырёхугольник $MECK$ будет параллелограммом по определению. Значит, у него равны противоположные стороны, поэтому $EC = MK = x$. Следовательно $AE = 6 - x$. По теореме о пропорциональных отрезках для угла BAC должно быть $AE : CE = AM : BM$. Значит, мы имеем пропорцию $(6 - x) : x = 7 : 5$.

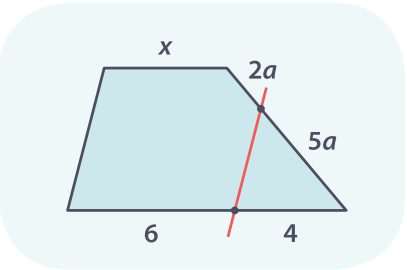


Откуда $12x = 30$. Следовательно $x = 2{,}5$.

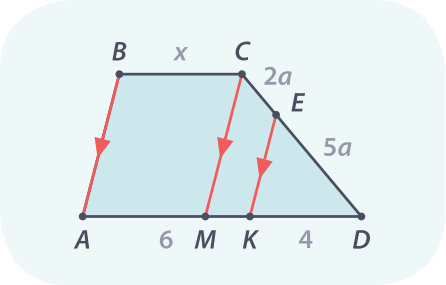
ОТВЕТ: 2,5

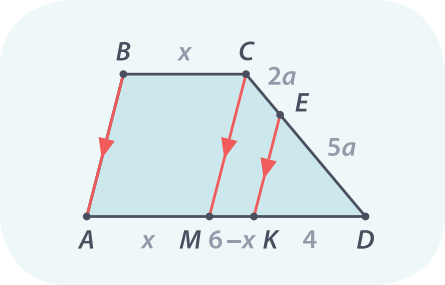
ПРИМЕР 2

Прямая, параллельная боковой стороне трапеции, делит одно её основание на отрезки с длинами 6 и 4, а другую боковую сторону в отношении 2 : 5 так, как это показано на рисунке. Найдите другое основание трапеции.



РЕШЕНИЕ: Обозначим основания трапеции как *AD* и *BC*, а точки пересечения данной прямой с основанием и боковой стороной *CD* как *K* и *E*. Неизвестное основание трапеции обозначим буквой *x*. Сделаем теперь дополнительное построение: через вершину *C* проведём прямую *CM*, параллельную боковой стороне *AB*. Четырёхугольник *ABCK* будет параллелограммом по определению, поэтому $AM = BC = x$. Тогда длина отрезка *MK* будет равна $6 - x$. По теореме о пропорциональных отрезках для угла *CDM* мы получаем пропорцию $(6 - x) : 4 = 2 : 5$. Откуда $x = 4,4$.





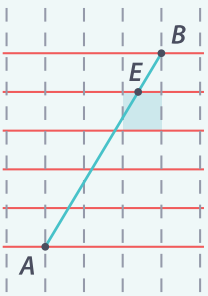
ОТВЕТ: 4,4

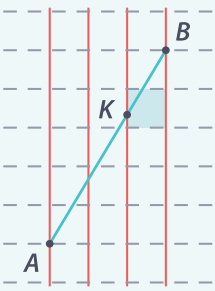
ПРИМЕР 3

Точки *A* и *B* соединили отрезком на клетчатой бумаге так, как это показано на рисунке. Какая часть отрезка *AB* попадает в закрашенную клетку?

РЕШЕНИЕ: Обозначим точки пересечения отрезка *AB* со сторонами закрашенной клетки как *K* и *E*. Рассмотрим сначала 6 горизонтальных прямых, на трёх из которых лежат точки *A*, *B* и *E*. По теореме Фалеса эти прямые делят отрезок *AB* на 5 равных частей. Значит, *BE* составляет пятую часть о всего отрезка *AB*. То есть $BE = AB : 5$.

Теперь рассмотрим четыре вертикальные прямые, на трёх из которых лежат точки *A*, *B* и *K*. По теореме Фалеса они разделят отрезок *AB* на три равные части. Поэтому *BK* составляет треть от всего отрезка *AB*. Значит, $BK = AB : 3$. Вычислим длину отрезка $KE : KE = BK - BE = AB/3 - AB/5 = 2/15\ AB$. Значит, он составляет 2/15 от отрезка *AB*.

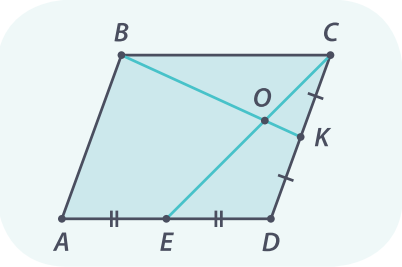




ОТВЕТ: в отмеченной клетке лежит 2 /15 отрезка AB

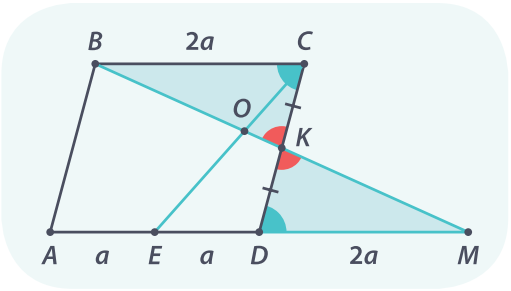
ПРИМЕР 4

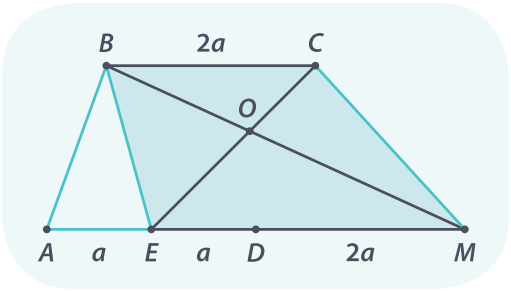
Точки E и K середины сторон AD и CD параллелограмма $ABCD$. Отрезки CE и BK пересекаются в точке O. Найдите отношение $CO : OE$.



РЕШЕНИЕ: Сделаем дополнительное построение: продолжим прямую BE до пересечения с прямой AD в точке M. Тогда мы получим треугольники BCK и EDM, которые будут равны по двум углам и стороне между ними. В самом деле, у них $CK = KD$, углы с вершинами C и D равны как накрест лежащие при параллельных, а углы с вершиной K вертикальные. Значит, равны их стороны DM и BC. Обозначим длину этих отрезков как $2a$. По свойству параллелограмма его сторона AD тоже равна $2a$. Значит, отрезок $ED = a$.

Рассмотрим теперь трапецию $EBCM$. Длины её оснований BC и EM равны $2a$ и $3a$, а диагонали пересекаются в точке O. По свойству диагоналей трапеции они делят друг на части, которые относятся между собой как основания трапеции. Поэтому $CO : EO = 2a : 3a = 2 : 3$.

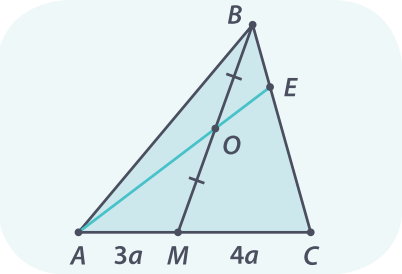




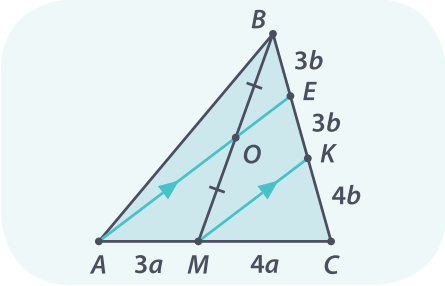
ОТВЕТ: **2 : 3**

ПРИМЕР 5

На стороне AC треугольника ABC взяли точку M так, что $AM : CM = 3 : 4$. Точка O – середина отрезка BM. В каком отношении прямая AO делит сторону BC треугольника?



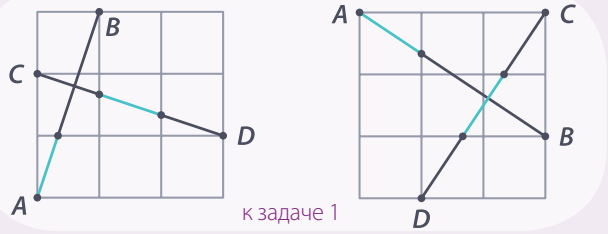
РЕШЕНИЕ: Обозначим точку пересечения прямой AO и BC буквой E. Сделаем дополнительное построение: через точку M параллельно прямой AO проведём прямую до пересечения со стороной BC в точке K. Применим теперь теорему о пропорциональных отрезках для угла ACB. Тогда получим, что $EK : CK = AM : CM = 3 : 4$. Следовательно длины отрезков EK и CK можно обозначить как $3b$ и $4b$. А теперь мы применим теорему о пропорциональных отрезках для угла MBC. Тогда $BE : EK = BO : OM = 1$. Значит, $BE = EK = 3b$. Откуда получаем, что $BE : EC = 3b : 7b = 3 : 7$.



ОТВЕТ: **3 : 7**

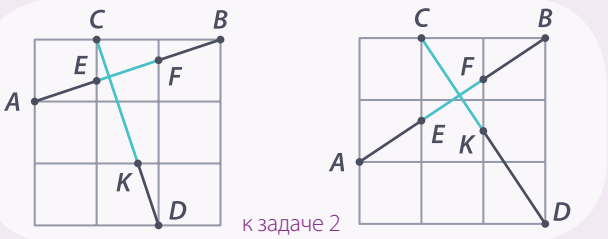
РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

1 ★☆☆ В квадрате 3×3 клетки провели отрезки AB и CD так, как это показано на рисунках. Докажите, что выделенные части этих отрезков равны.



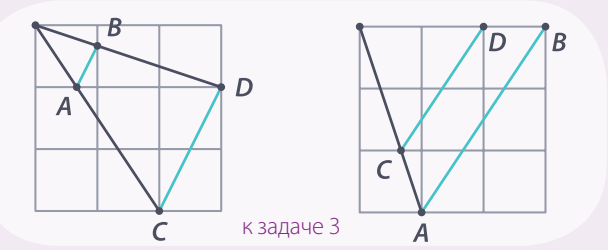
к задаче 1

2 ★☆☆ В квадрате 3×3 клетки провели отрезки AB и CD так, как это показано на рисунках. Найдите отношение отрезков EF и CK.



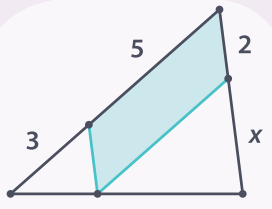
к задаче 2

3 ★☆☆ Докажите, что прямые AB и CD на клетчатой бумаге параллельны.



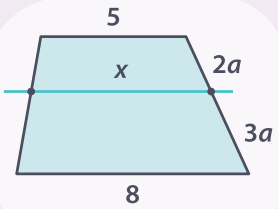
к задаче 3

4 ★☆☆ В треугольник вписали параллелограмм. Две вершины параллелограмма делят стороны треугольника на четыре отрезка, три из которых имеют длины 3, 5 и 2. Найдите длину четвёртого отрезка.



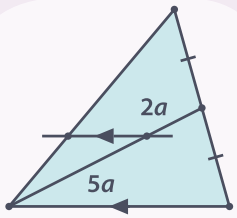
к задаче 4

5 ★☆☆ Прямая параллельная основаниям трапеции, делит её боковые стороны в отношении 2 : 3, считая от меньшего основания. Найдите длину отрезка этой прямой внутри трапеции, если длины её оснований равны 5 и 8.



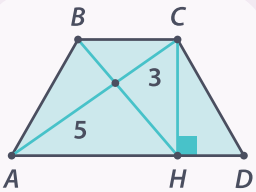
к задаче 5

6 ★☆☆ Прямая, параллельная одной стороне треугольника, делит его медиану, проведённую к другой стороне, в отношении 5 : 2 от вершины. В каком отношении эта прямая делит третью сторону треугольника?



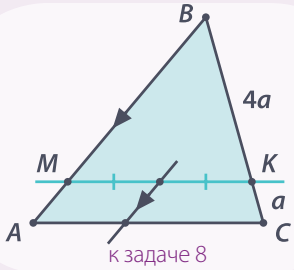
к задаче 6

7 ★☆☆ Отрезок CH – высота равнобокой трапеции ABCD. Прямая BH делит её диагональ AC на отрезки с длинами 3 и 5. Найдите отношение оснований трапеции.



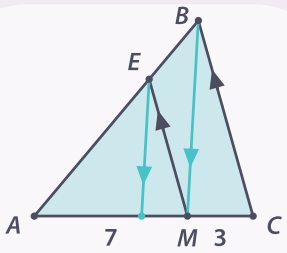
к задаче 7

8 ★☆☆ Прямая, параллельная одной стороне AC треугольника ABC, пересекает его стороны AB и BC в точках M и K. Через середину отрезка MK параллельно стороне AB провели вторую прямую. В каком отношении она делит сторону AC, если BK : CK = 4 : 1 ?



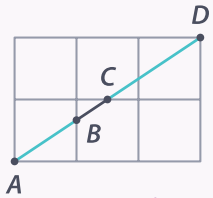
к задаче 8

9 ★☆☆ Точка M делит сторону AC треугольника ABC на отрезки AM и CM с длинами 7 и 3. Через точку M параллельно стороне BC провели прямую, которая пересекла сторону AB треугольника в точке E. Через эту точку параллельно прямой BM провели вторую прямую. В каком отношении она делит сторону AC?

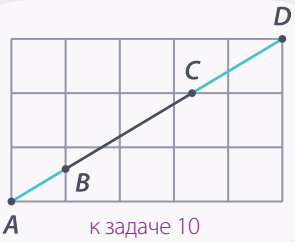


к задаче 9

10 ★★☆ Найдите отношение отрезков AB и CD на рисунках.

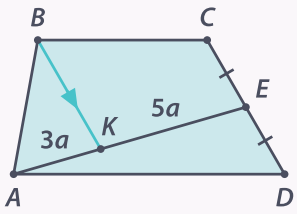


к задаче 10



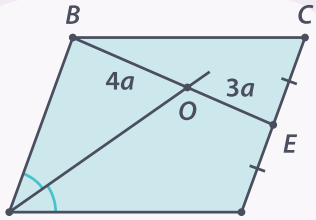
к задаче 10

11 ★★☆ Точка E – середина боковой стороны CD трапеции ABCD. Параллельно этой стороне через вершину B провели прямую, которая пересекла отрезок AE в точке K. Найдите отношение оснований трапеции, если AK : EK = 3 : 5.



к задаче 11

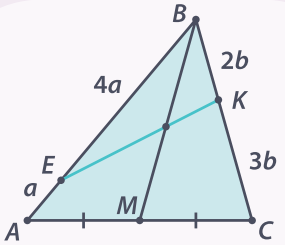
12 ★★☆ Точка E – середина стороны CD параллелограмма ABCD. Биссектриса угла BAD параллелограмма пересекает отрезок BE в точке O Найдите отношение сторон параллелограмма, если BO : OE = 4 : 3.



к задаче 12

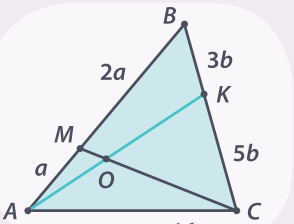
13 ★★☆ На стороне AC треугольника ABC взяли точку M так, что AM : CM = 2 : 3. На отрезке BM взяли точку K так, что BK : MK = 3 : 4. В каком отношении прямая AK делит сторону BC треугольника?

14 ★★☆ На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли такие точки E и K, что AE : BE = 1 : 4, BK : CK = 2 : 3. В каком отношении медиана BM треугольника ABC делит отрезок EK?



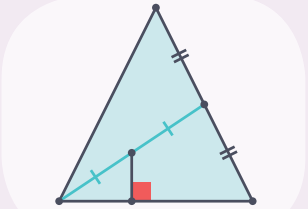
к задаче 14

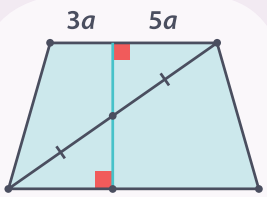
15 ★★☆ На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли точки M и K так, что AM : BM = 1 : 2, BK : CK = 3 : 5. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O. Найдите AO : KO.



к задаче 16

16 ★★☆ К боковой стороне равнобедренного треугольника ABC провели медиану AM. Из середины этой медианы на основание AC треугольника опустили перпендикуляр. В каком отношении этот перпендикуляр делит основание?

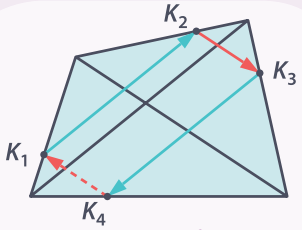

к задаче 16



к задаче 17

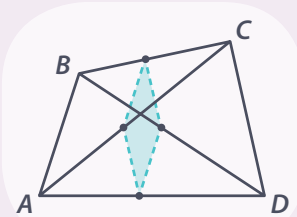
17 ★★☆ Высота равнобокой трапеции делит её диагональ пополам, а меньшее основание в отношении 3 : 5. В каком отношении эта высота делит большее основание трапеции?

18 ★★☆ На стороне четырёхугольника ABCD взяли произвольную точку K_1. Из этой точки параллельно одной из его диагоналей провели прямую до пересечения с другой стороной четырёхугольника в точке K_2. С точкой K_2 поступили так же и получили точку K_3. Потом аналогично получили точку K_4. и так далее. Докажите, что траектория $K_1 K_2 K_3 K_4$ … обязательно замкнётся.



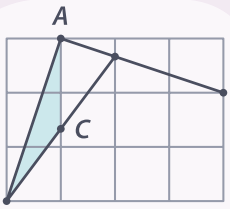
к задаче 18

19 ★★☆ На двух противоположных сторонах четырёхугольника ABCD и на его диагоналях взяли по одной точке так, что эти точки делят их в одинаковом отношении, считая от вершин A и B. Докажите, что эти точки образуют параллелограмм (либо лежат на одной прямой).

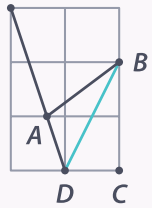


к задаче 19

20 ★★★ Докажите, что треугольник ABC на чертеже равнобедренный.



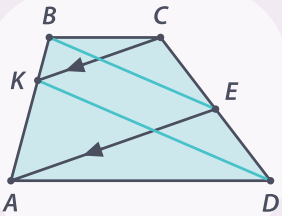
к задаче 20



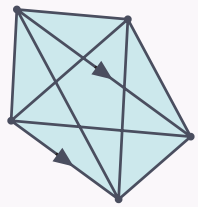
к задаче 21

21 ★★★ Докажите, что BD – биссектриса угла ABC на чертеже с клетчатой бумагой.

22 ★★★ На боковых сторонах AB и CD трапеции ABCD взяли точки K и E так, что прямые AE и CK параллельны. Докажите, что прямые BE и DK тоже параллельны.



к задаче 22


к задаче 23

23 ★★★ Каждая диагональ пятиугольника параллельна одной из его сторон.

а) Докажите, что отношение длин сторон и параллельных им диагоналей одинаково для всего пятиугольника.

б) Найдите это отношение.

ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Как доказать теорему о пропорциональных отрезках в общем случае, то есть даже для двух отрезков, которые не имеют общей меры? Ведь таких отрезков много в самых распространенных геометрических фигурах. Например, диагональ квадрата не имеет общей меры с его стороной, также несоизмеримы высота и сторона правильного треугольника. Мы сведём общий случай этой теоремы к уже доказанному нами частному случаю, когда длины двух отрезков относятся как целые числа. Правда, нам придётся с вами взять на веру одно очевидное утверждение. Знаете, какое?

Аксиома Евдокса–Архимеда

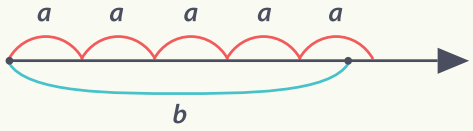
Мы начнём издалека. Если из крана капает вода и вы подставите под него кружку, то через некоторое время эта кружка переполнится. То же самое будет с пустой кастрюлей и даже огромной цистерной. Можно сказать и по-другому. Если от самой длинной верёвки каждую минуту отрезать по одному сантиметру, то рано или поздно эта верёвка закончится. Даже если отрезать по одному миллиметру, всё равно верёвки не хватит на все времена. Это очевидно любому человеку.

А на геометрическом языке впервые данное утверждение было сформулировано греческим математиком Евдоксом в IV веке до н. э. и звучало оно так: «Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга». Что мог иметь в виду Евдокс, говоря это? На самом деле – то же самое. Две величины у него – это два любых отрезка a и b. Если взять больший из двух отрезков b и начать последовательно откладывать на нём меньший отрезок a, то на каком-то шаге получишь больше, чем b. То есть рано или поздно будет такой номер n, что $na > b$. Евдокс не стал это доказывать и взял как аксиому. Позже данной аксиомой много раз пользовался Архимед, поэтому её часто называют аксиомой Архимеда.

АКСИОМА ЕВДОКСА

Для любых двух отрезков с длинами a и b существует такое натуральное число n, что $na > b$.

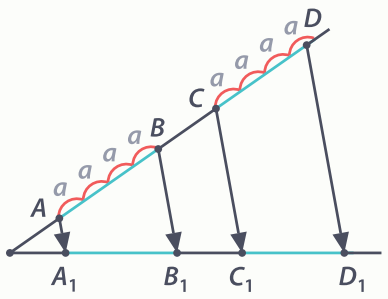
$$na > b$$



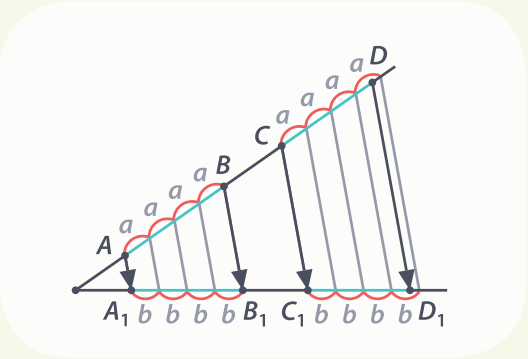
Теперь мы с вами готовы к доказательству общего случая теоремы о пропорциональных отрезках.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

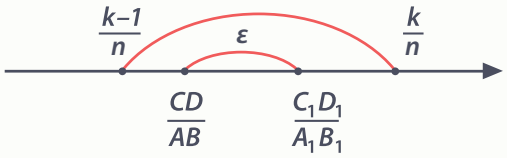
Пусть параллельные прямые пересекают одну сторону угла в точках A, B, C и D, а другую его сторону соответственно в точках A_1, B_1, C_1 и D_1. Мы с вами докажем, что в общем случае отрезки на сторонах угла будут пропорциональны друг другу. То есть докажем, что должно выполняться равенство $AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1$.



*Вначале давайте разобьём первый отрезок **AB** на **n** равных частей, длина которых равна **a**. Понятно, что тогда должно быть **AB = na**. А теперь мы будем последовательно откладывать отрезки с той же длиной **a** на втором отрезке **CD**. Так мы с шагом **a** начнём постепенно двигаться от точки **C** к точке **D**. По аксиоме Евдокса в некоторый момент мы должны «перешагнуть» через точку **D**. Пусть это случится на шаге с номером **k**. Тогда очевидно должно выполняться такое неравенство: **(k - 1) a < CD < ka**.*



*Но мы с вами пока говорили только про одну сторону нашего угла. А что же будет на другой его стороне? Давайте через все точки деления отрезков **AB** и **CD** на части проведём прямые, параллельные прямым AA_1, BB_1 и т.д. На одной стороне угла между этими прямыми лежат равные отрезки длины **a**. Значит, по теореме Фалеса на другой его стороне между этими прямыми будут так же лежать равные отрезки с некоторой длиной **b**. Между точками A_1 и B_1 поместится ровно **n** таких отрезков, а между точками C_1 и D_1 целиком поместится **k – 1** отрезок и ещё один будет лежать в нём не полностью. Так будет потому, что каждому отрезку на первой стороне угла однозначно соответствует отрезок на другой его стороне. Значит, на второй стороне угла мы можем записать, что $A_1B_1 = nb$, $(k - 1)\,b < C_1D_1 < kb$.*



*Для отношения отрезков **CD** и **AB** на одной стороне угла можно записать неравенство:*

$$\frac{(k-1)a}{na} < \frac{CD}{AB} < \frac{ka}{na}.$$ *Его можно упростить так:* $$\frac{(k-1)}{n} < \frac{CD}{AB} < \frac{k}{n}$$

Отношение отрезков C_1D_1 и A_1B_1 на другой стороне угла подчиняется похожему неравенству:

$$\frac{(k-1)b}{nb} < \frac{C_1D_1}{A_1B_1} < \frac{kb}{nb}.$$ *Его мы упростим до того же вида:* $$\frac{(k-1)}{n} < \frac{C_1D_1}{A_1B_1} < \frac{k}{n}$$

Давайте теперь на числовую ось поставим числа $\frac{(k-1)}{n}$ *и* $\frac{k}{n}$. *По доказанным только что неравенствам где-то между этими числами на оси лежат дроби* $\frac{CD}{AB}$ *и* $\frac{C_1D_1}{A_1B_1}$.

Значит, расстояние между данными дробями должно быть меньше разности $\frac{k}{n} - \frac{(k-1)}{n} = \frac{1}{n}$.

*Давайте обозначим это расстояние греческой буквой **ε**.*

Мы с вами доказали, что $\varepsilon < \frac{1}{n}$. *Это значит, что* $\varepsilon n < 1$.

А теперь давайте подумаем: откуда мы взяли число n *? Правильно – мы разделили отрезок* AB *на* n *равных частей. Значит, целое число* n *в «наших руках» – мы можем взять его каким угодно. Но разве можно найти отрезок такой длины* ε*, что для всех чисел* n *будет верно* $\varepsilon n < 1$*? Этого не может быть по той же аксиоме Евдокса–Архимеда! Значит, такого отрезка нет.*

Но тогда числа $\frac{CD}{AB} < \frac{C_1D_1}{A_1B_1}$ *не могут различаться. То есть они должны быть равны.*

Значит $\frac{CD}{AB} = \frac{C_1D_1}{A_1B_1}$*, откуда сразу следует, что* $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$.

Что и требовалось доказать.

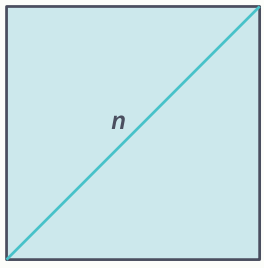
Несоизмеримые отрезки существуют

Теорема о пропорциональных отрезках нами доказана теперь в общем случае. Правда, доказательство её получилось довольно длинным и сложным. К тому же нам пришлось взять на веру еще одну аксиому… Может быть, мы старались зря и, подобно Дон Кихоту, сражались с ветряными мельницами? Вдруг на самом деле все отрезки в геометрии соизмеримы друг с другом? Так думал Пифагор и ученики его школы, пока один из них не обнаружил, что диагональ квадрата совершенно несоизмерима с его стороной! Он сообщил об этом другим ученикам и заплатил за это открытие своей жизнью… Легенда говорит о том, что того ученика сразу изгнали из школы, а его рассуждение долго держали в тайне. Вскоре он вообще погиб во время кораблекрушения – значит, сами боги покарали его за дерзость! Это вполне объяснимо: данное рассуждение подрывало всю философию пифагорейцев – ведь они наивно считали, что мир является гармонией и числом, а элементами всех вещей служат только целые числа.

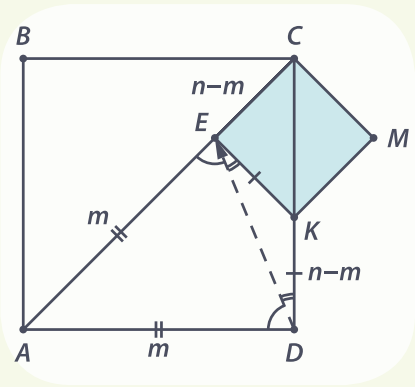
Итак, мы с вами сейчас, как пифагорейцы, докажем, что диагональ квадрата и его сторона несоизмеримы друг с другом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

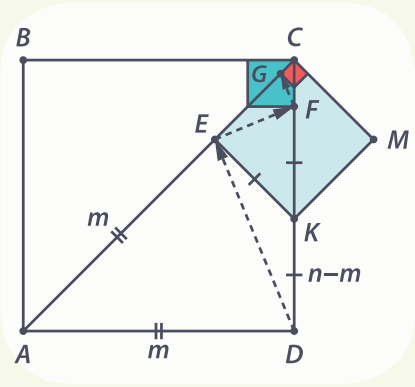
Предположим, что у них всё же есть какая-то общая мера, то есть существует такой отрезок, который ровно m *раз умещается на стороне квадрата и* n *раз на его диагонали. Примем этот отрезок за единицу длины и будем все считать в этих единицах. Тогда сторона квадрата в них будет равна* m*, а его диагональ –* n*. Отложим теперь сторону квадрата на его диагонали. На рисунке показано, как на диагонали* AC *квадрата* $ABCD$ *отложен отрезок* AE*, равный стороне квадрата. Диагональ квадрата больше его стороны, поскольку в треугольнике* ACD *гипотенуза больше катета. Остаток* CE *диагонали будет составлять* $n - m$ *единиц, значит, его длина в нашей системе тоже будет выражаться целым числом.*



*Построим теперь на отрезке **CE** меньший квадрат **CEKM**. Его вершина **K** окажется на стороне **CD** первого квадрата, поскольку в любом квадрате диагональ образует со стороной угол **45°**. Треугольник **AED** равнобедренный, значит его углы при вершинах **E** и **D** равны – давайте обозначим их величину буквой **α**. Отсюда следует, что углы **KED** и **KDE** равны **90° – α**. Тогда треугольник **EKD** также будет равнобедренным по признаку, следовательно, отрезок **KD** будет равен стороне квадрата **EK** и его длина тоже будет составлять целое число **n – m** единиц.*



*А теперь, как говорят математики, давайте запустим процесс «бесконечного спуска». Сделаем ту же самую операцию с меньшим квадратом: отложим на его диагонали **CK** отрезок **KF**, равный стороне этого квадрата. Тогда остаток **CF** этой диагонали снова будет состоять из целого числа единиц длины. Ведь и диагональ и сторона этого квадрата были целыми числами.*



*Потом на отрезке **CF** построим третий квадрат, снова отложим на его диагонали сторону, построим на полученном остатке этой диагонали четвёртый квадрат, с ним сделаем то же самое, и так далее. Процесс этот будет бесконечным, ведь на диагонали любого квадрата всегда можно отложить его сторону. Но вот что удивительно: стороны всех построенных нами квадратов будут целыми числами! Может ли такое быть?*

*Посмотрите на сторону **CD** самого первого квадрата: она состояла из m единичных отрезков, и сначала от неё мы отрезали сторону второго квадрата, потом сторону третьего, четвёртого и так до бесконечности… А ведь стороны всех этих квадратов тоже состояли из целого числа единиц. Значит, каждая из них была больше или равна **1**. Но нет такого отрезка, от которого можно сколько угодно раз вычитать единицу: рано или поздно от него ничего не останется, и вычитать будет уже нечего.*

Мы с вами сейчас получили явное противоречие со здравым смыслом, а более точно – с аксиомой Евдокса. А ведь все наши рассуждения, как и 2500 лет назад, были логически безупречны, значит, ошибочным было само предположение о соизмеримости стороны квадрата и его диагонали. Таким образом, у них не может быть никакой общей меры.

Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

8. Каждая сторона пятиугольника параллельна одной из его диагоналей. Проведите для такого пятиугольника метод бесконечного спуска и докажите несоизмеримость его сторон и параллельных им диагоналей.

Неразумные числа

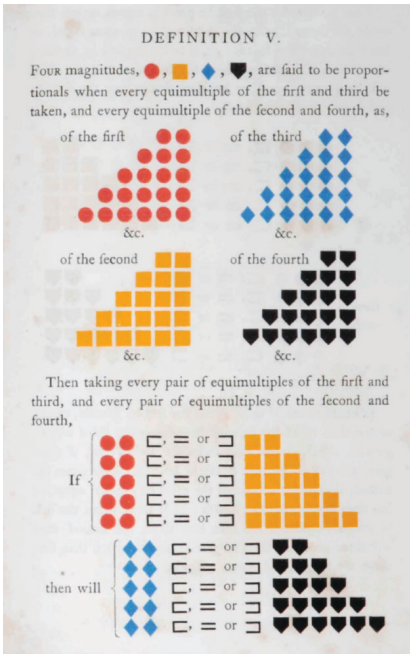
Несоизмеримые отрезки существуют, теперь это доказано. Открытие несоизмеримости стороны квадрата и его диагонали произвело в древнем мире эффект разорвавшейся бомбы: это было первое доказательство невозможности в математике. Кроме того, это был первый результат теории, который в принципе невозможно получить или проверить с помощью опыта. Потом уже числа, выражающие отношение таких несоизмеримых отрезков, назвали ***иррациональными***. Само слово «иррациональный» гораздо позже образовалось от латинского выражения ***irrationalis***, что означает «неразумный, непостижимый умом». Вот что писал о «неразумных» числах в своём диалоге «Законы» знаменитый греческий философ Платон: «Друг мой, Клиний, я и сам был поражён тем, что так поздно узнал то состояние, в котором мы находимся. Мне показалось, что это свойственно не человеку, а скорее каким-то свиньям. Я устыдился не только за себя, но и за всех эллинов».

Тем не менее, спустя некоторое время ученики Пифагора смирились с неизбежным и стали изучать «неразумные» числа. Вначале Феодор доказал, что стороны квадратов с площадью 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, … 15, 17 несоизмеримы с единицей. Но кроме этого он научил математике Архита и Платона. Архит жил в греческой колонии Тарент на юге Италии и был там очень влиятельным человеком. Достаточно сказать, что его семь раз избирали военачальником. Он имел золотые руки: позже Аристотель писал, что именно Архит придумал детскую погремушку и даже смастерил деревянного голубя, который сам мог летать. Но главное – Архит научился приближать «неразумные» числа с высокой точностью и разработал для этого метод музыкальных пропорций – среднего арифметического и среднего гармонического двух целых чисел. А еще Архит научил математике Евдокса.

Другой пифагореец Теэтет, который вместе с Платоном жил и работал в Академии недалеко от Афин, пошёл ещё дальше – он смог классифицировать «неразумные» числа. Им была создана античная теория пропорций, которая изложена в V книге «Начал» Евклида. Греческая теория пропорций послужила потом основой для создания современной теории действительных чисел.

Все вы сейчас знаете, что такое числовая ось. Можно на этой оси взять точку и получится действительное число. Ведь длина отрезка и положительное действительное число – это одно и то же. Более того, отношение любых двух отрезков – это тоже действительное число, и поэтому ему должна соответствовать точка на прямой. Греческим учёным до такого понимания чисел было ещё очень далеко.

Аксиома Евдокса–Архимеда относится даже не к геометрии, в первую очередь она нужна для построения теории действительных чисел. А что будет, если не брать её на веру? Такие попытки математиками уже совершались, и это привело к созданию теории так называемого ***нестандартного анализа***. В нём можно разделить число на 0 и получить бесконечно большое число, а можно разделить число на бесконечность и получить 0. Но это уже другая история.


DEFINITION V.

Four magnitudes, ●, ■, ◆, ▼, are faid to be proportionals when every equimultiple of the firft and third be taken, and every equimultiple of the fecond and fourth, as,

of the firft &cc. of the third &cc.

of the fecond &cc. of the fourth &cc.

Then taking every pair of equimultiples of the firft and third, and every pair of equimultiples of the fecond and fourth,

If ⊏, = or ⊐

then will ⊏, = or ⊐

Из V книги "Начал" Евклида,
The Elements of Euclid, London, 1842,
Warnock Library

§ 7 ПОДОБНЫЕ ФИГУРЫ

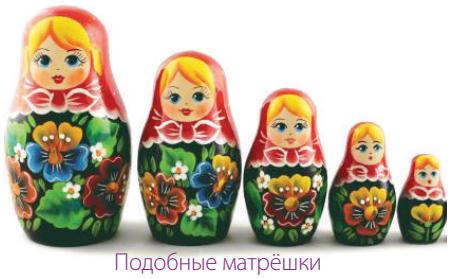
Подобные фигуры

Вы видели в магазине костюмы одного покроя или ботинки одной модели, размеры которых отличаются? Вот так, на бытовом уровне, все мы в жизни встречаемся с подобием геометрических фигур. Возьмите любой макет здания, модель самолёта или машины – это всегда уменьшенная копия реального объекта: она имеет маленький размер, но соотношение частей в ней такое же, как в оригинале. Значит, в подобных фигурах все их части должны быть пропорциональны, то есть они должны относиться друг к другу одинаково.

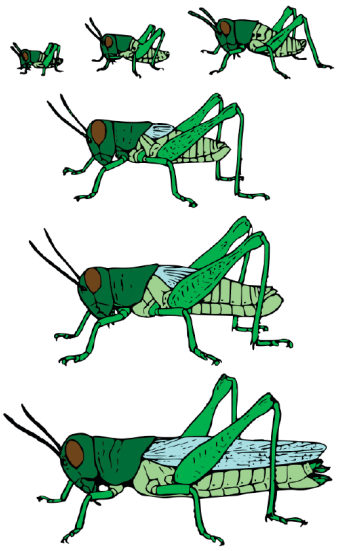
Макет Исаакиевского собора в Санкт-Петербурге

Подобие можно встретить даже в живой природе. Так в течение жизни сохраняют свою форму и лишь увеличиваются в размерах кузнечики, тараканы и многие насекомые после своего превращения.

Человеческий глаз сразу видит, что предметы имеют одинаковую форму, но ещё лучше мы замечаем отличия между ними: никто ведь не перепутает по форме скрипку и гитару, яблоко или ананас. Что уж говорить о более простых геометрических фигурах: квадратах, кругах или треугольниках. Интуиция помогает нам находить подобные фигуры среди других. Давайте попробуем сейчас это сделать для геометрических фигур на плоскости.



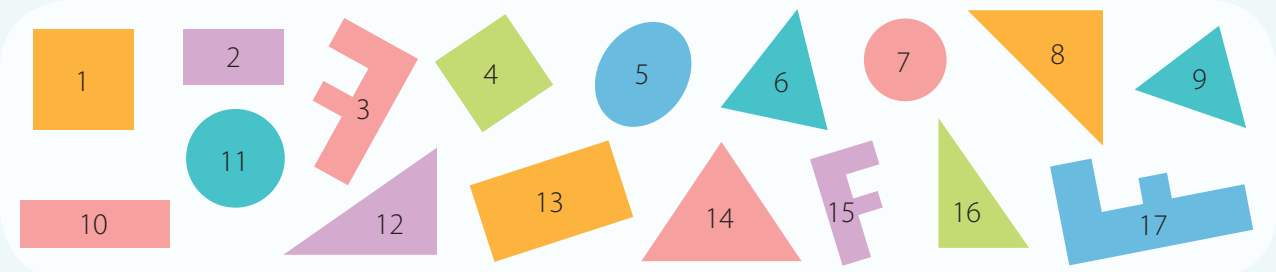
Подобные матрёшки



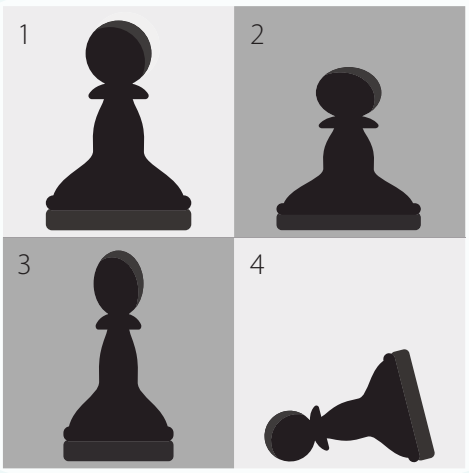
Стадии развития кузнечика

УПРАЖНЕНИЯ

1. На рисунке изображены геометрические фигуры, среди которых есть подобные между собой. Найдите как можно больше таких фигур. Запишите рядом номера этих фигур. Сколько всего вы нашли пар?



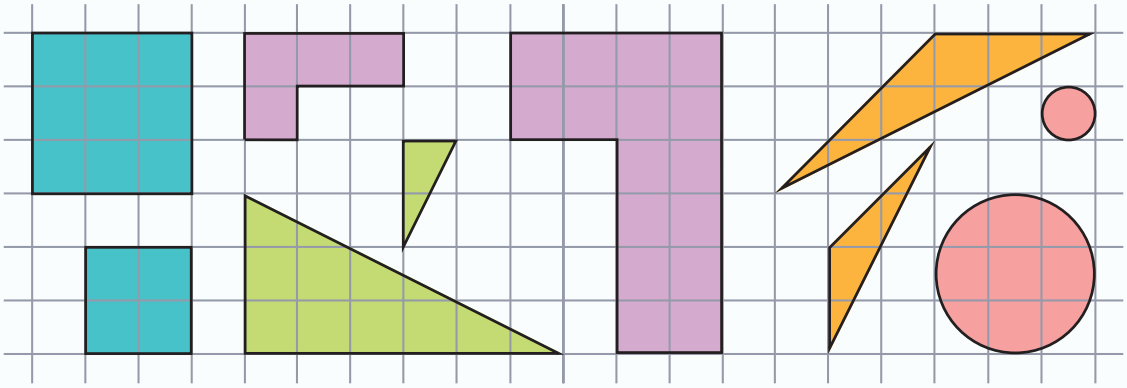
2. На рисунке показаны четыре шахматные фигуры. Некоторые из них подобны. Какие это фигуры?



3. В рамке слово «Подобие» написано четырьмя шрифтами и разными кеглями (размерами). Одинаковые буквы в одном шрифте, как правило, подобны между собой. Определите, под какими номерами эти слова написаны одним шрифтом.

1. Подобие
2. Подобие
3. Подобие
4. Подобие
5. Подобие
6. Подобие
7. Подобие
8. Подобие

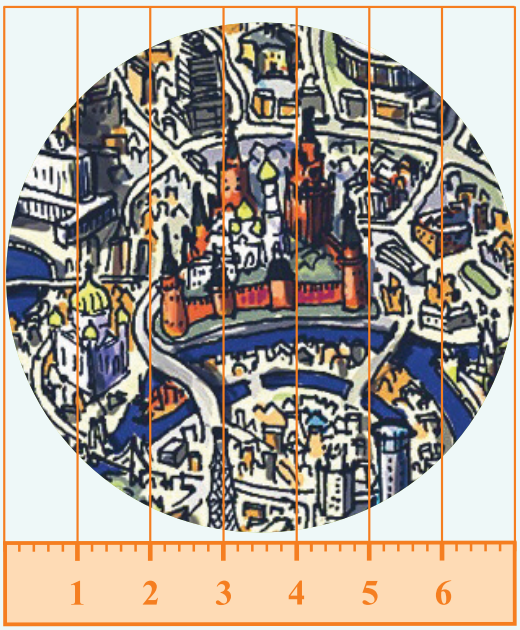
4. На рисунках показаны пары подобных фигур. Определите, во сколько раз одна из них больше другой. То есть найдите коэффициент подобия каждой пары.



5. На рисунках показаны пары подобных фигур. Попробуйте на глаз определить коэффициент подобия каждой пары, а потом проверьте себя с помощью линейки.

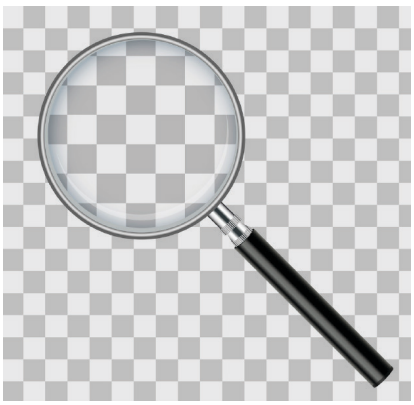
УПРАЖНЕНИЯ

6. На первом рисунке показана карта Москвы, а на втором – фрагмент этой карты под увеличением. Карты одной местности, сделанные в разных масштабах, тоже являются подобными фигурами. Определите, во сколько раз по сравнению с первой картой увеличена вторая. То есть найдите отношение масштабов этих карт, или коэффициент их подобия друг к другу.

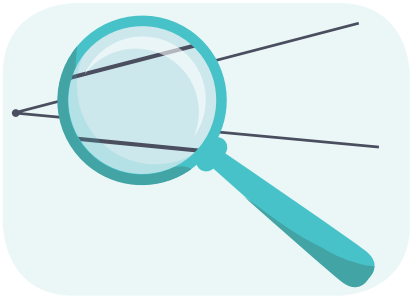


Что происходит с углами?

Подобные фигуры должны иметь одинаковые пропорции, одинаковое соотношение своих частей. Но как получить фигуру, подобную данной, как пропорционально увеличить или, наоборот, уменьшить размеры всех её частей в одинаковое число раз? Такое растяжение или сжатие изображений на экране вашего компьютера совершает специальная программа, она пропорционально увеличивает тексты, географические карты и фотографии. А в реальном мире то же самое делает выпуклая линза или лупа – не случайно её называют увеличительным стеклом. С помощью лупы можно разобрать надпись, сделанную самым мелким шрифтом, а часовые мастера смотрят через такие линзы на крошечные детали механизмов часов. Давайте возьмём увеличительное стекло и посмотрим через него на отрезок. Мы увидим, что длина отрезка увеличится в несколько раз – это число называют коэффициентом увеличения лупы. Бывают лупы с увеличением в два раза, а бывают – до 30 раз.

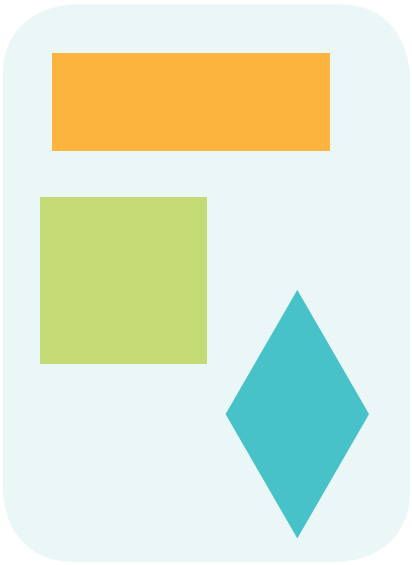


А теперь давайте посмотрим через лупу на геометрический угол. Для примера мы возьмём лупу с пятикратным увеличением и будем смотреть через неё на угол в 30°. Как вы думаете, какой величины угол мы увидим? Маловероятно, что этот угол тоже увеличится в 5 раз – тогда бы он стал равен 150° и был бы уже совсем тупым... Во сколько же раз он увеличится? Вы наверняка догадались: угол вообще не изменится, он останется тем же! Наш первый рисунок с лупой это хорошо показывает – ведь на нём под увеличением квадраты остались квадратами, и все их углы остались прямыми.



Подобные многоугольники

В конце этого параграфа мы докажем, что пропорциональное увеличение или уменьшение размеров всех частей геометрической фигуры не меняет её углов. Это означает, что у подобных многоугольников все их соответственные углы должны быть одинаковы. Данное условие необходимо, но его вовсе не достаточно для подобия двух фигур. Во-первых, существуют фигуры, у которых вообще нет углов – разве нельзя смотреть на них через увеличительное стекло? А во-вторых, даже равенство всех углов у двух многоугольников ещё не означает подобия их между собой. За примером далеко ходить не нужно – возьмите любой прямоугольник и квадрат: все их углы равны 90°, а стороны относятся по-разному. Недостаточно для подобия фигур и пропорциональности всех их сторон. Для примера можно взять опять квадрат и произвольный ромб. Все стороны у них относятся друг к другу одинаково, а углы могут различаться. Да и расстояния между их противоположными вершинами них относятся по-разному. Значит, такие фигуры не будут подобны. А вот если для многоугольников потребовать сразу двух условий: равенства всех углов и пропорциональности всех сторон, то этого хватит для их подобия. Мы запишем данное утверждение как признак подобия многоугольников. Но примем его пока без доказательства.



Прямоугольник и квадрат имеют равные углы. Ромб и квадрат имеют равные стороны. Но эти фигуры не подобны.

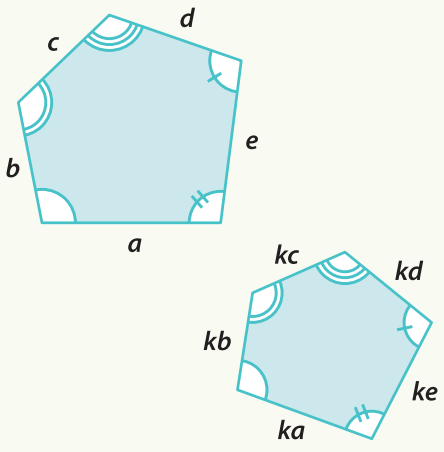
ПРИЗНАК ПОДОБИЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Если у двух многоугольников соответственно равны все углы и все их стороны пропорциональны, то такие многоугольники подобны.

Отношение соответственных сторон подобных многоугольников называют **коэффициентом подобия**.

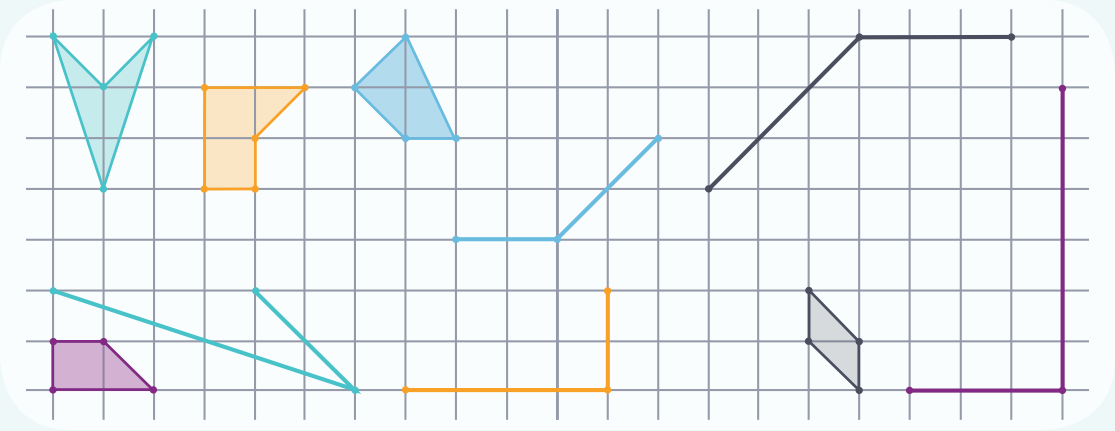
Подобие фигур обозначают значком ~.

Коэффициент подобия обозначают буквой **k**.



УПРАЖНЕНИЯ

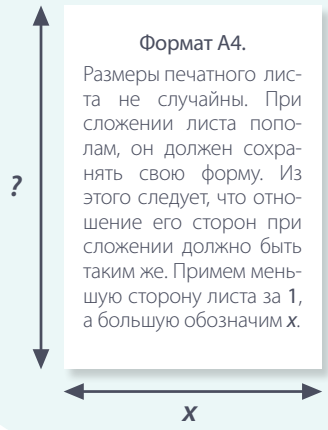
7. На клетчатой бумаге разными цветами нарисованы 5 многоугольников. Для каждого тем же цветом показаны две стороны подобного ему многоугольника. Нарисуйте остальные стороны этих многоугольников.



Формат бумаги

С подобием связаны многие вещи вокруг нас, в которых мы порой даже не отдаём себе отчёта. Возьмём для примера лист бумаги, на котором обычно печатают тексты на принтере. Меньшая его сторона равна 21 см. А чему равна бóльшая сторона? Угадать это просто так невозможно. Конечно, можно взять лист и померить его линейкой... Но даже в этом случае будет непонятно, почему его размеры именно такие. Оказывается, размеры печатного листа не могут быть случайны, а узнать длину его большей стороны можно безо всякой линейки! И дело здесь опять в подобии фигур.

Давайте вычислим большую сторону такого листа. Каждый из вас знает, что на листе бумаги формата *A4* печатают тексты – он для этого и нужен. Любой текст можно напечатать на целом листе, а можно уменьшить шрифт и напечатать его на половине этого листа. Такую печать называют альбомной, а соответствующий ей формат – *A5*. Это делают для экономии места, но главное – такие листы очень удобно складывать пополам и делать потом из них брошюры. Подумайте сами: уменьшенный текст должен располагаться на половине печатного листа совершенно так же, как исходный текст на целом листе. Иначе изменилось бы количество слов в каждой его строчке и пришлось бы переносить их из одной строки на другую. Что отсюда следует? Правильно – половина печатного листа должна быть прямоугольником, подобным целому листу. А на типографском языке это звучит так: формат *A5* должен быть подобен формату *A4*.



Формат А4.

Размеры печатного листа не случайны. При сложении листа пополам, он должен сохранять свою форму. Из этого следует, что отношение его сторон при сложении должно быть таким же. Примем меньшую сторону листа за 1, а большую обозначим x.

Тогда стороны сложенного листа будут равны $x/2$ и 1.

Поскольку прямоугольники должны быть подобны, то отношение их сторон будет одинаково.

Следовательно, мы получаем уравнение $x : 1 = 2 : x$.

Откуда x – это квадратный корень из 2, то есть равен 1,4142...

Альбомная печать

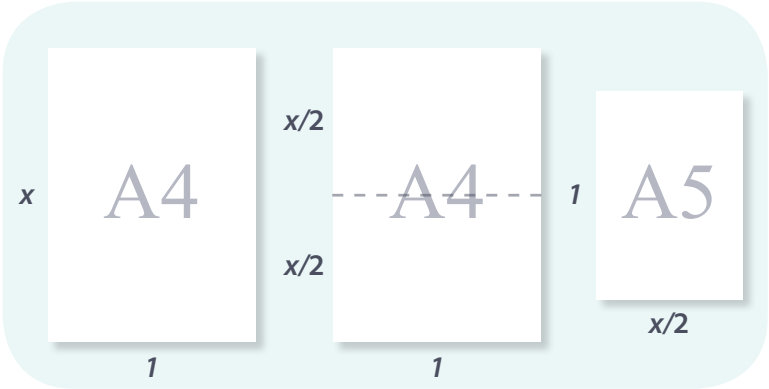
Давайте примем меньшую сторону печатного листа за 1, а его бóльшую сторону обозначим буквой x. Если этот лист сложить пополам, то его стороны будут равны $x/2$ и 1. Для подобия двух прямоугольников нужно, чтобы их стороны были пропорциональны, то есть чтобы отношение меньшей стороны к большей в них было одинаково. Отсюда мы получаем такую пропорцию

$1 : x = \frac{x}{a} : 1.$

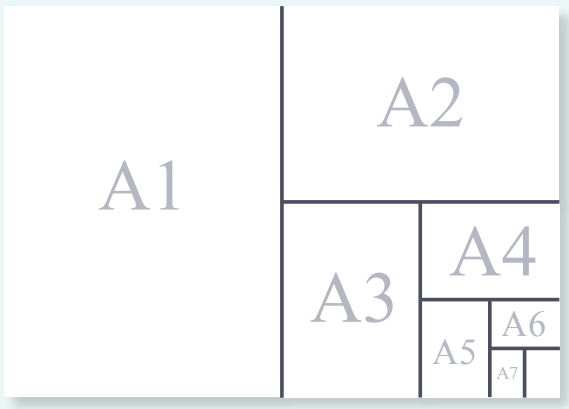
Из неё следует, что

$x^2 = 2$, откуда $x = \sqrt{2}$.

Итак, отношение сторон печатного листа должно быть равно $\sqrt{2}$. Число $\sqrt{2}$ иррационально и примерно равно 1,4142... Значит, большая сторона печатного листа бумаги формата *A4* должна быть с хорошей точностью равна 21 x 1,41 = 29,7 см. Обратите внимание: при вычислении этой стороны мы ни разу не использовали линейку!



Замечание: Почему самый распространённый формат бумаги имеет такое странное обозначение *A4*? Вы уже знаете, что при сложении данного листа пополам получится формат *A5*. А что будет, если его ещё раз сложить пополам? Наверняка получится формат *A6*, потом из него *A7*, *A8*, и так далее. Но тогда уже легко догадаться, что должны существовать и большие форматы *A3*, *A2*, *A1* и даже *A0*. Каждый из них должен быть в два раза больше предыдущего. Так оно и есть, и самый большой типографский лист формата *A0* имеет размеры 841 на 1189 мм., а его площадь практически равна 1 квадратному метру. Все типографские листы – подобные прямоугольники, отношение сторон которых с хорошей точностью приближает одно и тоже число $\sqrt{2}$.



Разрезание печатного листа формата A0

УПРАЖНЕНИЯ

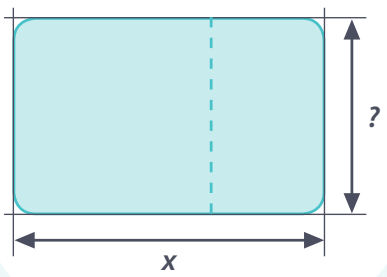
8. Вычислите размеры бумаги формата *A2*. Насколько его площадь больше стандартного листа формата *A4*?

9. Известный русский художник XX века Василий Кандинский был одним из основоположников такого направления в живописи как абстракционизм. Можно сказать, что он рисовал настоящие геометрические картины, ведь основное внимание в работе он уделял цвету и форме!

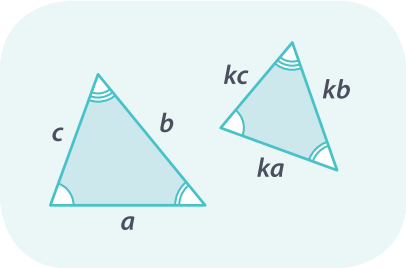
На рисунке показана одна из его работ. Рамка картины образована двумя прямоугольниками. Как вы думаете, подобны ли они, если ширина рамки везде одинаковая?

В. В. Кандинский, «Чёрный и фиолетовый», 1923 г.

10. Вы знаете, что все банковские карты в мире – это прямоугольники, одинаковые по форме и размерам? Правда, для удобства использования их углы слегка «закругляют». Интересный факт: если от такой карты отрезать квадрат, размером равный меньшей её стороне, то в остатке получится прямоугольник, подобный самой карте. Такие прямоугольники называют «золотыми». Бóльшая сторона банковской карты равна 85 мм. Найдите её меньшую сторону. Чему должно быть равно отношение её сторон для точного соблюдения данного условия?



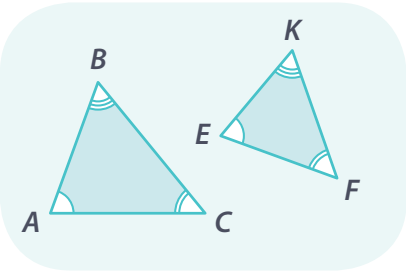
Подобие треугольников



Самый простой многоугольник – это треугольник. Но он и самый важный, ведь любой многоугольник можно разбить на треугольники. В конечном счёте, исследование всех геометрических фигур всегда сводится к треугольникам. Что же необходимо для подобия двух треугольников?

Если один из них – уменьшенная копия другого, то все его размеры должны быть в одно и то же число k раз меньше размеров другого треугольника. Значит, и все стороны такого треугольника должны быть пропорциональны сторонам другого. Кроме того, мы уже знаем, что у подобных фигур должны быть равны все их соответственные углы. Поэтому давайте примем по определению, что

Два треугольника подобны, если все их стороны пропорциональны, а соответственные углы равны.

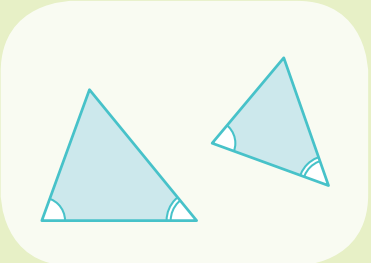


Чтобы не ошибиться при записи элементов двух подобных треугольников, полезно помнить, что в них равные углы должны соответствовать друг другу, а соответственные стороны должны лежать против этих равных углов. Поэтому вершины равных углов подобных треугольников, как правило, записывают в одном порядке. Например, если пишут, что треугольник ABC подобен треугольнику EKF, то предполагают равенство их углов при вершинах A и E, B и K, C и F. Так же записывают и отношение соответственных сторон этих треугольников $BC : KF = FC : EF = AB : EK$.

Помните, что у прямоугольников все углы одинаковы, а их стороны могут относиться как угодно? Оказывается, что с треугольниками такого быть не может. Если у треугольников равны только два угла, то все их стороны сразу окажутся пропорциональны друг другу. То есть такие два треугольника будут подобны по определению. В этом и заключается самый главный признак их подобия – номер первый.

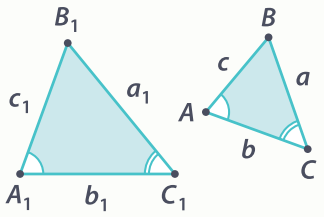
ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то эти треугольники подобны.

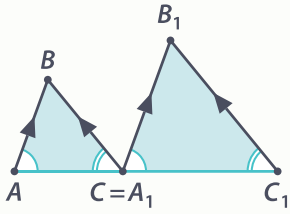


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны углы при вершинах A и A_1, C и C_1. Поскольку сумма углов любого треугольника равна $180°$, то углы при вершинах B и B_1 в этих треугольников так же будут равны. Обозначим длины сторон первого треугольника a, b и c, а стороны второго – a_1, b_1 и c_1. Мы покажем, что все стороны этих треугольников должны быть пропорциональны, то есть отношение соответственных сторон этих треугольников одинаково и равно одному числу k. Другими словами, должны выполняться равенства $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = k$, где число k – это коэффициент подобия треугольников.



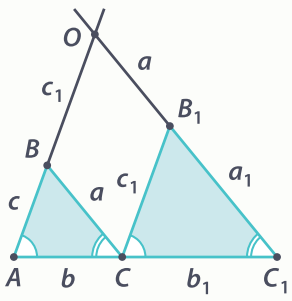
Давайте расположим стороны AC и A_1C_1 данных треугольников на одной прямой и совместим их вершины A_1 и C так, как это показано на рисунке. По условию углы A и A_1 в этих треугольников равны, значит, прямые AB и A_1B_1 будут параллельны по признаку. По тому же признаку будут параллельны прямые BC и B_1C_1, поскольку в этих треугольниках равны углы C и C_1.

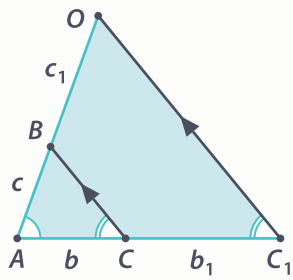


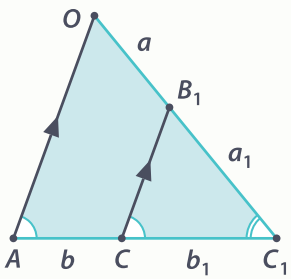
Давайте теперь продолжим стороны AB и B_1C_1 наших треугольников до пересечения в точке O. Тогда четырёхугольник BOB_1C будет параллелограммом по определению. А поскольку у параллелограмма равны противоположные стороны, то отрезки OB и OB_1 будут равны c_1 и a соответственно.

Параллельные прямые BC и B_1C_1 пересекают угол OAC, значит, по теореме они должны высекать на его сторонах пропорциональные отрезки. Следовательно, должно выполняться равенство $b : b_1 = c : c_1$. А так как прямые AB и CB_1 тоже параллельны, то по той же теореме должно быть $b : b_1 = a : a_1$. Отсюда сразу следует, что $a : a1 = b : b_1 = a : a_1$. То есть мы доказали, что все углы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны, а все их стороны пропорциональны. Значит, эти треугольники подобны по определению. А отношение их соответственных сторон равно одному числу k – коэффициенту подобия треугольников.

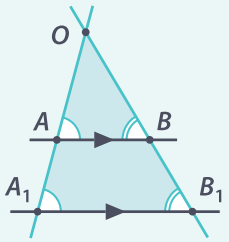
Что и требовалось доказать.



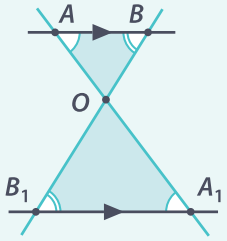




Стандартные положения



«Пирамида»



«Песочные часы»

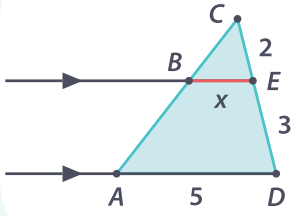
$$\Delta OAB \sim \Delta OA_1B_1$$
$$OA : OA_1 = OB : OB_1 = AB : A_1B_1$$

Если на чертеже есть параллельные прямые, то на нём обычно можно найти и подобные треугольники. Эти стандартные положения подобия треугольников возникают, когда параллельные прямые пересекают две данные прямые. На рисунках показаны эти положения: на каждом из них через точку O проходят две секущие AA_1 и BB_1. В первом случае точка O не лежит между параллельными и данный чертёж похож на «пирамиду». Во втором случае точка O находится между двух параллельных и чертёж похож на «песочные часы». По свойству параллельных любая секущая образует с ними равные углы, значит, в обоих случаях треугольники OAB и OA_1B_1 будут подобны по двум углам. Но тогда должны выполняться следующие пропорции $OA : OA_1 = OB : OB_1 = AB : A_1B_1$. Обратите внимание: отрезки на одной секущей, которые входят в эти пропорции, имеют общий конец – точку O.

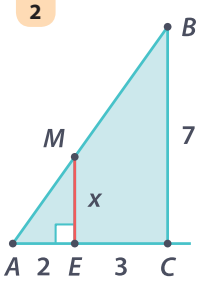
УПРАЖНЕНИЯ

11. Найдите подобные треугольники на чертежах из этой таблицы и вычислите отрезок, обозначенный буквой x.

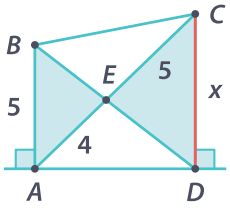
1



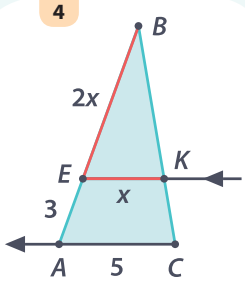
2



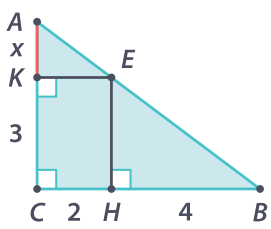
3



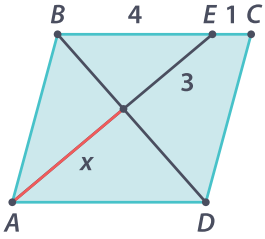
4



5

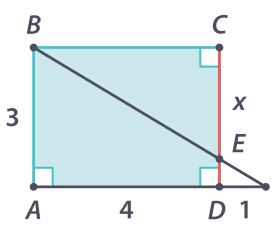


6

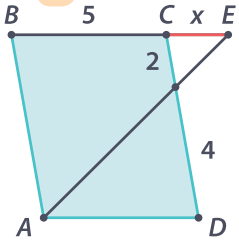


ABCD - параллелограмм

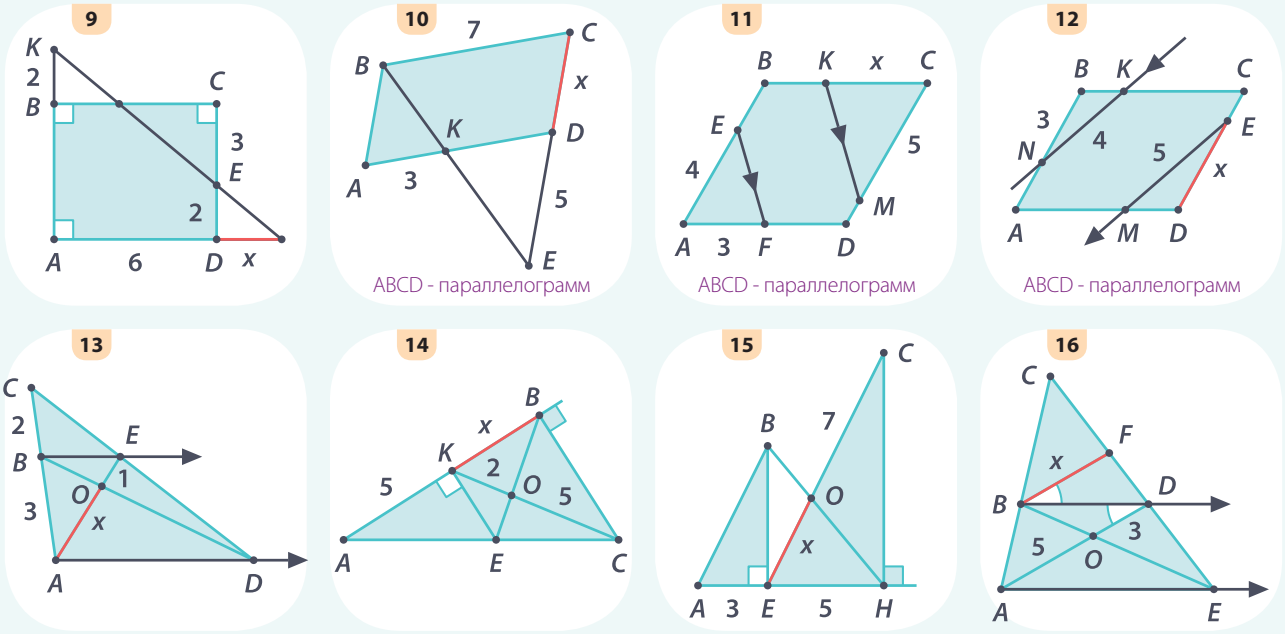
7



8

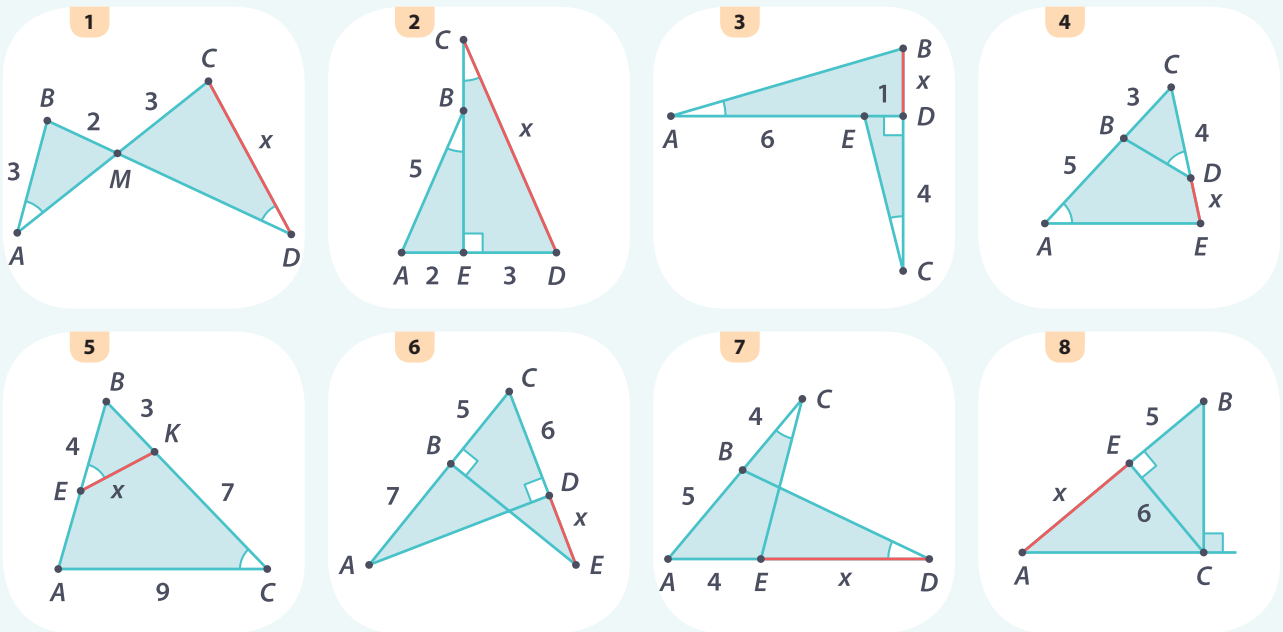


ABCD - параллелограмм

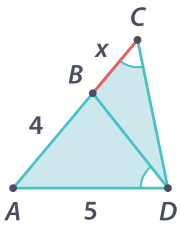


Впрочем, подобные треугольники на чертежах можно найти и там, где нет параллельных прямых. Как правило, это сделать труднее, потому что они «хуже видны». Но подобны эти треугольники будут по тому же первому признаку.

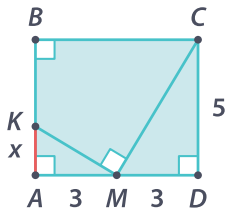
12. Найдите подобные треугольники на чертежах из этой таблицы и вычислите отрезок, обозначенный буквой ***x***.



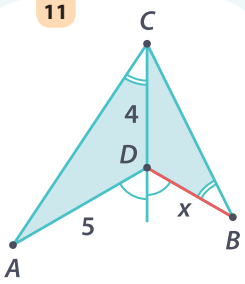
9



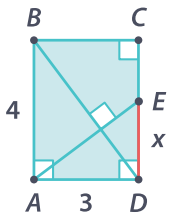
10



11



12



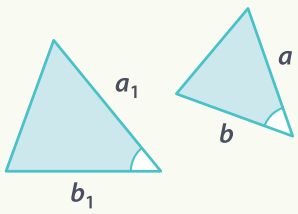
Другие признаки подобия треугольников

Кроме главного признака подобия треугольников существуют и другие – второй и третий. Они напоминают известные уже вам признаки равенства треугольников. Помните, что два треугольника равны по двум сторонам и углу между ними? Второй признак подобия очень похож на него. Надо только равенство соответственных сторон в треугольниках заменить на их пропорциональность. Давайте его запишем

ВТОРОЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

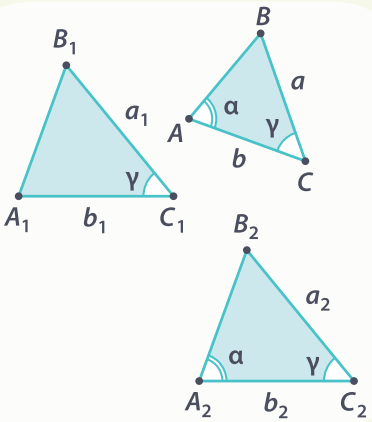
Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, а углы между этими сторонами в треугольниках равны, то эти треугольники подобны.

$$a : a_1 = b : b_1$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны углы при вершинах C и C_1, а выходящие из них стороны пропорциональны, то есть одинаково относятся между собой. Мы докажем, что такие треугольники подобны. Обозначим их равные углы буквой γ, а стороны, между которыми они лежат, в одном треугольнике обозначим буквами a и b, а в другом – a_1 и b_1. По условию мы знаем, что $a : a_1 = b : b_1$.



Давайте теперь построим ещё один треугольник $A_2B_2C_2$, который для первых двух треугольников будет их «общим знакомым»: углы у него будут такие же, как у треугольника ABC, а сторона A_2C_2 будет равна стороне b_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Обозначим в этом новом треугольнике лежащую против угла a сторону как a_2. Треугольник $A_2B_2C_2$ будет подобен треугольнику ABC по двум углам. Значит, соответственные стороны в этих треугольниках должны относиться одинаково, поэтому $a : a_2 = b : b_1$. Но по условию нам дано, что $a : a_1 = b : b_1$. Следовательно, должно быть $a : a_2 = a : a_1$. Откуда $a_2 = a_1$.

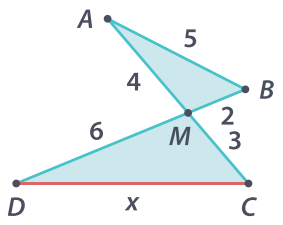
Посмотрите теперь на треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$: у них равны углы при вершинах C_1 и C_2, а также равны стороны, выходящие из этих вершин. Значит, эти треугольники должны быть равны по первому признаку! Но ведь треугольник $A_2B_2C_2$ был подобен треугольнику ABC. Поэтому треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны между собой.

Что и требовалось доказать.

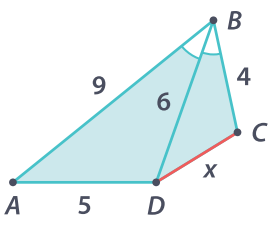
УПРАЖНЕНИЯ

13. Найдите подобные треугольники на чертежах из этой таблицы и вычислите отрезок, обозначенный буквой x.

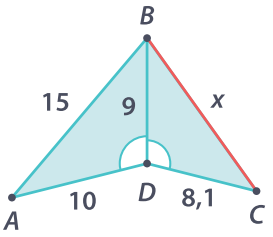
1



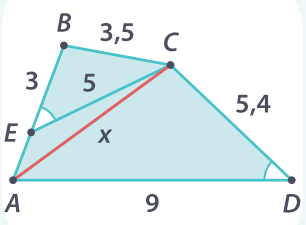
2



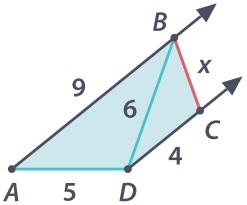
3



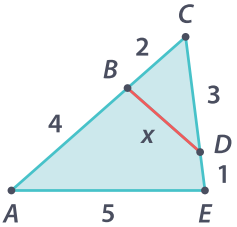
4



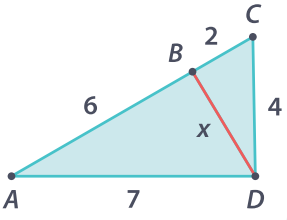
5



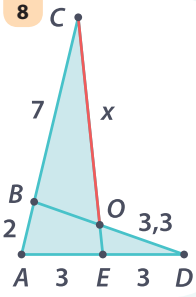
6



7



8

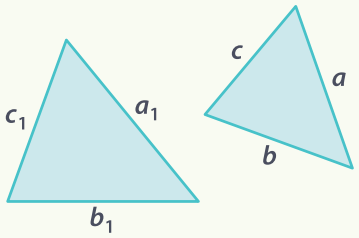


Нам осталось пройти последний третий признак подобия треугольников. Он соответствует третьему признаку равенства треугольников. Задач на него совсем мало, однако данный признак имеет большое теоретическое значение. Знаете, почему? Но об этом мы вам расскажем, когда разберём его доказательство. А пока давайте сформулируем

ТРЕТИЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

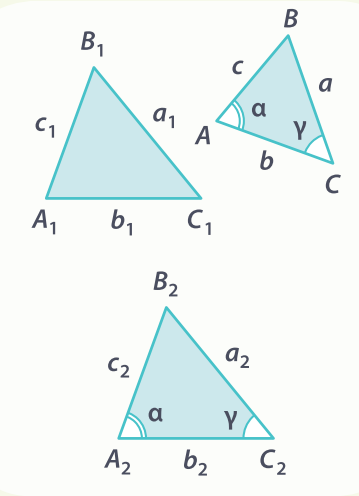
Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, то эти треугольники подобны.

$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ все их стороны пропорциональны. Мы докажем, что у этих треугольников соответственно должны быть равны все углы. Тогда они будут подобны по определению. Обозначим длины сторон первого треугольника буквами a, b и c, а стороны второго – a_1, b_1 и c_1 соответственно. По условию все их стороны одинаково относятся между собой, то есть $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1$.

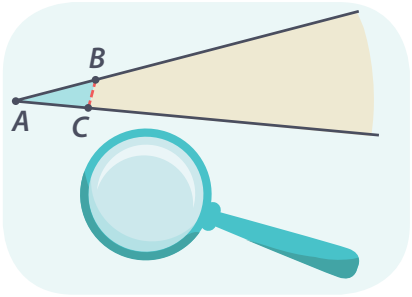


Как и при доказательстве второго признака, давайте построим ещё один треугольник $A_2B_2C_2$, который станет для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ их «общим знакомым». Все его углы будут равны углам треугольника ABC, а одна сторона будет такой же, как в треугольнике $A_1B_1C_1$. Для определённости пусть $A_2C_2 = A_1C_1 = b_1$.

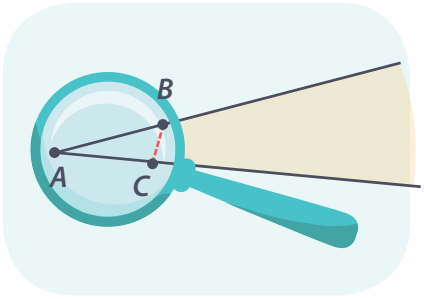
Треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ будут подобны по первому признаку, поскольку их углы соответственно равны. Значит, их стороны должны быть пропорциональны, то есть $b : b_1 = a : a_2 = c : c_2$. По условию мы знаем, что $b : b_1 = a : a_1 = c : c_1$. Откуда следует, что $a : a_1 = a : a_2$ и $c : c_1 = c : c_2$. А это может быть только в случае, когда $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ и $c_1 = c_2$. Но тогда треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ будут равны по трём сторонам. Это значит, что все их углы будут соответственно равны, поэтому все углы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ тоже будут соответственно равны. Значит, они подобны.

Что и требовалось доказать.

Какое значение имеет третий признак подобия треугольников? Пора об этом рассказать. Помните, в начале данного параграфа мы обещали вам доказать, что подобие не изменяет углов геометрических фигур? Это прямо связано с третьим признаком подобия треугольников. Давайте снова посмотрим на угол в увеличительное стекло. Оно в одно и то же число раз увеличивает длины всех отрезков и является хорошим примером преобразования подобия. Почему же такое стекло не меняет величину угла? Понять это теперь легко.



Давайте обозначим вершину угла точкой *A*, и на его сторонах отметим точки *B* и *C*. Если мы соединим эти точки отрезками, то получим треугольник *ABC*, вписанный в данный нам угол. Под увеличительным стеклом каждая сторона этого треугольника пропорционально увеличится в одно и то же число раз, и поэтому такой треугольник буден подобен исходному треугольнику *ABC* как раз по третьему признаку. То есть наше увеличительное стекло переводит любой треугольник в подобный ему треугольник. А раз эти треугольники подобны, то их углы должны быть одинаковы. Значит, и величина угла при таком пропорциональном увеличении не меняется. Вот почему преобразование подобия не меняет углов.



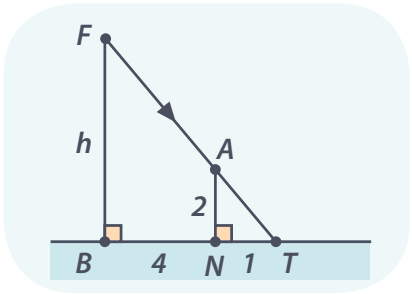
ВОПРОСЫ

1. Какие фигуры называют подобными? Назовите несколько подобных фигур в окружающем вас мире.
2. Что можно сказать о двух углах, которые подобны друг другу?
3. Будут ли подобны многоугольники, если все их стороны относятся одинаково?
4. Будут ли подобны два треугольника со сторонами 3, 5, 7 и 6, 10, 14?
5. Какой вы знаете признак подобия многоугольников?
6. Чему равно отношение сторон печатного листа бумаги? Как это связано с подобием?
7. Какие вы знаете признаки подобия треугольников?
8. Будут ли подобны две равные фигуры?
9. Квадрат разрезали на четыре одинаковых квадрата. С каким коэффициентом они будут подобны исходному квадрату?
10. Подобны ли два равнобедренных треугольника, каждый из которых имеет угол 30°?
11. Первый многоугольник подобен второму, а второй – третьему. Будут ли подобны первый и третий многоугольники?
12. Можно ли четырёхугольник разрезать на два подобных ему четырёхугольника?
13. Можно ли треугольник разрезать на два подобных ему треугольника?
14. Верно ли, что любые два отрезка подобны между собой?
15. Верно ли, что любые две окружности подобны?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1

Человек двухметрового роста измерил свою тень от уличного фонаря. Она оказалась равной 1 метру. Потом он измерил расстояние до фонаря – оно оказалось равно 4 метра. Какова высота фонаря?



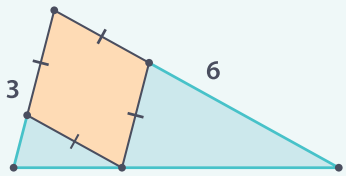
РЕШЕНИЕ: Пусть фонарь находится в точке F, а его высота равна h. Если отрезок AN задаёт положение стоящего человека, то его тень от фонаря будет отрезком NT. Точка T должна лежать на прямой AF, поскольку луч света распространяется по прямой линии. В нашей модели фонарный столб и человек стоят перпендикулярно земле, поэтому прямые AN и FB должны быть параллельны. Тогда треугольники ANT и FBT будут подобны по двум углам. Значит, их соответственные стороны будут пропорциональны, то есть для них выполняется пропорция $AN : BF = TN : TB$.

Если подставить в неё данные задачи, то получим $h : 2 = 1 : 5$. Откуда следует, что $h = 10$.

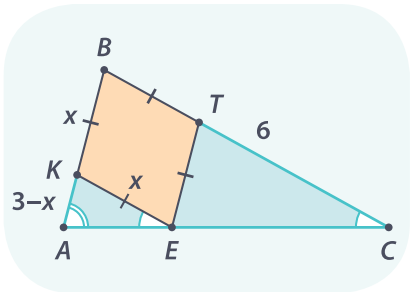
ОТВЕТ: высота столба равна 10 м.

ПРИМЕР 2

Из треугольника вырезали ромб так, как показано на рисунке. Найдите сторону ромба, если боковые стороны треугольника равны 3 и 6.



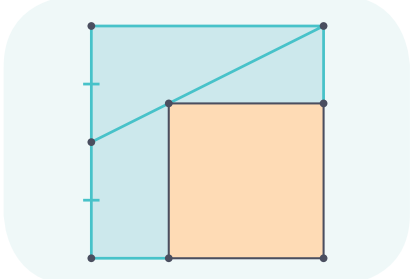
РЕШЕНИЕ: Пусть в треугольник ABC вписали ромб $BKET$ так, что его вершина E лежит на стороне AC данного треугольника. Обозначим сторону ромба буквой x. Тогда длина отрезка AK будет равна $3 - x$. Поскольку противоположные стороны ромба параллельны, то углы AEK и ACB будут равны как соответственные при этих параллельных и секущей AC.



Рассмотрим теперь треугольники AKE и ABC. Они подобны по первому признаку. Следовательно, для их сторон можно записать пропорцию $x : 6 = (3 - x) : 3$. Откуда $x = 2$.

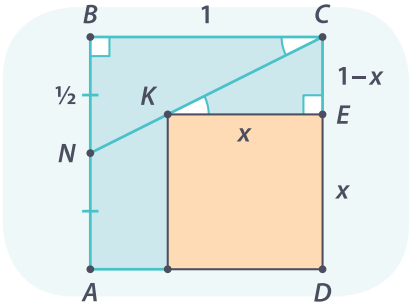
ОТВЕТ: 2

ПРИМЕР 3



Найдите отношение стороны меньшего квадрата к стороне большего на рисунке.

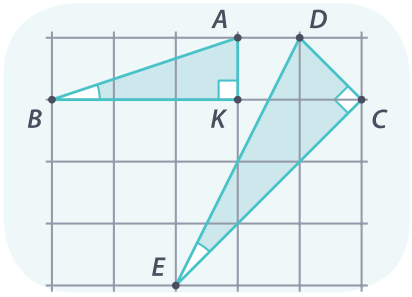
РЕШЕНИЕ: Обозначим больший квадрат *ABCD*, а меньший – *MKED*. Сторону большего квадрата примем равной 1, а сторону меньшего за *x*. Тогда длина отрезка *CE* будет равна 1 – *x*. Стороны *KE* и *BC* этих квадратов параллельны, поэтому углы *BCM* и *EKC* равны как накрест лежащие при секущей *CK*. Значит, треугольники *BCM* и *EKC* подобны по первому признаку. Следовательно, для их сторон можно записать пропорцию (1 – *x*) : ½ = *x* : 1. Откуда *x* = 2/3. Поэтому отношение стороны меньшего квадрата к стороне большего равно 2 : 3.



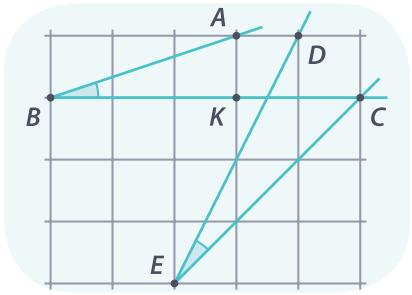
ОТВЕТ: **2 : 3**

ПРИМЕР 4

Докажите, что углы *ABC* и *CED*, показанные на рисунке с клетчатой бумагой, равны по величине.



РЕШЕНИЕ: Рассмотрим треугольники *ABK* и *DEC*, которые вписаны в данные углы. Каждый из них имеет прямой угол. В самом деле, угол *AKB* прямой, поскольку он совпадает с углом квадрата, а стороны угла *ECD* – это диагонали двух соседних квадратов, которые образуют с лучом *CB* углы 45°.

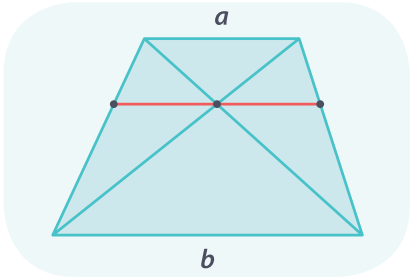


Кроме того, отношение катетов в каждом из этих треугольников равно 3. Действительно, в треугольнике *ABK* катет *BK* составляет 3 клетки, а катет *AK* – одну клетку. В треугольнике *DEC* катет *EC* равен трём диагоналям квадратов сетки, а катет *DC* – одной такой диагонали. Значит, треугольники *ABK* и *DEC* подобны по второму признаку. Углы при вершинах *B* и *D* в них соответствуют друг другу. Поэтому эти углы равны.

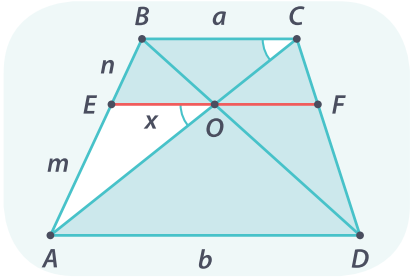
Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 5

Через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно её основаниям проведена прямая. Найдите отрезок этой прямой, заключенный внутри трапеции, если основания равны a и b.

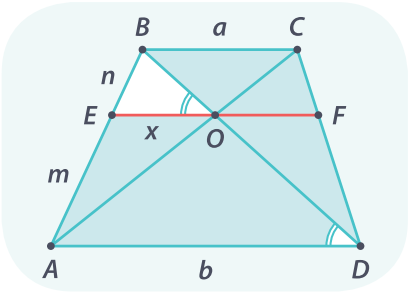


РЕШЕНИЕ: Пусть нам дана трапеция *ABCD*, диагонали которой пересекаются в точке *O*. Через точку *O* параллельно основаниям проходит отрезок *EF*. Вначале мы будем искать длину отрезка *OE*, поэтому обозначим её буквой *x*. Для удобства записи давайте обозначим длины отрезков *AE* и *BE* буквами *m* и *n*.



Поскольку прямая *OE* параллельна основанию *BC* трапеции, то треугольник *AEO* будет подобен треугольнику *ABC*. Значит, можно записать первую пропорцию *x* : *a* = *m* : (*m* + *n*).

Точно так же треугольник EBO будет подобен треугольнику ABD, поскольку прямая EO параллельна основанию AD. Следовательно, должна быть верна вторая пропорция $x : b = n : (m + n)$.



А теперь давайте сложим две эти пропорции. Тогда мы получим такое уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = 1$$

Откуда $x = \dfrac{ab}{(a+b)}$

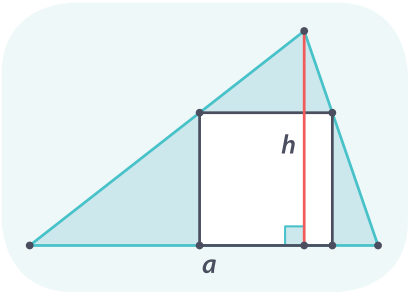
Нам осталось вычислить отрезок OF. Чему же он равен? Да тому же самому! Ведь при вычислении отрезка OE мы нигде не использовали того, что этот отрезок лежит слева от точки O, а не справа.

Значит, отрезок $EF = 2EO = 2x = \dfrac{2ab}{(a+b)}$

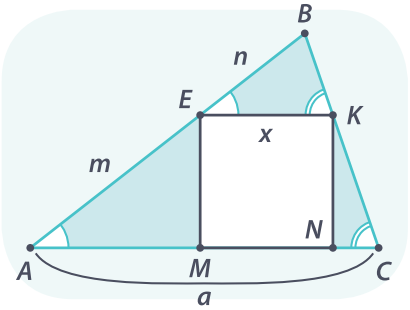
ОТВЕТ: $\dfrac{2ab}{(a+b)}$

ПРИМЕР 6

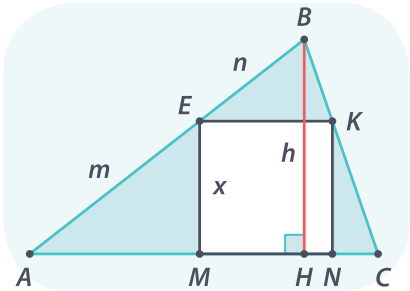
В треугольник вписан квадрат так, как показано на рисунке. Найдите сторону квадрата, если основание треугольника и высота, опущенная на него, равны a и h.

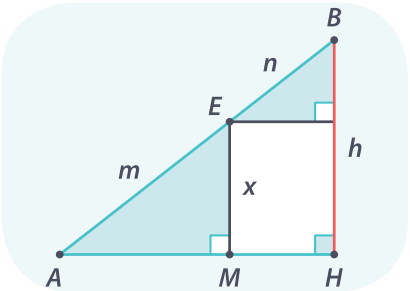


РЕШЕНИЕ: Пусть в треугольнике ABC основанием служит сторона AC, и на ней лежит сторона MN вписанного в этот треугольник квадрата $MEKN$, у которого две другие вершины лежат на сторонах AB и BC данного треугольника. Обозначим неизвестную сторону квадрата буквой x, а длины отрезков AE и BE буквами m и n. Противоположные стороны квадрата параллельны, следовательно, треугольники EBK и ABC подобны по первому признаку. Давайте для его сторон запишем пропорцию $x : a = n : (m + n)$.



Опустим теперь на основание AC высоту BH. Сторона ME квадрата будет параллельна данной высоте, следовательно, треугольник AEM будет подобен треугольнику ABH по первому признаку. Значит, для их сторон тоже можно записать пропорцию $x : h = m : (m + n)$. Если сложить эти две пропорции, получим, что





$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = 1$$

Откуда $x = \dfrac{ah}{(a+h)}$

ОТВЕТ: $x = \dfrac{ah}{(a+h)}$

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

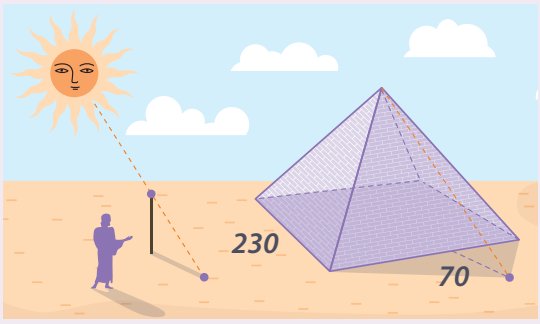
1 ★☆☆ Высота уличного фонаря равна 12 м. На какое расстояние нужно отойти от него человеку с ростом 180 см, чтобы отбросить тень длиной 3 м?

2 ★☆☆ Фотографию, размеры которой 10 х 15 см, заключили в рамку подобной формы, ширина которой по горизонтали равна 3 см. Найдите высоту рамки по вертикали.

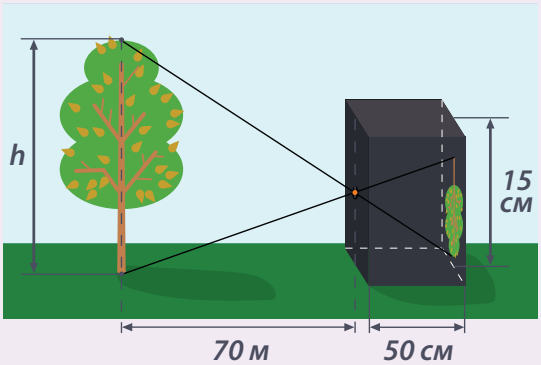
3 ★☆☆ Ширина большого пальца взрослого мужчины в среднем равна одному дюйму или 2,5 см, а расстояние от глаза до этого пальца на вытянутой руке – примерно 60 см. Человек увидел в небе самолёт, вытянул руку и закрыл его большим пальцем. На каком расстоянии от человека находится самолёт, если длина его фюзеляжа обычно около 75 м?

4 ★☆☆ Диаметр Луны приблизительно 3400 км, а от Земли она находится на расстоянии 408000 км. Какого диаметра нужно изготовить светящийся белый шар на сцене Большого театра, чтобы зрителям из середины зала он казался такой же величины, как и луна на небе? Среднее расстояние от середины зала до задника сцены в нём равно 33 м.

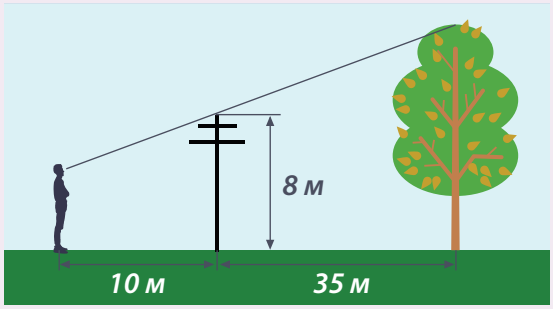
5 ★☆☆ Тень от вершины пирамиды Хеопса легла в 70 шагах от её подножия и оказалась одинаково удалена от двух её углов. В то же самое время недалеко от пирамиды человек воткнул в песок свой посох и заметил, что тень от него была на треть больше высоты посоха. Определите по этим данным высоту пирамиды, если она имеет квадратное основание со стороной, равной 230 шагам.



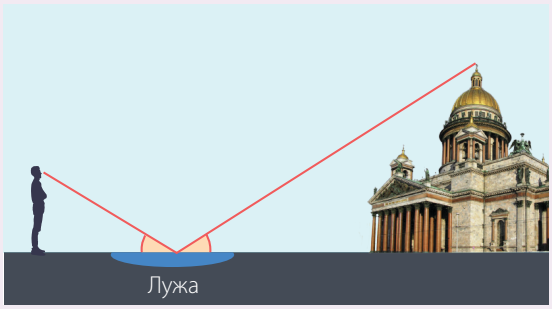
6 ★☆☆ Предком фотоаппарата по праву считается старинная камера-обскура или «темная комната». Она представляет собой черный ящик, в стенке которого проделано маленькое отверстие. В яркий солнечный день на противоположной стенке такого ящика можно видеть перевёрнутые и уменьшенные изображения предметов, находящихся вне этого ящика. Определите по данным на рисунке высоту дерева, если его изображение на экране камеры-обскуры имеет длину 15 см.



7 ★☆☆ Человек ростом 2 метра, отойдя от телеграфного столба на 10 метров, заметил, что этот столб «закрыл» верхушку дерева. Найдите высоту дерева, если высота столба равна 8 м, а расстояние от столба до дерева равно 35 м?



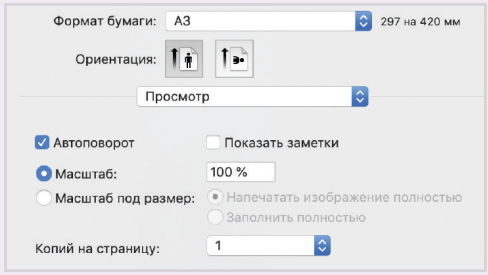
8 ★☆☆ Расстояние до здания можно определить по его отражению в зеркале или даже луже, если известна высота этого здания и расстояние от лужи до наблюдателя. Кроме того, нужно, конечно, помнить и свой рост. Дело в том, что по законам физики угол падения луча света на зеркало должен всегда равняться углу его отражения.



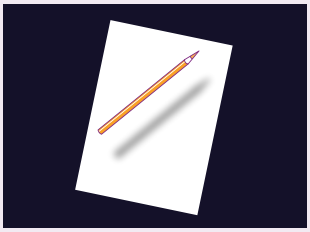
Данная фотография отражения Исаакиевского собора в луже на площади Санкт-Петербурга сделана с трёх метров и на высоте 160 см. Определите по ней расстояние от данного места до центра самого собора, если его высота составляет 101 м.

9 ★☆☆ А теперь определите, на каком расстоянии от того же собора сделана эта фотография. Расстояние от фотоаппарата до лужи на ней можно считать равным 1 метру, а высоту, с которой сделан снимок, – тоже 160 см. Где по отношению к собору и этой луже находился сам фотограф?

10 ★☆☆ Вы хотите распечатать на принтере изображение размера А4 с увеличением на листе до формата А3. Какой коэффициент увеличения в процентах вам нужно выбрать? А что делать, если необходимо уменьшить размер с А4 до А5?



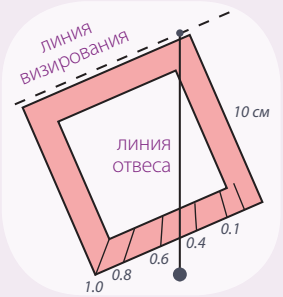
11 ★☆☆ Возьмите обыкновенный карандаш и в солнечный день поднимите его над белым листом бумаги. Карандаш отбросит чёткую тень. Теперь медленно поднимайте карандаш над бумагой – его тень будет становиться тоньше и бледнее, пока не исчезнет совсем. На какой высоте пропадёт тень карандаша, если его толщина равна 7 мм, диаметр Солнца 14 мл. км, а расстояние от Земли до Солнца равно 150 мл. км?



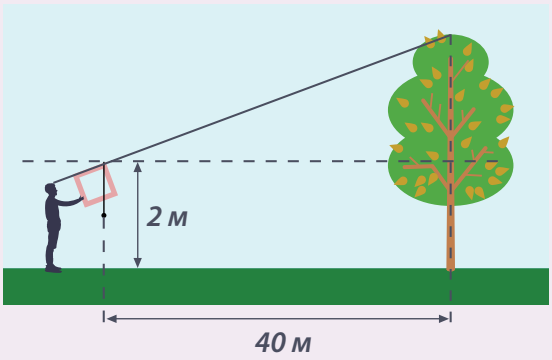
12 ★☆☆ На какую высоту над землёй должен подняться пассажирский самолёт, чтобы его фюзеляж длиной 75 метров не отбрасывал на землю чёткой тени?

13 ★☆☆ В Волгограде на Мамаевом кургане стоит грандиозная статуя Родины-матери в память о героических защитниках Сталинграда. Рост этой женской фигуры 52 метра, а в вытянутой руке она держит 33-метровый меч. Знаменитый скульптор Евгений Вучетич сохранил в этом монументе все пропорции человеческого тела. Определите ширину одного пальца данного монумента, если известно, что четыре пальца человека вместе составляют его ладонь, шесть ладоней – длину локтя, а четыре локтя равны росту человека.

14 ★☆☆ Для определения высоты дерева лесники часто используют высотомеры, которые представляют собой квадратную рамку 10x10 см со специальной шкалой и отвесом. На одной стороне рамки сделаны специальные отверстия – окуляры для наведения её на верхушку дерева. Принцип работы такого высотомера показан на рисунке.



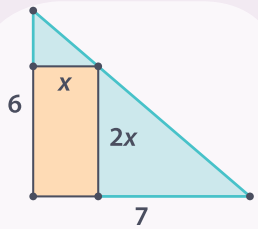
Определите по нему высоту дерева, если расстояние до него равно 40 м, а линия отвеса находится на отметке 0,6.



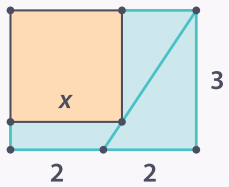
15 ★☆☆ Основание равнобедренного треугольника равно 3, а его боковые стороны равны 7. На боковых сторонах взяли по одной точке так, что три отмеченных на рисунке отрезка равны. Найдите длину этих отрезков.

к задаче 15

16 ★☆☆ Из прямоугольного треугольника с катетами 6 и 7 вырезали прямоугольник так, как это показано на рисунке. Найдите периметр этого прямоугольника, если одна его сторона в два раза больше другой.



к задаче 16



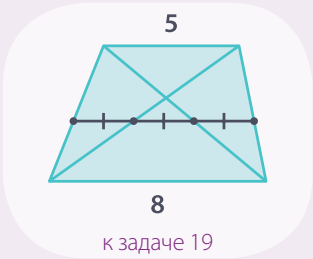
к задаче 17

17 ★☆☆ Стороны прямоугольника равны 3 и 4. Из него вырезали квадрат так, как это показано на рисунке. Найдите сторону квадрата.

18 ★☆☆ Основания трапеции равны 3 и 8. Отрезок с концами на её боковых сторонах параллелен основаниям и имеет длину 6. В каком отношении его концы делят боковые стороны трапеции?

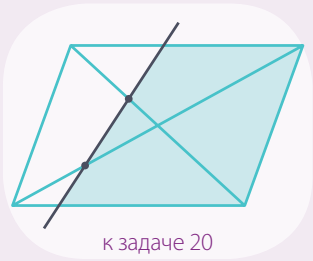
к задаче 18

19 ★★☆ Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции параллелен её основаниям 5 и 8. Найдите его длину, если он делится диагоналями трапеции на три равные части. Сколько решений у задачи?



к задаче 19

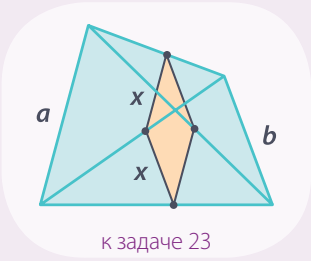
20 ★★☆ Прямая делит одну диагональ параллелограмма в отношении 1 : 2, другую – в отношении 1 : 3. В каком отношении эта прямая делит каждую его сторону?


к задаче 20

21 ★★☆ Боковые стороны равнобедренного треугольника равны a, а его основание равно b. Найдите расстояние между основаниями двух его биссектрис, проведённых к боковым сторонам.

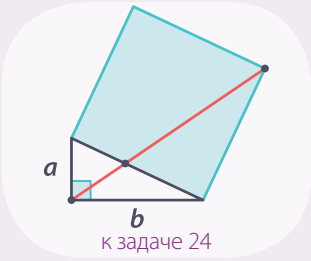
22 ★★☆ В четырёхугольник вписан ромб, стороны которого параллельны его диагоналям. Найдите сторону ромба, если длины диагоналей равны 6 и 12.

23 ★★☆ Непараллельные противоположные стороны четырёхугольника a и b. Стороны ромба соответственно им параллельны, а его вершины по одной лежат на других его сторонах и диагоналях. Найдите сторону ромба.



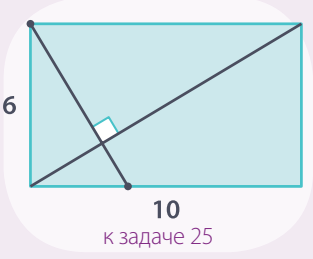
к задаче 23

24 ★★☆ На гипотенузе прямоугольного треугольника вне его построили квадрат. Вершину квадрата, не принадлежащую гипотенузе, соединили с вершиной прямого угла треугольника. Найдите отношение, в котором полученный отрезок делит гипотенузу, если катеты треугольника равны a и b.



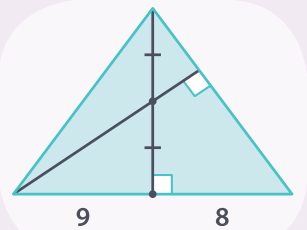
к задаче 24

25 ★★☆ Стороны прямоугольника равны 6 и 10. Через его вершину перпендикулярно диагонали провели прямую. В каком отношении она делит сторону прямоугольника?



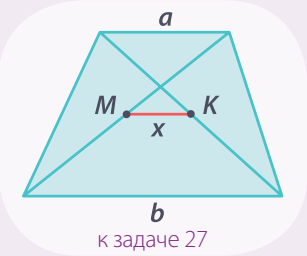
к задаче 25

26 ★★☆ Высота треугольника делит его основание на два отрезка с длинами 8 и 9. Найдите длину этой высоты, если известно, что другая высота треугольника делит её пополам.



к задаче 26

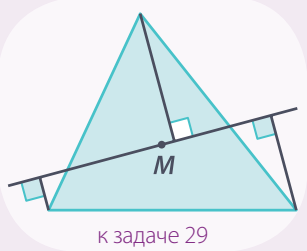
27 ★★☆ Две прямые, проходящие через концы меньшего основания трапеции параллельно её боковым сторонам, пересекают диагонали трапеции в точках M и K. Найдите MK, если меньшее основание трапеции равно a, а большее – b.



к задаче 27

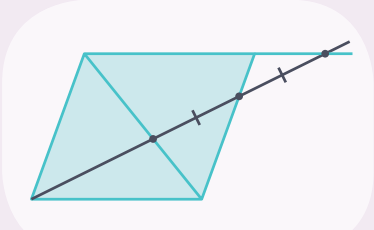
28 ★★★ Две стороны треугольника равны 3 и 4, а противоположные от них углы относятся как 1 : 2. Найдите третью сторону треугольника.

29 ★★★ Через точку M пересечения медиан треугольника провели произвольную прямую. Докажите, что расстояние от этой прямой до одной вершины треугольника равно сумме расстояний от неё до двух других его вершин.

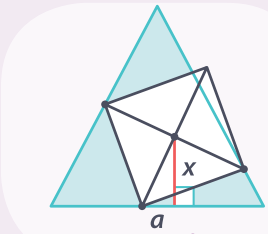


к задаче 29

30 ★★★ Через вершину параллелограмма провели прямую так, что отмеченные на рисунках отрезки равны. В каком отношении эта прямая делит диагональ параллелограмма?


к задаче 30

31 ★★★ Одна вершина квадрата находится на основании равнобедренного треугольника, а две соседние вершины – на боковых сторонах. Найдите расстояние от центра квадрата до основания треугольника, если его основание равно a, а проведённая к этому основанию высота равна h.



к задаче 31

ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

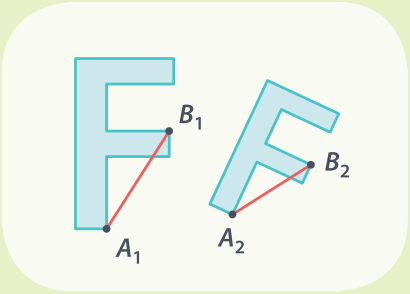
Подобные многоугольники должны иметь одинаковые пропорции. Это значит, что не только все их соответственные стороны должны относиться между собой одинаково, но и все соответственные диагонали, и вообще любые отрезки между соответственными точками. То есть между всеми точками подобных фигур должно существовать такое соответствие, которое в одинаковое число раз увеличивает (или уменьшает) расстояния между всеми парами точек в одной фигуре по сравнению с соответственными точками другой фигуры. Данное число и называют коэффициентом подобия фигур. Если этот коэффициент окажется равен 1, то две фигуры будут просто равны друг другу. В остальных случаях фигуры не будут равными, но будут иметь одинаковую форму. Поэтому можно сказать, что преобразование подобия не меняет формы самих фигур.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДОБНЫХ ФИГУР

Две фигуры называют подобными, если каждой точке A_1 первой фигуры соответствует точка A_2 второй фигуры, точке B_1 – точка B_2, и так далее. Но главное – для всех пар таких точек должно существовать одно число k такое, что $A_2B_2 = k \cdot A_1B_1$.

Число **k** называют коэффициентом подобия между фигурами.

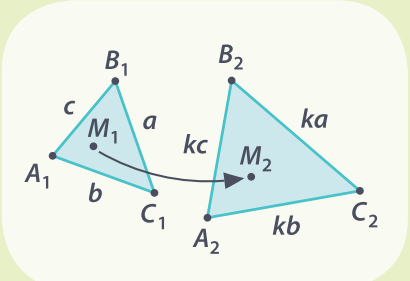
$$A_2B_2 = k \cdot A_1B_1$$



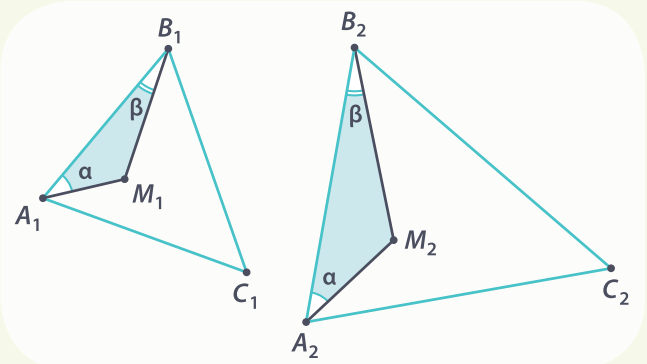
Как же получить нужное соответствие между всеми точкам двух подобных фигур? Неужели для этого нам нужно по определению сравнивать бесконечно много отрезков в этих фигурах? Как мы сейчас выясним, делать этого не нужно. Давайте покажем, как можно задать такое соответствие между всеми точками двух треугольников, когда все стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого.

ТЕОРЕМА

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, то существует соответствие между всеми точками этих треугольников, которое изменяет расстояния между ними в одно и то же число раз.

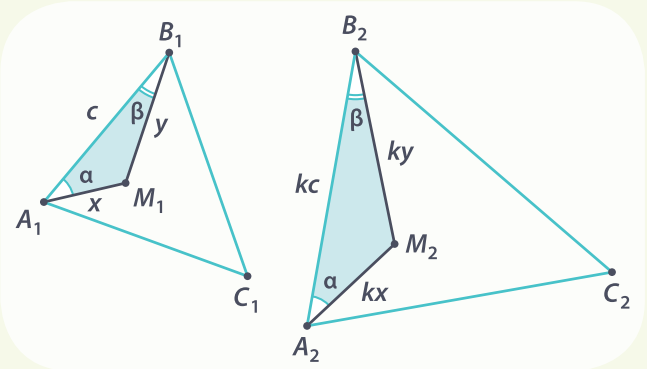


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

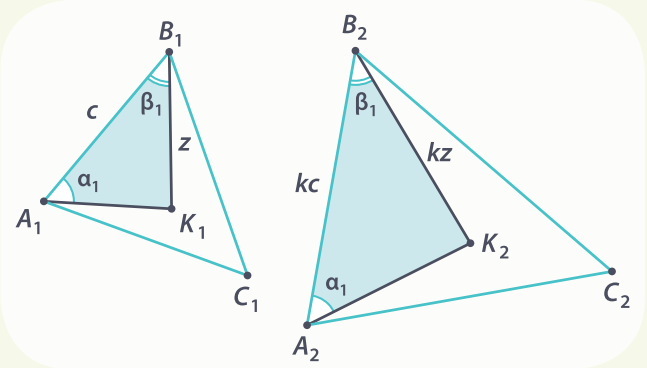


Пусть все стороны треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ пропорциональны, а их отношение равно числу k. Тогда по третьему признаку эти треугольники будут подобны, а углы при их вершинах будут соответственно равны. Как вы уже знаете, преобразование подобия должно сохранять углы геометрических фигур. Давайте этим и воспользуемся для того, чтобы определить нужное нам соответствие между всеми точками данных нам треугольников. Возьмём любую точку M_1 в треугольнике $A_1B_1C_1$ и соединим её отрезками с его вершинами A_1 и B_1. Мы получим два угла $M_1A_1B_1$ и $M_1B_1A_1$, величины которых обозначим α и β. Ясно, что эти два угла позволяют однозначно определить положение точки M в треугольнике $A_1B_1C_1$. Давайте теперь углы с теми же величинами α и β отложим соответственно от стороны A_2B_2 в треугольнике $A_2B_2C_2$. Тогда мы получим в нём единственную точку M_2, которую и поставим в соответствие точке M_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

Итак, мы нашли соответствие, которое каждой точке M_1 треугольника $A_1B_1C_1$ ставит единственную точку M_2 в треугольнике $A_2B_2C_2$.

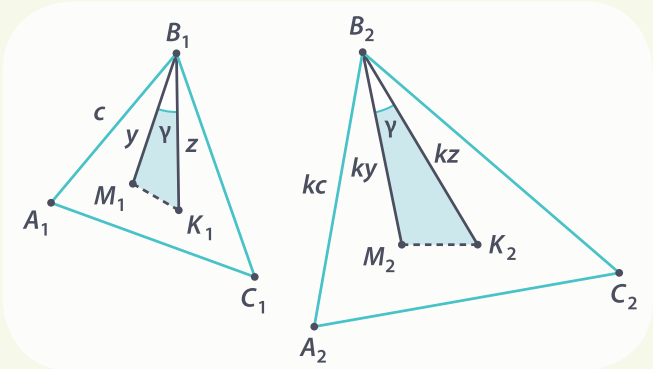


Давайте теперь покажем, что это соответствие «умножает» все расстояния между точками треугольника $A_1B_1C_1$ ровно в k раз. Вначале рассмотрим треугольники $A_1B_1M_1$ и $A_2B_2M_2$. Они подобны по двум углам, следовательно, их стороны должны быть пропорциональны. Обозначим длины отрезков A_1M_1 и B_1M_1 как x и y, тогда отрезки A_2M_2 и B_2M_2 должны иметь длины kx и ky. Таким образом, при нашем соответствии все расстояния от любой точки M_2 до вершин A_2 и B_2 треугольника $A_2B_2M_2$ по сравнению с соответствующими расстояниями от точки M_1 в треугольнике $A_1B_1M_1$ умножаются в k раз.



Если теперь взять в треугольнике $A_1B_1C_1$ любую другую точку K_1 и точно так же поставить ей в соответствие точку K_2 во втором треугольнике $A_2B_2C_2$, то мы также получим, что треугольник $A_2B_2K_2$ будет подобен треугольнику $A_1B_1K_1$ с коэффициентом k. Поэтому их углы $A_1B_1K_1$ и $A_2B_2K_2$ будут равны β_1, а отрезок B_2K_2 будет в k раз больше отрезка B_1K_1.

Давайте теперь рассмотрим треугольники $M_1B_1K_1$ *и* $M_2B_2K_2$. *Их углы при вершинах* B_1 *и* $B2$ *будут равны* $\gamma = \beta_1 - \beta$, *а выходящие из них стороны будут пропорциональны. Значит, эти треугольники должны быть подобны по второму признаку с коэффициентом* k. *Поэтому* $M_2K_2 = k \cdot M_1K_1$ *для любых двух точек нашего соответствия.*



Таким образом мы с вами доказали, что расстояния между всеми соответственными точками в двух треугольниках пропорциональны, то есть относятся как одно число k.

Что и требовалось доказать.

Что следует из этой теоремы? Из неё следует, что если два треугольника подобны с коэффициентом k, то не только все их соответственные стороны относятся друг к другу как это число k, но все их соответственные линейные элементы: медианы, высоты, биссектрисы, радиусы описанных окружностей, и т. д. Подумайте сами, почему так будет.

УПРАЖНЕНИЯ

13. Докажите, что в подобных треугольниках медианы, высоты и биссектрисы, проведённые к их соответственным сторонам, относятся как коэффициент подобия.

§ 8 СНОВА ОБ ОКРУЖНОСТИ

Окружность и круг

Окружность – одна из самых важных кривых линий на плоскости. В то же время среди всех кривых она и самая простая – ведь окружность можно начертить одним циркулем или даже натянутой веревкой, если закрепить её конец в данной точке. Эту точку называют ***центром*** окружности, а все отрезки, которые соединяют центр с точками на окружности, называют её ***радиусами***. Сама окружность является границей ***круга***, расстояние от точек которого до её центра не превышает радиуса.

Радиус в переводе с латыни означает «спица колеса». Это не удивительно, ведь можно считать, что окружность – это математическая модель колеса. Что и говорить: колесо – одно из величайших изобретений человечества. Но с окружностью связано не только колесо. Посмотрите на любую кастрюлю или сковородку – обычно они имеют круглое дно. С чем это связано? Круглая форма посуды обеспечивает в ней более равномерный нагрев пищи, её легко размешивать, а потом так же легко отмывать. Все чашки, тарелки и миски веками делались человеком тоже круглыми. Да и само слово «кружка» образовалось от слова «круг». Как это объяснить? На самом деле всё очень просто: чашки, тарелки, горшки и вазы традиционно делали из глины на гончарном круге – его вращали, бросали на него комок глины и руками придавали этой глине нужную форму. Понятно, что данная форма получалась круглой, была фигурой вращения. А потому, что окружность можно повернуть вокруг её центра на любой угол, и она будет совпадать сама с собой. То же самое можно сказать и о круге. Данное свойство окружности и круга всегда выделяло их для человека из всех других кривых линий.

Все точки окружности одинаково удалены от её центра, именно поэтому окружности так часто встречаются в физических явлениях. Если в спокойную воду бросить камень, то по её поверхности пойдут круги. Волна от источника звука во все стороны также будет распространяться по окружности.

Вы хотите разбить на газоне клумбу, высадить на неё 100 цветов и сделать её периметр как можно меньше? Тогда вам нужна круглая клумба. Потому, что из всех фигур с одинаковой площадью именно окружность имеет наименьшую длину. Это её замечательное свойство мы с вами докажем в конце 9 класса.

Давайте вспомним то, что мы с вами уже знаем об окружности. Можете вы сказать, чем она отличается от круга?

УПРАЖНЕНИЯ

1. На чертежах в данной таблице показаны окружность, круг и основные элементы окружности: радиус, хорда и диаметр. Подпишите под каждым чертежом в первой таблице букву, которая соответствует определению нужного термина во второй таблице. В ответ запишите получившуюся последовательность букв.

1	2	3	4
Хорда	Диаметр	Радиус	Круг

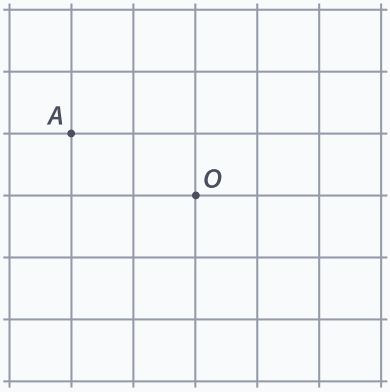
A Все точки плоскости, удалённые от данной точки не более чем на длину данного отрезка.

B Отрезок, соединяющий любую точку окружности с её центром.

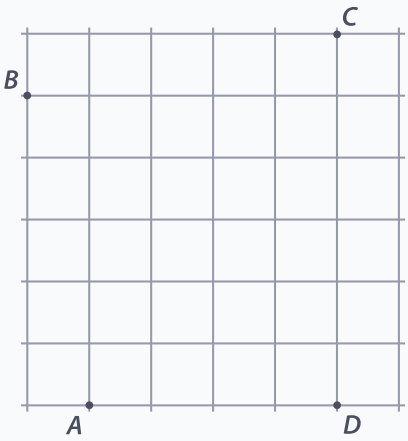
C Отрезок, соединяющий две любые точки окружности.

D Хорда, проходящая через центр окружности.

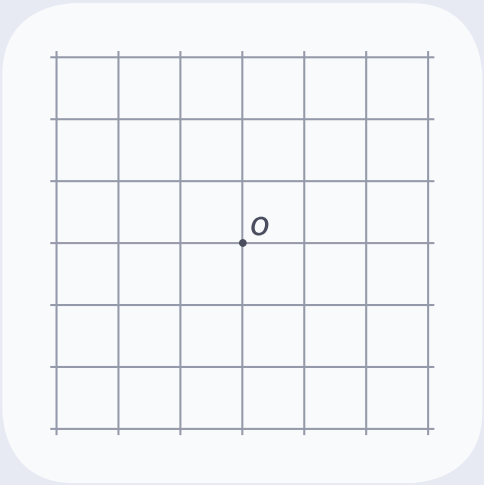
2. Окружность с центром в точке O квадратной сетки проходит через точку A. Сколько всего узлов этой сетки лежит на данной окружности?



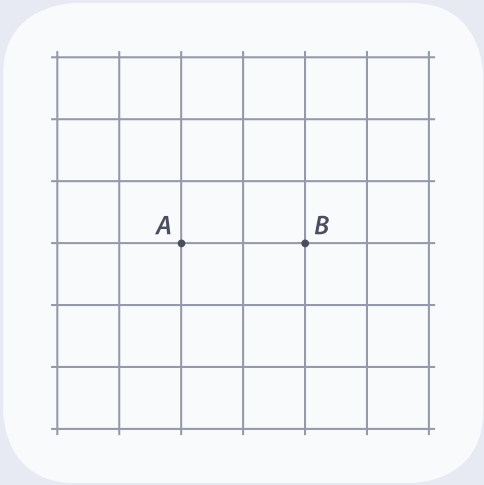
3. Нарисуйте окружность, на которой лежат четыре отмеченные на рисунке точки. Отметьте центр этой окружности.



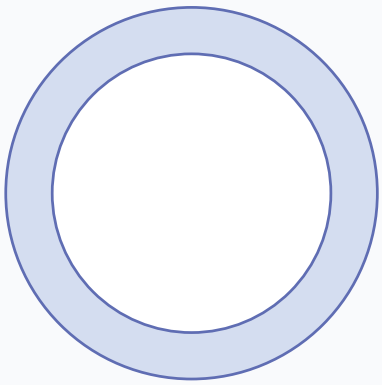
4. Сторона одной клетки квадратной сетки равна 1. Отметьте все узлы этой сетки, расстояние от которых до отмеченной точки *O* больше 2, но меньше 3. Сколько всего таких узлов?



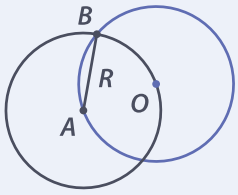
5. Расстояние между точками *A* и *B* на клетчатой бумаге равно 2. Сколько существует узлов этой бумаги, расстояние от которых до точки *A* меньше 2, а до точки *B* – больше 2?



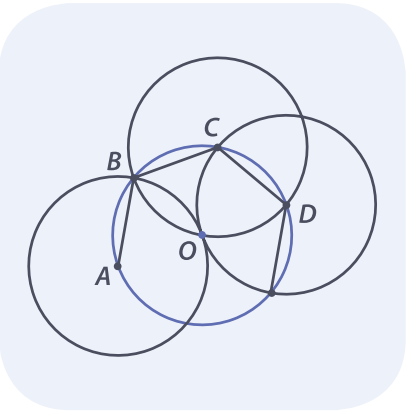
6. На рисунке показана фигура в виде кольца, образованного двумя окружностями с общим центром и радиусами 3 и 4. Какое бы вы дали определение этой геометрической фигуре?



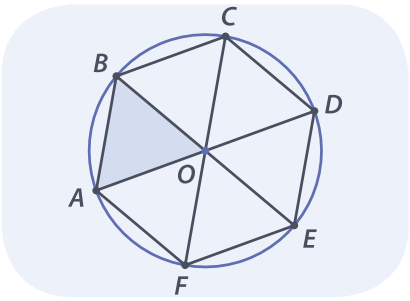
Помните, как от данной точки *A* окружности отложить её радиус? Это легко сделать одним циркулем, если поставить его иглу в точку *A* и описать им окружность, равную данной. Так мы получим точку *B* этой окружности на расстоянии радиуса от точки *A*.

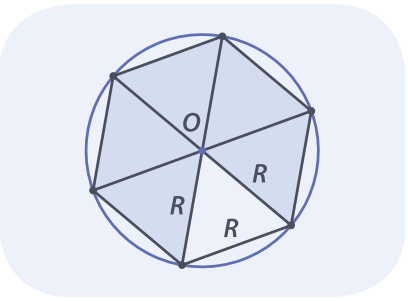


Тем же способом можно отложить радиус данной окружности от точки *B*, получить точку *C*, потом точку *D* и так далее. Сколько раз можно откладывать радиус окружности от данной её точки? На это вопрос легко ответить: все треугольники *AOB*, *BOC*, *COD* и далее будут равносторонними. Углы этих треугольников равны 60°, что составляет шестую часть от угла 360°, поэтому последовательность построенных нами точек обязательно замкнётся на шестом шаге. Это значит, что радиус окружности можно отложить от данной её точки ровно 6 раз.



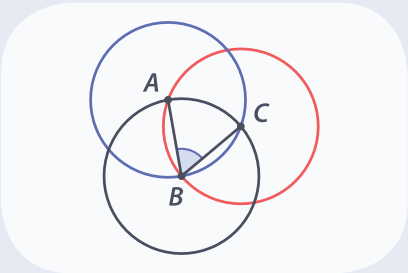
А если соединить все соседние точки хордами, то получится вписанный в окружность шестиугольник, стороны которого равны её радиусу *R*. Этот шестиугольник будет состоять из шести равносторонних треугольников с общей вершиной в центре данной окружности. В связи с этим можно даже сказать, что длина самой окружности должна быть немного больше периметра этого шестиугольника, то есть больше $6R$ (подумайте, почему это так!) На самом деле её длина равна $2\pi R$, что примерно равно $6{,}283R$.



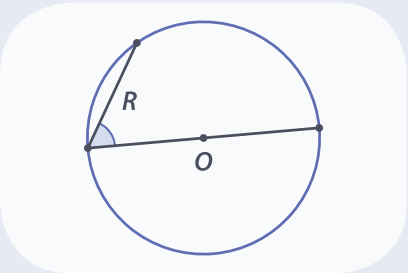


УПРАЖНЕНИЯ

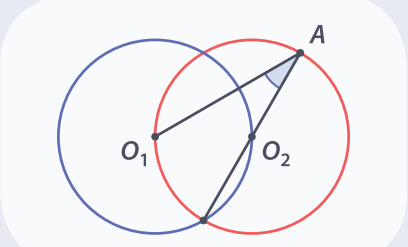
7. Три окружности расположены так, что каждая из них проходит через центры двух других. Чему равен отмеченный на рисунке угол *ABC*?



8. Из одной точки окружности провели её диаметр и хорду, равную радиусу этой окружности. Найдите угол между ними.



9. Две окружности расположены так, что каждая из них проходит через центр другой. Чему равен отмеченный на рисунке угол O_1AO_2?



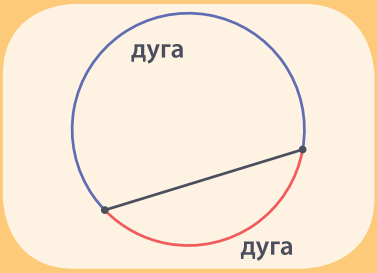
Сегмент, дуга, сектор

Нам пора познакомиться с несколькими новыми элементами окружности и круга.

Если провести в окружности любую хорду, то она разделит всю окружность на две части, которые называют ***дугами***. Если вспомнить, что слово «хорда» в переводе – это «тетива лука», то сама дуга окружности похожа на изогнутый лук. Впрочем, в математике дугой называют часть любой кривой линии, лежащую между двумя её точками. Значит, так же можно говорить о дуге параболы или графика любой другой функции. А в русском языке встречаются и такие выражения: «согнуть в дугу», «колокольчик под дугой», «радуга – дуга» и другие. Давайте теперь запишем определение:

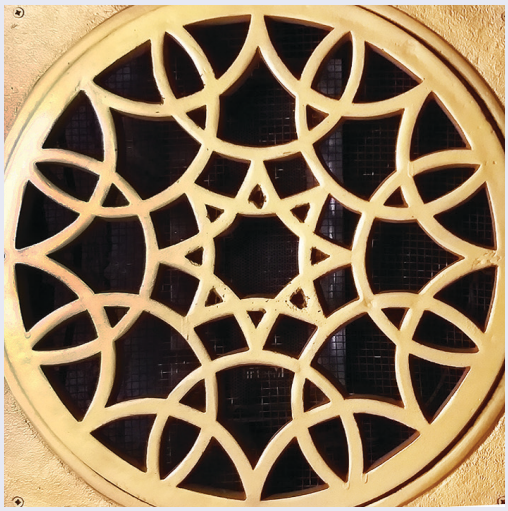
Дугой называют часть окружности, лежащую по одну сторону от её хорды. Считают, что концы дуги также принадлежат ей.

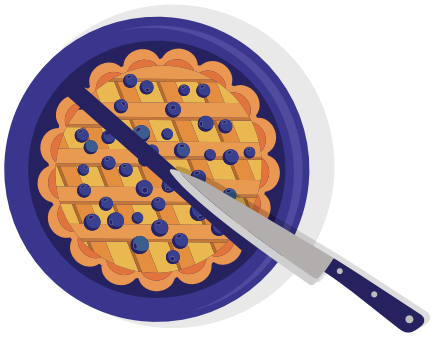
Любая хорда делит окружность на две дуги.



УПРАЖНЕНИЯ

10. На данной фотографии показана одна из решёток, находящаяся на станции Парк культуры московского метро. Она образована несколькими дугами окружностей. Сколько нужно окружностей, чтобы получить такую решётку? А сколько всего на ней различных дуг окружностей?

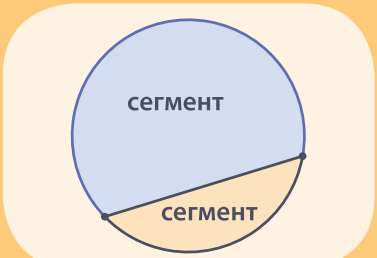




Возьмите нож и разрежьте круглый пирог по прямой линии. Очевидно, что при этом он распадётся на два куска. Каждый из этих кусков пирога называют ***сегментом*** круга. А на геометрическом языке это звучит так: хорда окружности разбивает весь круг на две части, которые называют его ***сегментами***. Нет ничего удивительного в том, что и само слово сегмент образовалось от латинского слова ***segmentum***, что означает «кусок». Сегменту круга можно дать такое определение:

Сегментом называют часть круга, ограниченную дугой окружности и хордой, соединяющей её концы.

Любая хорда делит круг на два сегмента.

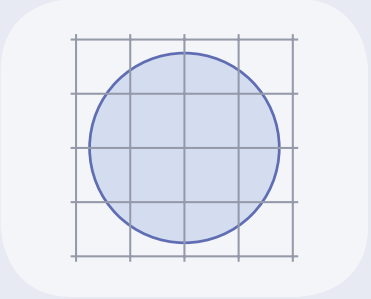


УПРАЖНЕНИЯ

11. Разбейте круг на рисунке на два сегмента так, чтобы внутри одного из них (или на его границе) оказалось

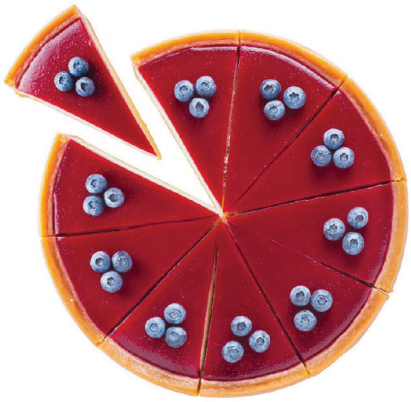
а) на один;

б) на два узла клетчатой сетки больше, чем во втором.



12. В одной окружности провели две равные хорды. Докажите, что к этим хордам прилегают два равных сегмента этого круга.

Если из центра круглого пирога сделать два прямых разреза до его края, то между ними получится кусок, который называют сектором круга. Впрочем, оставшуюся часть пирога также называют сектором. На геометрическом языке это звучит так: любые два радиуса круга разбивают его на две части – секторы. Само же слово сектор тоже пришло к нам из латинского языка, поскольку на древней латыни глагол *secare* означал «рубить» или «резать». В русском же языке можно встретить такие устойчивые выражения как «сектор стадиона», «сектор рынка» и так далее.



Сектором называют часть круга, ограниченную двумя его радиусами и дугой окружности между ними. Углом сектора называют плоский угол между его радиусами.

Любые два радиуса делят круг на два сектора.

УПРАЖНЕНИЯ

13. США обладают на данный момент почти 30% мировых запасов золота. Какой угол должен иметь сектор этой страны на круговой диаграмме мировых запасов золота, чтобы верно отражать это соотношение?

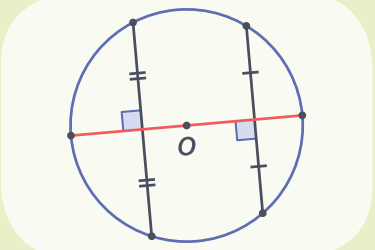
14. Найдите угол сектора круга, если хорда, соединяющая концы его дуги, равна радиусу круга.

15. Углы двух секторов одного круга равны. Докажите, что эти секторы равны как геометрические фигуры.

Диаметры

Древние люди считали окружность и круг самыми совершенными фигурами на плоскости. В этом нет ничего удивительного, поскольку окружность и круг – это фигуры вращения. Но помимо этого, они ещё и самые симметричные из плоских фигур. В самом деле: окружность и круг имеют бесконечно много осей симметрии. Можно сказать даже больше: ось симметрии проходит через каждую точку этих фигур. Помните почему? Просто окружность и круг симметричны относительно любого из своих диаметров. Давайте запишем это ещё раз:

Окружность и круг симметричны относительно любого своего диаметра.



УПРАЖНЕНИЯ

16. Докажите данное утверждение. Как вы думаете, существуют ли другие фигуры, обладающие таким свойством?

17. Приведите пример фигуры, образованной двумя окружностями, которая тоже имеет бесконечно много осей симметрий.

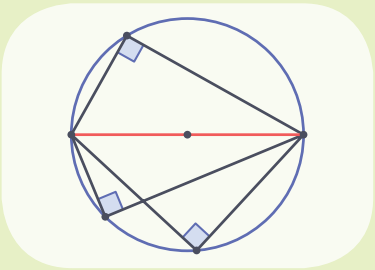
18. Приведите пример фигуры, которая имеет бесконечно много осей симметрии, но при этом не является точкой и не образована никакими окружностями.

19. Постройте ось симметрии фигуры, имеющей форму круга с круглой «дыркой» внутри.

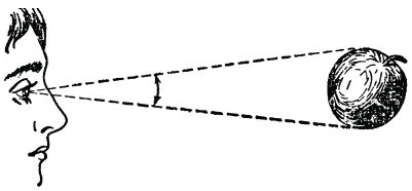
Итак, любой диаметр окружности лежит на оси её симметрии. Но кроме этого диаметр окружности обладает ещё одним замечательным свойством: он «виден» из любой её точки под прямым углом. Скажем аккуратнее – почти из любой точки окружности. Концы самого диаметра считать нельзя: из них диаметра вообще не «увидишь». Данное утверждение – одно из самых древних в геометрии, и в отличие от симметричности окружности, оно совершенно не очевидно. Давайте запишем его ещё раз:

СВОЙСТВО ДИАМЕТРА ОКРУЖНОСТИ

Диаметр окружности «виден» под прямым углом из любой её точки, отличной от концов этого диаметра.



Считается, что первым этот факт обнаружил ещё мудрец Фалес, поэтому в английских школах его даже называют теоремой Фалеса. В связи с этим интересно отметить, что величину удалённого предмета человеческий глаз оценивает по его угловому размеру, то есть углу, под которым из данного места виден данный предмет. Таким образом, можно сказать, что для всех точек окружности размер её диаметра кажется одинаковым.



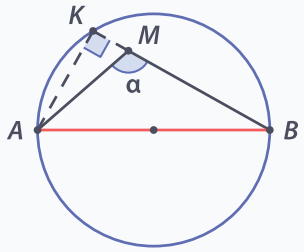
УПРАЖНЕНИЯ

20. Докажите свойство диаметра окружности.

Из точек на окружности её диаметр виден под прямым углом. А под каким углом он виден из внутренних точек круга? Легко убедиться, что этот угол будет тупым.

УПРАЖНЕНИЯ

21. Пользуясь данным рисунком, докажите из всех внутренних точек круга его диаметр виден под тупым углом .

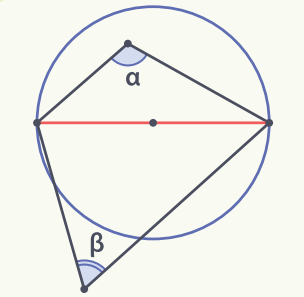


Давайте это запишем, как ещё одно свойство диаметра круга:

СВОЙСТВО ДИАМЕТРА ОКРУЖНОСТИ

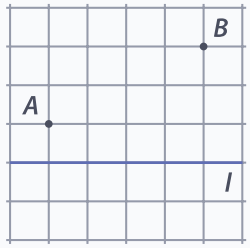
Диаметр круга виден из всех его внутренних точек под тупым углом, а из точек вне круга – под острым углом.

$$\alpha > 90°$$
$$\beta < 90°$$

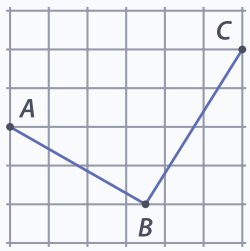


УПРАЖНЕНИЯ

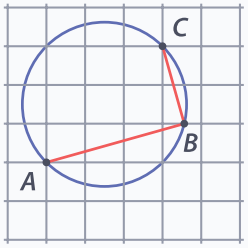
22. На рисунке с клетчатой бумагой показаны точки A и B и прямая l. Отметьте на этой прямой все такие точки C, чтобы угол ACB был равен 90°.



23. Какой угол изображён на данном рисунке: острый, прямой или тупой?



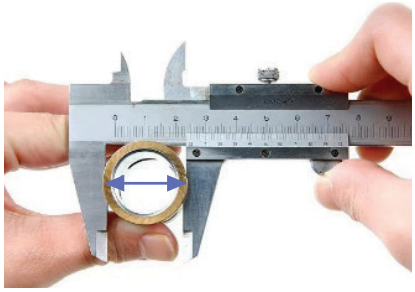
24. На рисунке с клетчатой бумагой изображена окружность. Верно ли, что угол ABC на этом рисунке прямой?



Сколько всего диаметров есть у круга? Правильно – их сколько угодно. Помните, что диаметр окружности – это самая длинная её хорда?

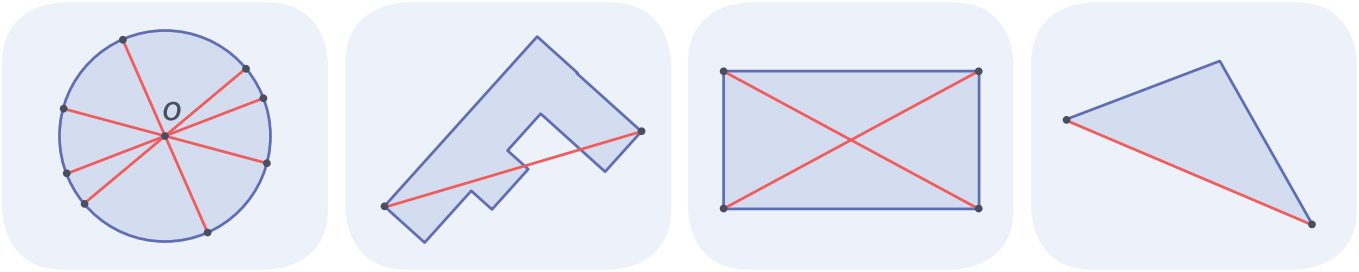
УПРАЖНЕНИЯ

25. Докажите данное утверждение.

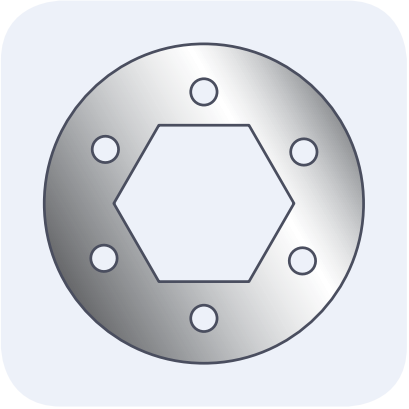


А как обстоит дело с диаметрами у других фигур?

Давайте вспомним, что диаметром любой геометрической фигуры называют самое большое расстояние между точками этой фигуры. Диаметром прямоугольника служит любая из его диагоналей, диаметром треугольника – одна из его сторон.



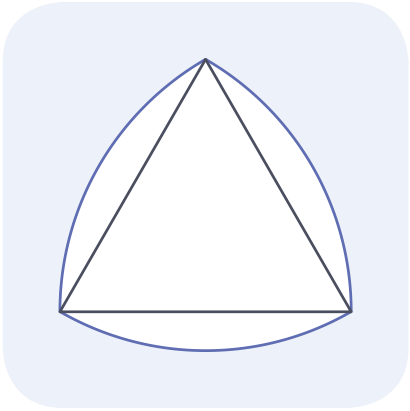
Могут ли быть фигуры, отличные от круга или окружности, которые также имеют бесконечно много диаметров?



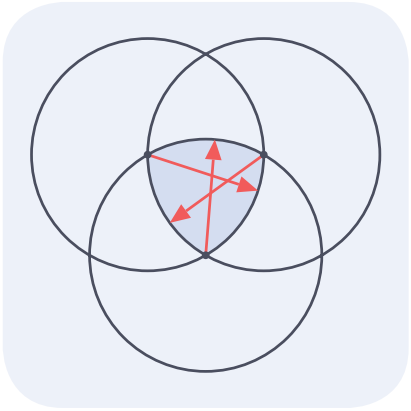
Привести пример такой фигуры очень просто. Посмотрите на рисунок: на нём показана круглая «деталь», в которой сделано несколько отверстий. Очевидно, что любой из диаметров внешней окружности этой фигуры будет диаметром всей такой «детали». Существуют даже примеры фигур, через любую точку которых можно провести их диаметр, но внешний контур этих фигур не является одной окружностью. Самым известным примером такой фигуры является криволинейный «треугольник» Рёло.

Треугольник Рёло

Треугольник Рёло образован пересечением трёх равных кругов, проходящих через центры друг друга. Оказывается, что любой из радиусов этих кругов, проходящий внутри такого «треугольника», будет его диаметром.



Треугольник Рёло



Треугольник Рёло имеет бесконечно много диаметров

Давайте это докажем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

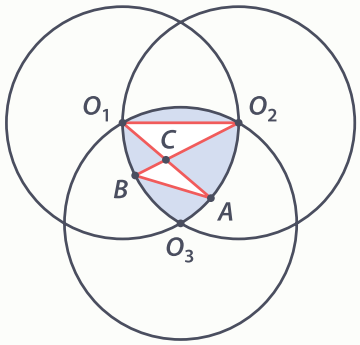
Посмотрите на любую хорду AB этого «треугольника», которая не выходит из центра какого-то из этих кругов. Пусть проведенные в концы этой хорды радиусы кругов O_1A и O_2B пересекаются в точке C. Из неравенства треугольника ABC следует, что $AB < AC + BC$. Точно так же из треугольника O_1CO_2 следует, что $O_1O_2 < O_1C + CO_2$. Если теперь мы сложим эти два неравенства, то получим, что $AB + O_1O_2 < O_1A + O_2B$.

Поскольку $O_1O_2 = O_1A = O_2B = R$, то будет верно $AB + R < 2R$.

Откуда $AB < R$. Таким образом, любая хорда AB данного криволинейного треугольника не может быть больше радиуса кругов, которыми он образован.

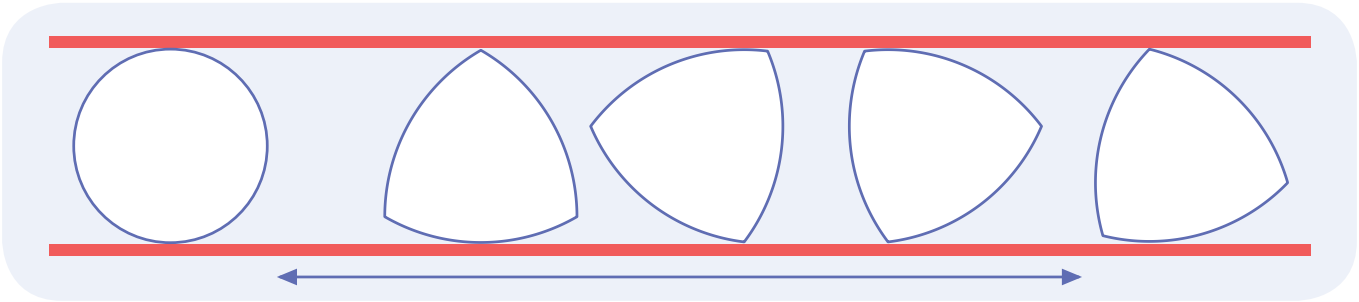
Значит, любой из этих радиусов по определению будет диаметром данной фигуры.

Что и требовалось доказать.

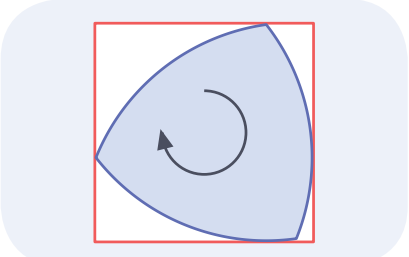


Хорда $AB < R$

Треугольник Рёло обладает многими замечательными свойствами. Самое главное из них заключается в том, что он, как круглая монета, всюду имеет одинаковую «ширину». То есть монету в форме такого треугольника можно свободно «катать» между двух параллельных прямых, и она всегда будет касаться каждой из них. Мы докажем это в следующем параграфе.



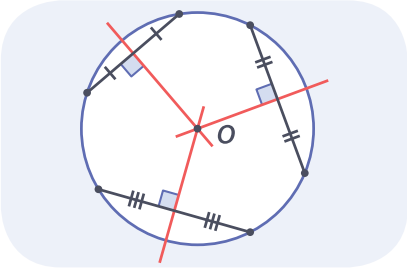
Такой «треугольник» можно свободно вращать внутри квадрата – и он будет касаться всех его сторон. Существует даже специальное сверло в форме треугольника Рёло, которым можно сверлить квадратные отверстия! На основе «треугольника» Рёло в прошлом веке работали кинокамеры и кинопроекторы, которые должны были много раз в секунду скачками передвигать плёнку перед объективом.



А знаете, почему крышки люков колодцев на улицах обычно делают круглой формы? Все очень просто: такая крышка не должна проваливаться колодец! Если крышку сделать квадратной или прямоугольной формы, то сдвинутая с колодца крышка может провалиться в него по диагонали прямоугольника самого люка. И это возможно потому, что по такому направлению ширина прямоугольника меньше его диаметра. Если же крышка колодца круглая, то этого не случится. Впрочем, крышка в форме треугольника Рёло для этой цели также подойдёт – в колодец она никогда не провалится.

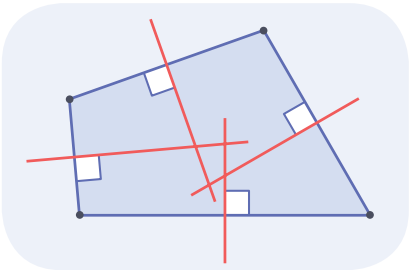
Серединные перпендикуляры

Давайте вспомним, что центр окружности лежит на серединном перпендикуляре к любой её хорде. Почему это так? Просто он равноудалён от концов этой хорды. Из этого сразу следует, что серединные перпендикуляры ко всем хордам одной окружности должны пересекаться в одной точке – центре этой окружности.

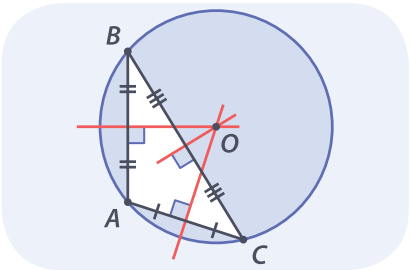


Серединные перпендикуляры ко всем хордам окружности пересекаются в её центре

Если взять произвольный четырёхугольник и провести серединные перпендикуляры ко всем его сторонам, то в общем случае они не будут пересекаться в одной точке. Именно поэтому произвольный четырёхугольник нельзя вписать ни в какую окружность. А вот серединные перпендикуляры к сторонам любого треугольника всегда пересекаются в одной точке – эту теорему мы с вами доказывали в 7 классе. Ясно, что данная точка будет центром окружности, проходящей через все вершины этого треугольника, ведь она должна быть удалена от них на одинаковое расстояние. Такую окружность называют описанной вокруг треугольника, и для данного треугольника она может быть только одна.



Серединные перпендикуляры ко всем сторонам любого четырёхугольника не всегда пересекаются в одной точке

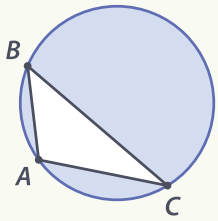


Серединные перпендикуляры к сторонам любого треугольника пересекаются в одной точке

Давайте ещё раз это запишем как теорему:

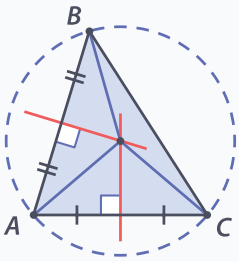
ТЕОРЕМА ОБ ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Вокруг любого треугольника можно описать только одну окружность.



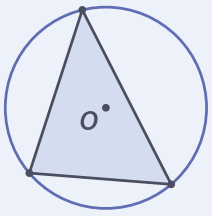
УПРАЖНЕНИЯ

26. Пользуясь данным чертежом, докажите теорему об описанной окружности треугольника.

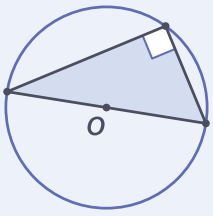


Теорема об описанной окружности треугольника – очень важное утверждение. Из него сразу следует, что окружность однозначно можно определить всего по трём её точкам. Другими словами, две окружности не могут пересекаться в трёх точках.

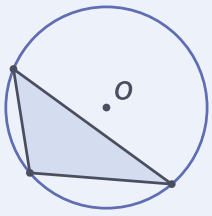
Полезно также знать, что центр окружности, описанной вокруг треугольника, находится внутри самого треугольника, если все углы этого треугольника острые. Если же треугольник имеет тупой угол, центр его описанной окружности окажется вне треугольника. А в случае прямоугольного треугольника центр описанной вокруг него окружности будет лежать прямо на его стороне – в середине гипотенузы.



окружность **остроугольного** треугольника



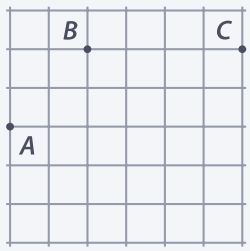
окружность **прямоугольного** треугольника



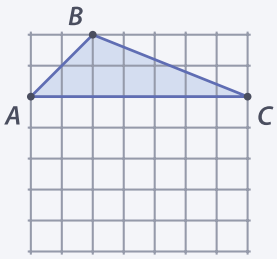
окружность **тупоугольного** треугольника

УПРАЖНЕНИЯ

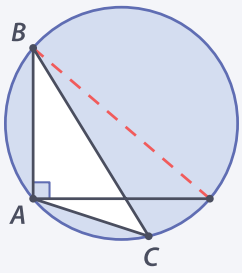
27. Постройте центр окружности, проходящей через точки *A*, *B* и *C*, отмеченные на клетчатой бумаге.



28. В какой клетке находится центр описанной окружности треугольника *ABC* на рисунке?



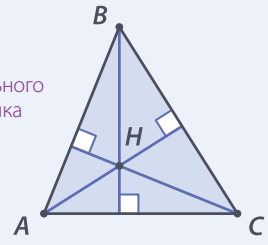
29. Пользуясь данным чертежом, докажите, что центр описанной окружности тупоугольного треугольника лежит вне этого треугольника.



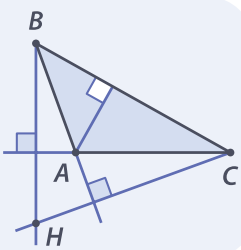
Теорема о высотах треугольника

Вы уже знаете, что медианы любого треугольника пересекаются в одной точке. Оказывается, что такое же утверждение верно и для его высот. Скажем точнее: оно верно для трёх прямых, на которых лежат высоты любого треугольника. Дело в том, что высоты не всегда принадлежат самому треугольнику – в тупоугольном треугольнике две из них падают на продолжение его сторон и пересекаются вне треугольника. Но три перпендикуляра, проведённые из вершин любого треугольника к его противоположным сторонам, всегда пересекаются в одной точке. Эти перпендикуляры ещё называют ***ортами***, такое название произошло от греческого слова «*ортос*», что означает «*прямой*». Поэтому точку пересечения высот треугольника называют его ***ортоцентром***. Часто ортоцентр треугольника обозначают латинской буквой *H*.

Высоты остроугольного треугольника



Высоты тупоугольного треугольника



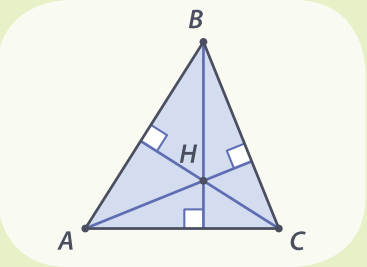
Как же высоты треугольника связаны с его описанной окружностью? Это мы с вами сейчас узнаем.

Но вначале давайте запишем данное утверждение как теорему:

ТЕОРЕМА О ВЫСОТАХ ТРЕУГОЛЬНИКА

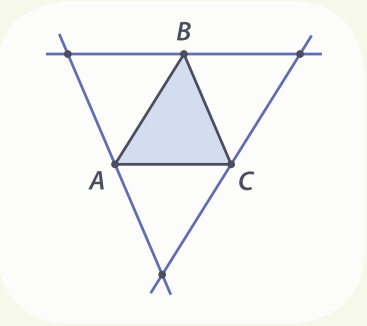
Высоты любого треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Данную точку называют ортоцентром треугольника и обозначают буквой H.

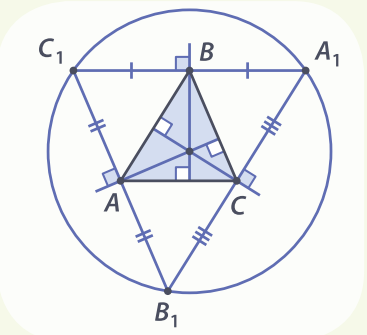


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Возьмём произвольный треугольник ABC и сразу сделаем дополнительное построение: через каждую его вершину проведём прямую параллельно его противоположной стороне. Пусть три такие прямые пересекутся в точках A_1, B_1 и C_1. Тогда точки A, B и C окажутся на серединах сторон большого треугольника $A_1B_1C_1$. В этом очень легко убедиться. В самом деле, четырёхугольники AC_1BC и ABA_1C – параллелограммы по определению. Значит, их противоположные стороны равны, поэтому $BC_1 = AC = BA_1$. Следовательно, точка B – середина стороны A_1C_1. Точно так же можно доказать, что точки A и C – середины сторон B_1C_1 и A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$.



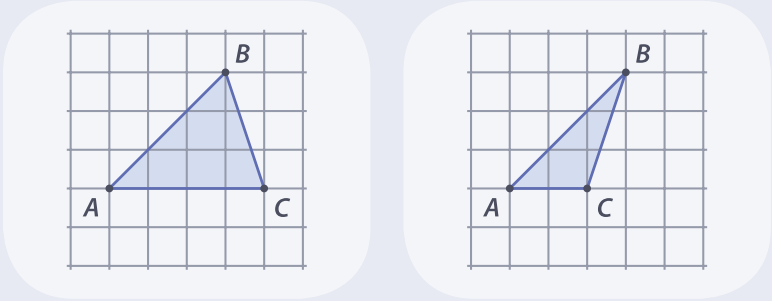
Дальше всё очень просто и красиво завершается. Стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны друг другу. Поэтому каждая высота треугольника ABC будет перпендикуляром к стороне треугольника $A_1B_1C_1$. Но этого мало – она будет проходить через середину этой стороны! То есть каждая высота треугольника ABC должна лежать на серединном перпендикуляре к стороне треугольника $A_1B_1C_1$. А вы уже знаете, что серединные перпендикуляры ко всем сторонам любого треугольника пересекаются в одной точке – центре окружности, описанной вокруг этого треугольника. Но тогда и высоты треугольника ABC (или продолжения этих высот) должны пересекаться в одной точке! Причём точка их пересечения – это центр окружности, описанной вокруг большого треугольника $A_1B_1C_1$.



Что и требовалось доказать.

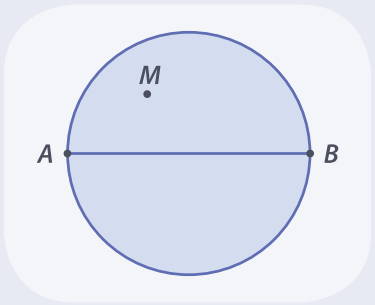
УПРАЖНЕНИЯ

30. Постройте ортоцентр треугольника *ABC*, изображённого на рисунках.

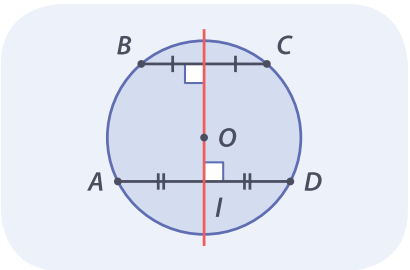


31. Вырежьте из бумаги остроугольный треугольник. Только сгибая бумагу, постройте высоты этого треугольника. Убедитесь, что они пересекаются в одной точке.

32. Дан круг, в котором провели диаметр *AB*, и точка *M* внутри этого круга. Опустите перпендикуляр из точки *M* на диаметр *AB*, используя лишь одну линейку.



Равнобокая трапеция



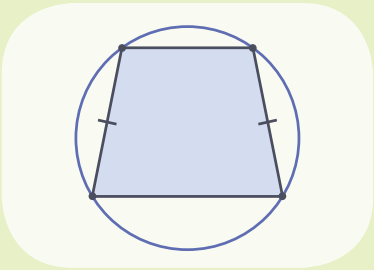
Давайте проведём в окружности две параллельные хорды *BC* и *AD*. Очень легко доказать, что центр *O* данной окружности будет лежать на общем серединном перпендикуляре *l* к этим хордам (проверьте!). Четырёхугольник *ABCD* в общем случае будет трапецией, которая вписана в эту окружность. При симметрии относительно прямой *l* отрезки *AB* и *CD* перейдут друг в друга, а значит, они равны. Вот почему трапеция, вписанная в окружность, обязана быть равнобокой.

Как вы думаете: данное утверждение – свойство или признак равнобокой трапеции? Конечно, это её признак.

Давайте так его и запишем:

ПРИЗНАК РАВНОБОКОЙ ТРАПЕЦИИ

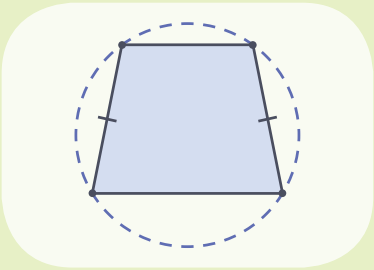
Если трапеция вписана в окружность, то она равнобокая.



А как можно сформулировать утверждение, обратное к данному признаку? Правильно – для этого нужно поменять местами его условие и заключение. Тогда мы получим ещё одно свойство равнобокой трапеции, которое сейчас докажем:

СВОЙСТВО РАВНОБОКОЙ ТРАПЕЦИИ

Если трапеция равнобокая, то её можно вписать в окружность.

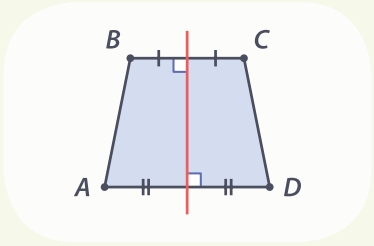


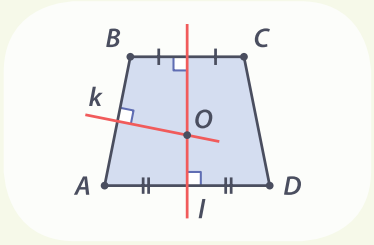
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

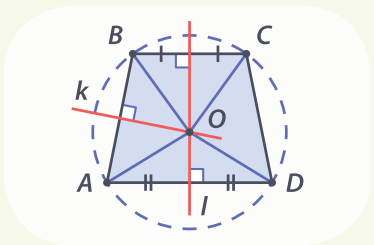
*Пусть боковые стороны **AB** и **CD** трапеции **ABCD** равны. Мы докажем, что её можно вписать в окружность. Попробуем построить центр этой окружности. Поскольку трапеция равнобокая, по свойству она является симметричной фигурой, причём ось её симметрии **l** должна проходить через середины оснований. Давайте пересечём эту ось с серединным перпендикуляром **k** к боковой стороне **AB**. Прямые **l** и **k** не могут быть параллельны, поскольку угол **BAD** не является развёрнутым.*

*Точка **O** пересечения прямых **l** и **k** будет равноудалена от всех вершин трапеции. В самом деле, эта точка лежит на прямой **k**, поэтому верно, что **AO = BO**. А так как она лежит на прямой **l**, то должно быть **AO = DO**, **BO = CO**. Значит, расстояния от точки **O** до всех вершин трапеции одинаковы: **AO = BO = CO = DO = R**. Поэтому окружность с центром в точке **O** и радиусом **R** пройдёт через все вершины трапеции.*

Что и требовалось доказать.

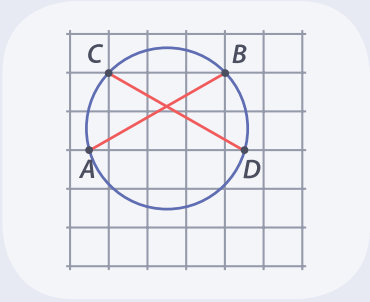




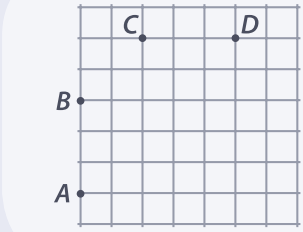


УПРАЖНЕНИЯ

33. На клетчатой бумаге нарисовали окружность. Верно ли, что отрезки *AB* и *CD* на этом рисунке равны?



34. Лежат ли показанные на рисунке четыре точки на одной окружности?



ВОПРОСЫ

1. Верно ли, что через любую точку круга проходит ось его симметрии?

2. Принадлежит ли окружности её центр?

3. Что такое сегмент круга? На сколько сегментов делит круг прямая линия?

4. Под какими углами виден диаметр окружности из её точек?

5. В каких треугольниках серединные перпендикуляры к их сторонам пересекаются вне этих треугольников?

6. В каком треугольнике серединные перпендикуляры пересекаются на его стороне?

7. В каком наибольшем числе точек могут пересекаться две различные окружности?

8. Что такое диаметр фигуры? Сколько диаметров у круга?

9. Что такое треугольник Рёло? Какие отрезки являются его диаметрами? Какое его свойство вы знаете?

10. Сколько раз можно от данной точки окружности отложить на ней её радиус?

11. Какую трапецию можно вписать в окружность?

12. Какая точка называется ортоцентром треугольника?

13. Чем является центр описанной окружности треугольника для треугольника, образованного серединами его сторон?

14. Назовите три фигуры, которые переходят в себя при повороте на любой угол.

15. Верно ли, что диаметр равнобокой трапеции всегда равен её диагонали?

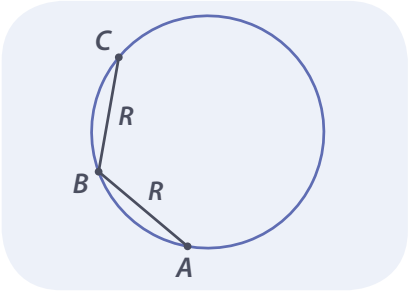
16. Верно ли, что любую фигуру можно накрыть кругом с тем же диаметром?

17. Серединные перпендикуляры к трём сторонам четырёхугольника пересекаются в одной точке. Верно ли, что этот четырёхугольник можно вписать в окружность?

18. Можно ли круг накрыть двумя меньшими кругами?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1

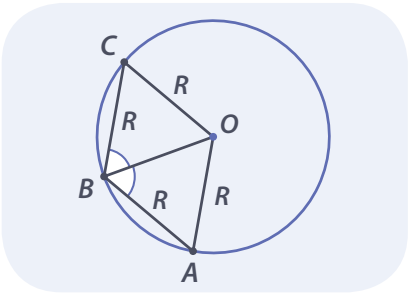


В окружности провели две хорды *AB* и *BC*, равные радиусу этой окружности. Найдите угол *ABC*.

РЕШЕНИЕ: Отметим центр *O* данной нам окружности и проведем радиусы в точки *A*, *B* и *C*. Тогда треугольники *AOB* и *BOC* будут равносторонними. Значит, их углы *ABO* и *CBO* будут равны 60°.

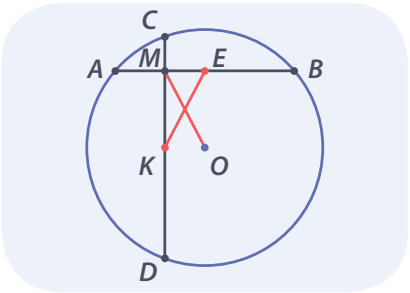
Искомый угол *ABC* равен их сумме, поэтому он будет равен 60° + 60° = 120°.

ОТВЕТ: 120°

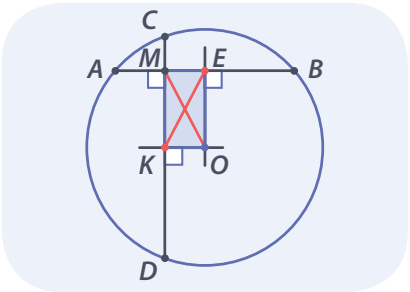


ПРИМЕР 2

В окружности провели две перпендикулярные хорды. Докажите, что расстояние между серединами этих хорд равно расстоянию от центра окружности до точки их пересечения.



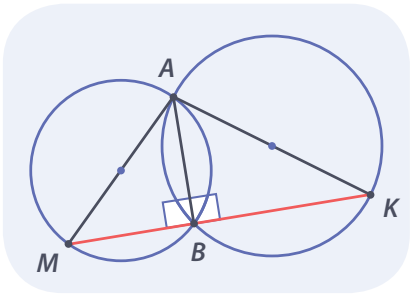
РЕШЕНИЕ: Пусть в окружности с центром *O* проведены две перпендикулярные хорды A*B* и *CD*, которые пересекаются в точке *M*. Отметим середины данных хорд – точки *E* и *K*. Центр окружности лежит на серединном перпендикуляре к любой её хорде, поэтому прямые *OE* и *OK* перпендикулярны данным хордам. Четырёхугольник *OKME* имеет три прямых угла, значит, он является прямоугольником. По известному свойству диагонали прямоугольника равны, следовательно *EK* = *OM*.

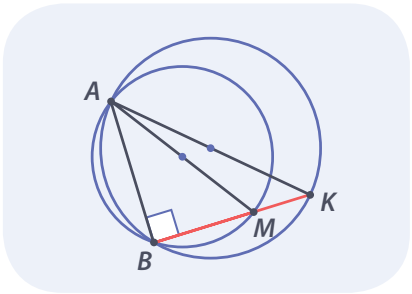


Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 3

Две окружности пересекаются в точках A и B. В них провели диаметры AM и AK. Докажите, что точка B лежит на прямой MK.



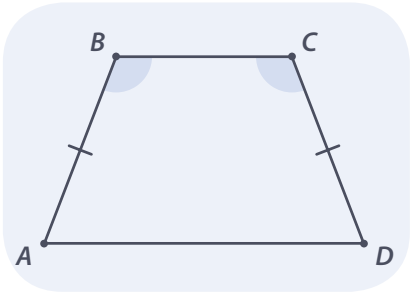


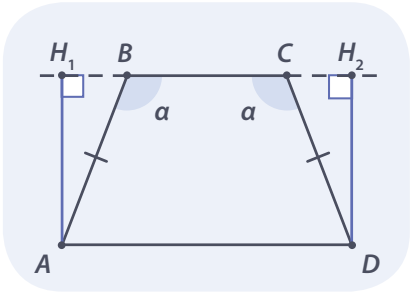
РЕШЕНИЕ: Проведём общую хорду AB двух данных окружностей, и соединим точку B отрезками с точками M и K. Поскольку отрезок AM – диаметр первой окружности, то по свойству диаметра угол ABM должен быть равен 90°. Точно так же угол ABK равен 90°, поскольку AK – диаметр второй окружности. Точки M и K могут лежать по одну сторону от прямой AB или по разные стороны – это показано на данных рисунках. В любом из этих случаев они должны лежать на прямой, перпендикулярной хорде AB и проходящей через точку B. Значит, точка B должна лежать на прямой MK.

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 4

В четырёхугольнике $ABCD$ сторона AB равна стороне CD, а угол ABC равен углу BCD. Докажите, что этот четырёхугольник можно вписать в окружность.





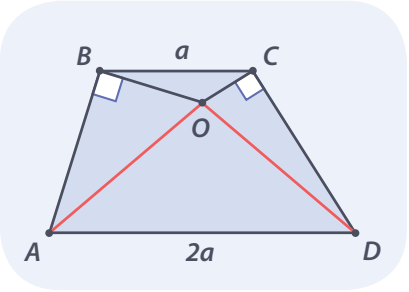
РЕШЕНИЕ: Пусть углы при вершинах B и C данного четырёхугольника имеют величину $\alpha > 90°$. Опустим из вершин A и D на прямую BC перпендикуляры AH_1 и DH_2. Углы ABH_1 и DCH_2 будут равны $180° - \alpha$, поскольку они смежные с углами четырёхугольника. Рассмотрим прямоугольные треугольники ABH_1 и DCH_2. Они равны, поскольку равны их гипотенузы и острые углы. Поэтому должно быть $AH_1 = DH_2$. Это значит, что точки A и D находятся на равных расстояниях от прямой BC и лежат по одну сторону от неё. Следовательно, прямые BC и AD параллельны по признаку. Но тогда четырёхугольник $ABCD$ будет равнобокой трапецией. А мы уже доказали, что равнобокую трапецию можно вписать в окружность. Следовательно, в окружность можно вписать данный нам четырехугольник.

Случай $\alpha < 90°$ разбирается точно так же. Если же $\alpha = 90°$, то данный четырёхугольник будет прямоугольником, который тоже можно вписать в окружность. То есть утверждение задачи верно в любом случае.

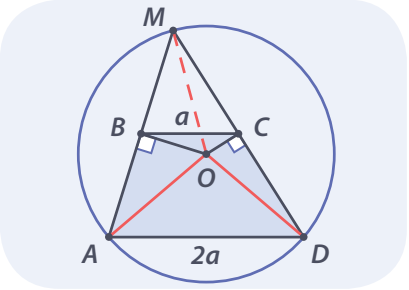
Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 5

В трапеции *ABCD* сторона *AD* в 2 раза больше стороны *BC*. Точку *O* взяли так, что углы *ABO* и *DCO* равны 90°. Докажите, что *AO* = *DO*.



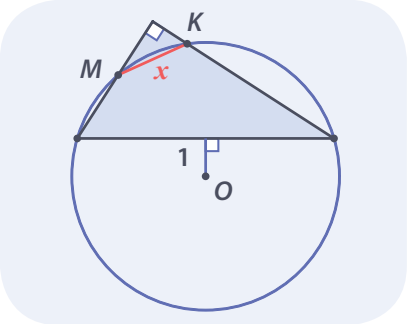
РЕШЕНИЕ: Сделаем дополнительное построение: продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке *M*. Тогда отрезок *BC* будет средней линией треугольника *AMD* по признаку, поскольку он параллелен основанию *AD* этого треугольника и равен его половине. Но тогда точки *B* и *C* должны быть серединами сторон этого треугольника, а прямые *BO* и *CO* – серединными перпендикулярами к этим сторонам. Значит, точка *O* – это пересечение серединных перпендикуляров треугольника *AMD*. Следовательно, она должна быть равноудалена от всех его вершин, поэтому *AO* = *DO*.



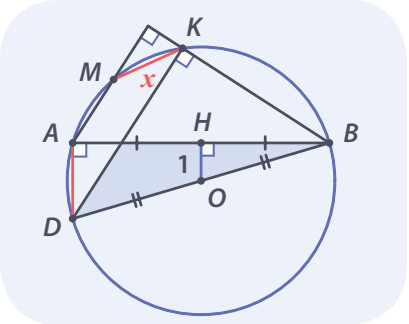
Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 6

Окружность с центром *O* проходит через концы гипотенузы прямоугольного треугольника и вторично пересекает его катеты в точках *M* и *K*. Найдите *MK*, если расстояние от точки *O* до гипотенузы равно 1.



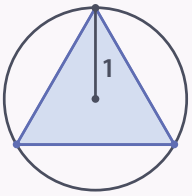
РЕШЕНИЕ: Обозначим гипотенузу данного нам треугольника *AB* и опущенный на неё из центра окружности перпендикуляр *OH*. Сделаем дополнительное построение: проведём диаметр окружности *BD*. По свойствам окружности углы *BAD* и *BKD* будут прямыми, а точка *H* будет серединой хорды *AB*. Значит, отрезок *OH* будет средней линией треугольника *ABD*. Следовательно, *AD* = 2*OH* = 2. Поскольку данный нам треугольник прямоугольный, то прямые *AM* и *DK* должны быть параллельны. Значит, четырёхугольник *AMKD* будет трапецией. Мы знаем, что трапеция, вписанная в окружность, должна быть равнобокой, следовательно *MK* = *AD* = 2.



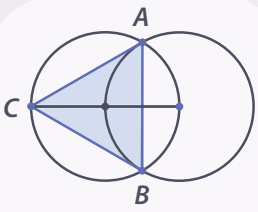
ОТВЕТ: 2

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

1 ★☆☆ В окружность радиуса 1 вписан равносторонний треугольник. Найдите расстояние от центра окружности до стороны этого треугольника.



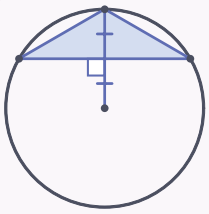
к задаче 1

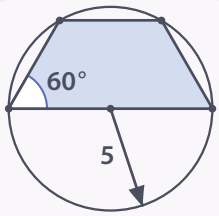


к задаче 2

2 ★☆☆ На рисунке две равные окружности проходят через центры друг друга и пересекаются в точках A и B. Линия центров окружностей пересекает одну из них в точке C. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

3 ★☆☆ В окружность вписан равнобедренный треугольник. Центр окружности симметричен вершине треугольника относительно его стороны. Найдите углы треугольника.


к задаче 3

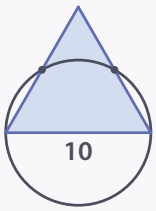


к задаче 4

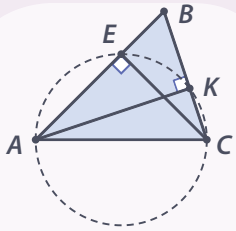
4 ★☆☆ Трапеция вписана в окружность радиуса 5, причем один из ее углов равен 60°. Найдите периметр трапеции, если одно её основание является диаметром окружности.

5 ★☆☆ Циркулем и линейкой впишите в данную окружность равносторонний треугольник.

6 ★☆☆ Сторона равностороннего треугольника равна 10. Окружность проходит через две его вершины и середины двух его сторон. Найдите радиус этой окружности.



к задаче 6

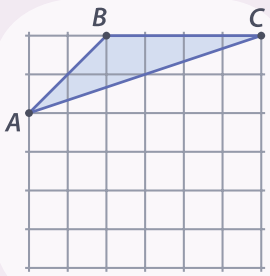


к задаче 7

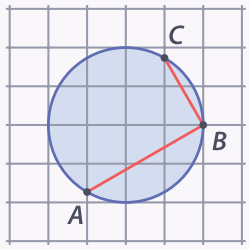
7 ★☆☆ В треугольнике ABC провели высоты AK и CE. Докажите, что четырёхугольник AEKC можно вписать в окружность. Где находится центр этой окружности?

8 ★☆☆ На двух сторонах треугольника как на диаметрах построили окружности. Докажите, что они пересекаются на его третьей стороне (или её продолжении).

9 ★☆☆ Сторона клетки на рисунке равна 1. Окружность проходит через все вершины треугольника ABC. Найдите расстояние от центра этой окружности до прямой BC.



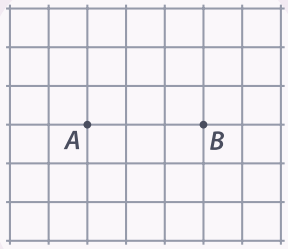
к задаче 9



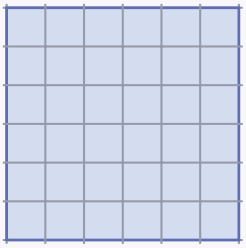
к задаче 10

10 ★☆☆ На клетчатой бумаге провели окружность. Точки A, B и C лежат на пересечении этой окружности с линиями сетки. Какой угол ABC показан на рисунке: острый, прямой или тупой?

11 ★☆☆ На клетчатой бумаге даны две точки A и B. Отметьте на ней все точки C в узлах сетки так, чтобы в треугольнике ABC сторона AB была самой длинной. Сколько всего таких точек?

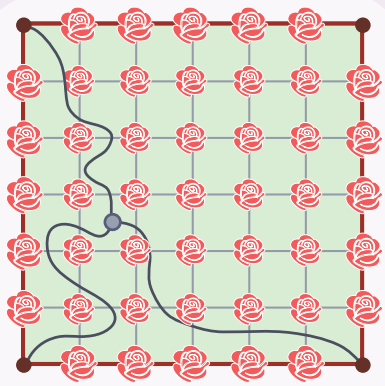


к задаче 11

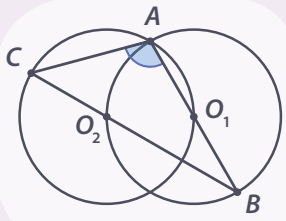

к задаче 12

12 ★☆☆ Отметьте все узлы на клетчатой бумаге, расстояния от которых до всех вершин показанного на рисунке квадрата не превышает его стороны. Сколько всего таких узлов?

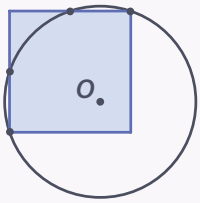
13 ★☆☆ Квадратный участок земли разбит на 36 одинаковых квадратов, в вершинах которых посажены розы. Коза привязана веревками к трем столбам, стоящим в углах участка. Длина каждой веревки равна стороне забора. Коза съедает розы там, куда сможет дотянуться... Сколько роз останется на участке?


к задаче 13

14 ★☆☆ Две окружности имеют общую точку A и проходят через центры O_1 и O_2 друг друга. В первой окружности провели диаметр AB, а продолжение отрезка BO_2 пересекает вторую окружность в точке C. Найдите угол BAC.



к задаче 14



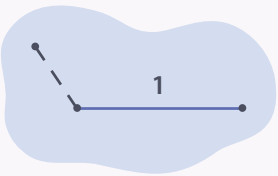
к задаче 15

15 ★☆☆ Окружность проходит через две противоположные вершины квадрата и середины двух его соседних сторон. Докажите, что центр этой окружности лежит на диагонали данного квадрата. В каком отношении он делит эту диагональ?

16 ★☆☆ Параллелограмм вписан в окружность. Докажите, что он прямоугольник.

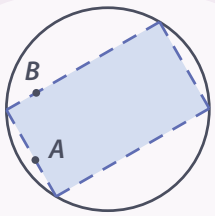
17 ★☆☆ Дана окружность радиуса 2. Нарисуйте на плоскости все точки, расстояние от которых до какой-либо точки окружности не превосходит 1.

18 ★★☆ Дан отрезок длины 1. Нарисуйте все точки плоскости, расстояние от которых до какой-либо точки данного отрезка не превосходит 1.

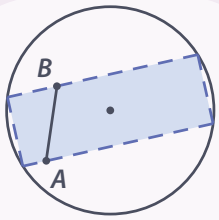


к задаче 18

19 ★★☆ Внутри окружности даны точки A и B. Впишите циркулем и линейкой в эту окружность прямоугольник так, чтобы данные точки лежали на двух его соседних сторонах. Сколько решений может быть у этой задачи?



к задаче 19

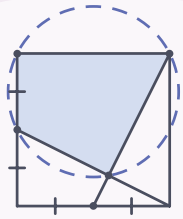


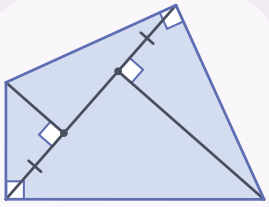
к задаче 20

20 ★★☆ Внутри окружности даны точки A и B. Впишите циркулем и линейкой в эту окружность прямоугольник так, чтобы данные точки лежали на двух его противоположных сторонах. Сколько решений может быть у этой задачи?

21 ★★☆ Два противоположных угла четырёхугольника прямые, а его диагонали перпендикулярны. Докажите, что одна из них делит другую пополам.

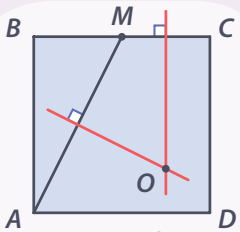
22 ★★☆ Две вершины квадрата соединили с серединами его сторон так, как это показано на рисунке. Докажите, что отмеченный на нём четырёхугольник можно вписать в окружность.


к задаче 22

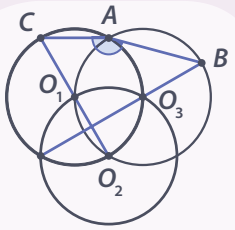

к задаче 23

23 ★★☆ Два противоположных угла четырехугольника прямые. На соединяющую эти углы диагональ из двух других его вершин опустили перпендикуляры. Основания этих перпендикуляров делят данную диагональ на три отрезка. Докажите, что два из этих отрезков равны.

24 ★★☆ Точка M – середина стороны BC квадрата ABCD. Серединные перпендикуляры к отрезкам AM и CM пересекаются в точке O.Докажите, что точка O лежит на диагонали данного квадрата. В каком отношении он делит эту диагональ?



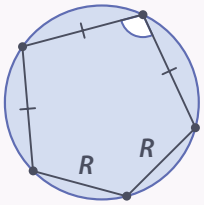
к задаче 24



к задаче 25

25 ★★☆ Три окружности проходят через центры O_1, O_2 и O_3 друг друга. Первая и третья окружности второй раз пересекаются в точке A. Продолжение общей хорды первых двух окружностей пересекает третью в точке B, а линия их центров O_1O_2 второй раз пересекает первую окружность в точке C. Найдите угол BAC.

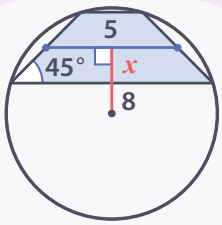
26 ★★☆ В окружность вписали пятиугольник, две соседние стороны которого равны радиусу окружности, а три другие – равны между собой. Найдите отмеченный на рисунке угол пятиугольника.



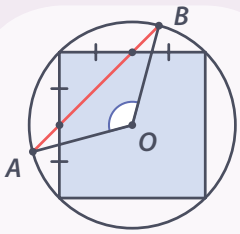
к задаче 26

27 ★★☆ Центр описанной окружности треугольника лежит на одной из его средних линий. Найдите больший угол этого треугольника.

28 ★★☆ Трапеция основаниями 5 и 8 вписана в окружность. Найдите расстояние от центра окружности до средней линии трапеции, если угол при ее основании равен 45°.



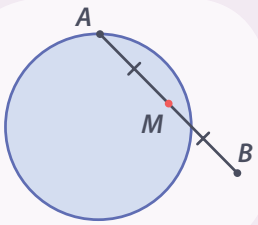
к задаче 28



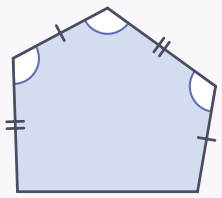
к задаче 29

29 ★★☆ Квадрат вписан в окружность с центром O. Хорда AB этой окружности проходит через середины двух его соседних сторон. Найдите угол AOB.

30 ★★☆ Точка A движется по окружности, точка B неподвижна. По какой траектории движется точка M - середина отрезка AB?

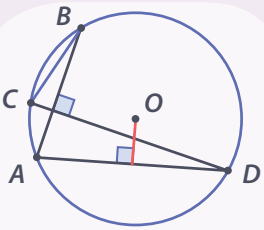


к задаче 30


к задаче 31

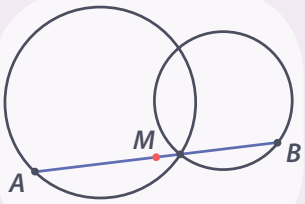
31 ★★☆ У пятиугольника есть три равных угла и две пары равных сторон, расположенных так, как показано на рисунке. Докажите, что этот пятиугольник можно вписать в окружность.

32 ★★★ В окружности провели две перпендикулярные хорды AB и CD. Докажите, что расстояние от центра окружности до хорды AD в два раза меньше хорды CB.



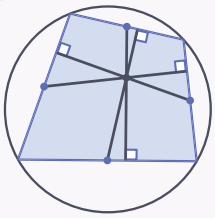
к задаче 32

33 ★★★ Через точку пересечения двух окружностей проводят произвольную прямую, которая вторично пересекает эти окружности в точках A и B. Найдите геометрическое место середин отрезков AB.

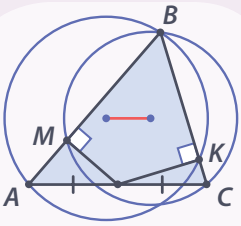


к задаче 33

34 ★★★ Из середины каждой стороны вписанного четырехугольника на его противоположную сторону опущен перпендикуляр. Докажите, что 4 такие перпендикуляра пересекаются в 1 точке.


к задаче 34

35 ★★★ На стороны AB и BC треугольника ABC из середины его третьей стороны AC опустили перпендикуляры. Основаниями этих перпендикуляров являются точки M и K соответственно. Вокруг треугольников ABK и BCM описали окружности. Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если AC = 1.



к задаче 35

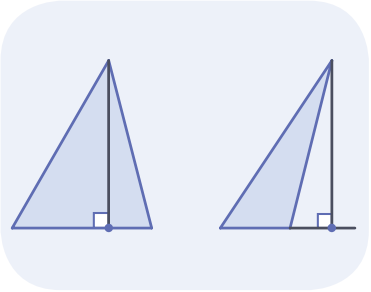
ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Окружность Эйлера

С окружностью и высотами треугольника связан один замечательный факт, открытый в 1765 году Леонардом Эйлером. Он доказал, что основания всех высот треугольника и середины всех его сторон лежат на одной окружности. С тех пор её так и называют ***окружностью Эйлера***. Скорее всего, и саму теорему о пересечении высот треугольника в одной точке, открыл тоже Эйлер – раньше упоминаний о ней нигде не было. Правда, русские современники часто звали Леонарда Эйлера более привычным именем Леонтий. Россия может гордиться тем, что этот великий математик XVIII века больше 30 лет жил и работал в Санкт-Петербурге, написал там больше 500 научных работ и свободно говорил по-русски. По сути, он и создал российскую научную школу.

Можно сказать, что вся математика приобрела современный вид после работ Эйлера. «Если вы действительно любите математику, читайте Эйлера, – говорил о нём французский учёный Лагранж, – изложение его сочинений отличается удивительной ясностью и точностью». Необходимо добавить, что научные труды Эйлера поражают и своим разнообразием. Он писал фундаментальные работы по механике, арифметике и геометрии, оптике и астрономии, музыке и устойчивости кораблей, интегральному исчислению и комплексным числам. Эйлер ввёл обозначения для числа π окружности, числа e – главного числа дифференциальных уравнений, правильно определил синус и косинус, логарифмы и многое другое.

Но давайте перейдём к его теореме об окружности. Если из вершины на сторону треугольника опустить высоту, то точку её пересечения с этой стороной называют основанием высоты треугольника. В произвольном треугольнике никакая высота не совпадает с его медианой, и основания этих высот отличаются от середин сторон. То есть для произвольного треугольника основания трёх высот и середины его сторон – это шесть различных точек. Даже четыре точки на плоскости могут не лежать на одной окружности, тем более удивительно, что лишь одна окружность проходит через все шесть данных точек. Именно этот факт и установил Леонард Эйлер. Давайте запишем это как теорему:

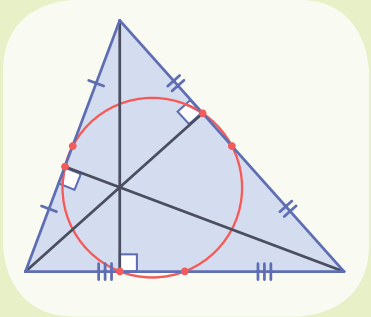


Основание высоты треугольника

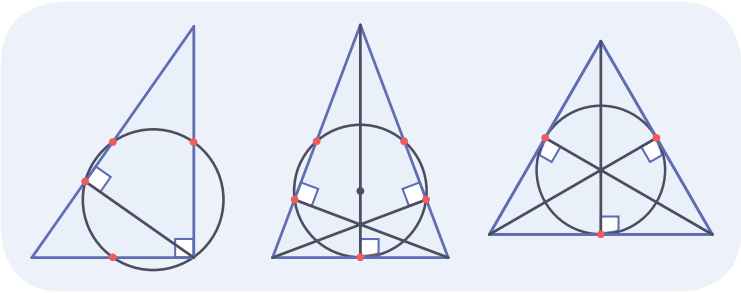
ТЕОРЕМА ОКРУЖНОСТИ ШЕСТИ ТОЧЕК

В любом треугольнике середины всех сторон и основания всех высот лежат на одной окружности.

Такую окружность для треугольника называют ***окружностью шести точек*** или ***окружностью Эйлера***.



Перед тем как доказывать теорему об окружности Эйлера, сначала посмотрите на её частные случаи. На рисунках показано, как «выглядит» окружность Эйлера для прямоугольного, равнобедренного и равностороннего треугольников.



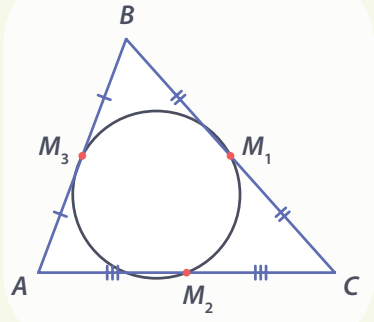
УПРАЖНЕНИЯ

35. Объясните, почему в этих частных случаях окружность Эйлера проходит так, как это показано на данных рисунках.

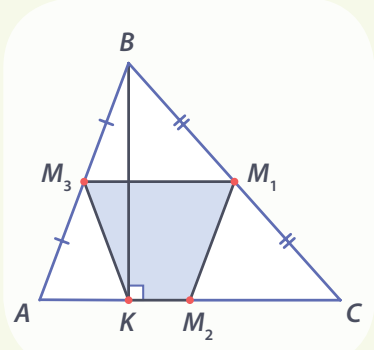
Теперь нам пора доказать теорему об окружности Эйлера в общем случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Возьмём произвольный треугольник ABC *и вначале рассмотрим только середины его сторон. Обозначим их точками* M_1, M_2 *и* M_3 *так, как показано на рисунке. Эти три точки не лежат на одной прямой, значит, через них по теореме можно провести только одну окружность. Данная окружность и будет окружностью Эйлера. Только почему на ней должны лежать основания всех высот треугольника?*



Давайте проведем пока только одну его высоту BK *к стороне* AC *и попробуем доказать, что основание этой высоты лежит на данной окружности. Посмотрите на четырёхугольник* $KM_3M_1M_2$*: чем он является? Конечно, трапецией! Ведь его сторона* M_3M_1 *– это средняя линия треугольника* ABC*, поэтому она параллельна его основанию* AC*, а значит, и отрезку* KM_2.



Помните, какие трапеции можно вписать в окружность? Правильно: только равнобокие. Значит, нам нужно будет проверить, что эта трапеция равнобокая. Давайте так и сделаем. Посмотрим на её боковые стороны M_1M_2 *и* KM_3.

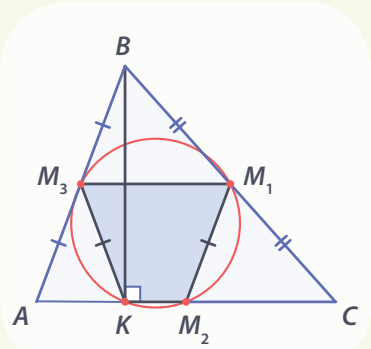
Сторона M_1M_2*, очевидно, является средней линией в треугольнике* ABC*, значит, она равна половине стороны* AB.

А что можно сказать про отрезок KM_3? Он равен половине той же стороны AB, ведь в прямоугольном треугольнике ABK он является медианой, проведённой к его гипотенузе!

Но тогда боковые стороны трапеции $KM_3M_1M_2$ равны, по определению она равнобокая, и по теореме её можно вписать в окружность. Что это значит? Это значит, что точка K должна лежать на окружности, проходящей через середины M_1, M_2 и M_3 сторон треугольника ABC, ведь другой окружности через эти точки не проведёшь!

Итак, середины всех сторон треугольника и основание одной его высоты лежат на одной окружности. А что можно сказать про основания двух других высот нашего треугольника? Конечно, они будут лежать на той же окружности, причём доказывается это точно так же!

Что и требовалось доказать.



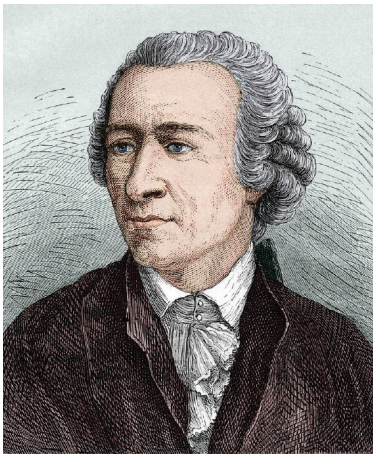
УПРАЖНЕНИЯ

36. Докажите, что на окружности Эйлера лежат ещё три точки – середины отрезков, которые соединяют его ортоцентр с вершинами треугольника. Этот факт позже обнаружил немецкий математик Фейербах, и поэтому окружность Эйлера обычно называют окружностью 9 точек.

37. Расстояние между основаниями двух высот треугольника равно радиусу его описанного круга. Найдите угол между этими высотами.

Леонард Эйлер

Леонард Эйлер родился в Швейцарии в семье сельского пастора. Его отец считал, что хорошему священнику необходимо заниматься математикой, иначе он не сможет обладать хорошей логикой. Леонард начал заниматься математикой сначала с отцом, а потом в возрасте 13 лет поступил в университет города Базеля, и ему очень повезло – математику там преподавал знаменитый Иоганн Бернулли. Довольно скоро он стал приглашать Эйлера к себе домой по субботам для занятий. В доме Бернулли вместе с его сыновьями юный Леонард разбирал трудные места из книг по математике и решал сложные задачи. Через четыре года он получил степень магистра искусств, ещё через год опубликовал свой первый научный труд, а на следующий год по приглашению отправился в далёкую Россию.

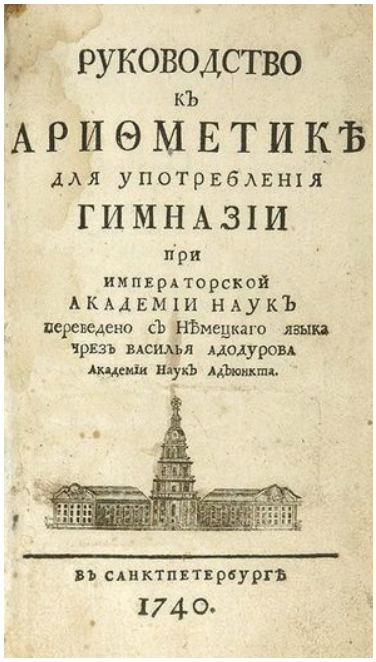


Здание Российской Академии наук, XVIII век

Это была северная страна, в которой только что открылась своя Академия наук. Устроить такую Академию по совету Лейбница пожелал царь Пётр I, но слова «наука» в русском языке тогда ещё не существовало, поэтому Академию назвали на французский манер «*де сиянс Академия*». Размещаться она должна была в здании Кунсткамеры.

Сподвижники Петра Великого поначалу сомневались в необходимости такого заведения. Ему говорили, что «учить некого, ибо без нижних школ оная академия с великим расходом бесполезна будет». На что Пётр отвечал так: «Я имею жать скирды великие, а мельницы нет». Потому и решил он строить эту «водяную мельницу без воды», считая, что «хотя воды в близости нет, но довольно её в отдалении будет». Потому из Европы пригласили туда учёных, по большей части немцев, которые и стали первыми академиками. Среди них бы сыновья Иоганна Бернулли, они же позвали за собой молодого Леонарда. Сам Пётр Великий не дождался открытия Академии, он умер в 1725 году. Страной стала править императрица Екатерина I, которая интереса своего мужа к наукам не разделяла. Тем не менее, Академию она открыла, хотя «похвальные речи учёных и не были понятны Её Величеству». Ведь говорили они все по-немецки и на латыни. В Петербург Эйлер прибыл 6 мая 1727 как раз в день смерти Екатерины. Ему было всего 20 лет.

Поначалу в России Эйлера привлекли к самым разным работам: он конструировал пожарные насосы, рассчитывал траектории полёта пушечных ядер, уточнял географические карты и даже составлял гороскопы. Кроме того, как и все члены Академии, он обязан был преподавать в специально созданной при ней гимназии. Через год своего проживания в Петербурге Эйлер уже бегло говорил по-русски. На академических заседаниях молодой учёный делал множество докладов: «О качательном движении струн, колоколов и барабанов, о водах, вытекающих из сосудов, о плавании кораблей, работе фонтанов и надёжности мостов». В 23 года он тоже стал академиком и получил сначала место профессора физики, а потом математики. Тогда же Леонтий Эйлер женился на дочери живописца, тоже швейцарца на российской службе, и приобрёл свой небольшой дом на набережной Невы. У них родилось 13 детей, но только пятеро из них пережили младенческий возраст.


РУКОВОДСТВО
КЪ
АРИѲМЕТИКѢ
ДЛЯ УПОТРЕБЛЕНІЯ
ГИМНАЗІИ
ПРИ
ИМПЕРАТОРСКОЙ
АКАДЕМІИ НАУКЪ
ПЕРЕВЕДЕНО СЪ НѢМЕЦКАГО ЯЗЫКА
ЧРЕЗЪ ВАСИЛЬЯ АДОДУРОВА
Академіи НаукЪ Адъюнкта.
ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ
1740.

«Руководство к арифметике» Леонарда Эйлера положило начало новому направлению в отечественной математической литературе.

Через три года Эйлер публикует свой первый фундаментальный труд по теоретической механике под названием «Механика или наука о движении, в аналитическом изложении». Труд этот принёс ему мировую славу. Надо сказать, что в России все свои научные сочинения Эйлер издавал на латыни – таким был язык науки в то время. А вот учебники по математике для гимназии он писал на немецком языке. Потом их уже переводили на русский. В своем «Руководстве к арифметике» для гимназий Эйлер в доступной форме пытался давать не только правила вычислений, но и общие принципы, из которых они следуют. Можно сказать, что все российские учебники по математике вслед за Эйлером потом строились по тем же принципам. В это же время Эйлер продолжает заниматься приведением в порядок географических карт Российской империи. Он гордился тем, что «география российская приведена им в состояние гораздо исправнейшее, чем география немецкой земли». Однако эта кропотливая работа отнимала у него здоровье – в 1738 году Эйлер ослеп на один глаз.

В 1741 году Эйлер уехал из России в Германию, но и там он оставался почётным членом Российской Академии наук и продолжал выполнять важные поручения: закупал физические и астрономические приборы, сообщал обо всех новых открытиях, писал рецензии на статьи российских учёных и постоянно публиковал свои работы в журнале Академии. Среди адресатов его писем был профессор химии Михайло Васильевич Ломоносов. Леонард Эйлер высоко ценил в Михаиле Ломоносове «счастливое сочетание теории с экспериментом» и «превосходное изъяснение физических и химических явлений». Ломоносов же почитал Эйлера величайшим учёным в мире.

Профессор химии Михайло Васильевич Ломоносов почитал Эйлера величайшим учёным в мире.

Больше 10 лет в Берлине в доме Эйлера на полном пансионе жили молодые русские ученые, многие из которых стали потом академиками. В Германии Эйлеру снова пришлось заниматься не только математикой. Ему поручали надзирать за монетным двором, руководить прокладкой водопровода и даже организовывать государственные лотереи. Поначалу Эйлера приглашали и на придворные балы, но изысканностью манер он не отличался и на вопросы часто отвечал односложно. Придворные насмешливо называли его «циклопом» и писали на него злые эпиграммы.

Через 25 лет своего пребывания в Берлине Эйлер получает приглашение Екатерины Великой и снова возвращается в Россию. Ему почти 60 лет, он полон новых замыслов и везёт с собой целую гору неопубликованных рукописей. Его встречают по-королевски: императрица дарит ему крупную сумму на покупку нового дома, личного повара и определяет огромное жалование. Знаменитый окулист делает ему операцию на глазу по удалению катаракты. Однако судьба заставляет его спешить – вскоре Эйлер полностью теряет зрение.

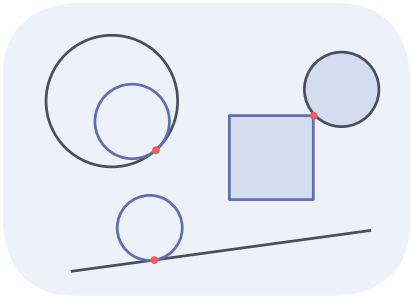
Теперь он должен работать в полной темноте и может только диктовать свои работы. Что он и делает: за оставшиеся 17 лет жизни Эйлер продиктовал больше 400 статей и 10 больших книг. Он пишет мелом на чёрном столе, а все вычисления делает в уме. В этом ему помогает феноменальная память. Известно, что Эйлер знал наизусть всю поэму Вергилия «Энеида» и помнил, с какого стиха начиналась каждая её страница. Его постоянно окружали многочисленные внуки, на руках его часто сидел ребенок, а на шее лежала кошка. И всё это не мешало ему работать! Эйлер сохранял работоспособность до последнего своего дня 18 сентября 1783 года. В этот день после обеда в кругу семьи, Эйлер обсудил с академиком Лекселем орбиту планеты Уран, выкурил трубку и перестал «вычислять и жить».

Надгробие Эйлера с надписью на латыни: «Леонарду Эйлеру – Петербургская Академия»

§ 9 КАСАТЕЛЬНЫЕ К ОКРУЖНОСТИ

Касание фигур

Глагол касаться в русском языке означает «слегка дотрагиваться», «чуть задевать». Мы все говорим: он коснулся рукой, они сыграли «в одно касание», разговор коснулся данной темы, и даже так: «это тебя не касается». Фигуры в геометрии, как и предметы в окружающем нас мире, тоже могут касаться друг друга. Как это следует понимать? Если два автомобиля коснутся друг друга при движении, на них останутся только царапины. Когда же их пути пересекаются на дороге, то это приводит к существенным повреждениям. Тогда обычно говорят: «они врезались».



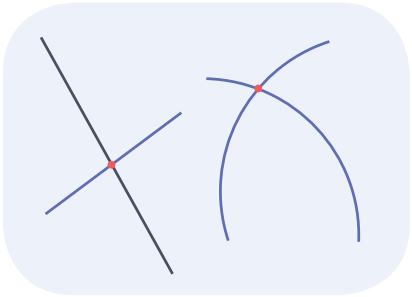
Две фигуры имеют только одну общую точку

Как же следует определить касание двух геометрических фигур? Первое, что приходит в голову, – ситуация, когда две фигуры имеют только одну общую точку. Так можно разумно определить касание прямой и окружности, двух окружностей или, например, квадрата и круга.

Касание рукой в футболе

Касание двух автомобилей

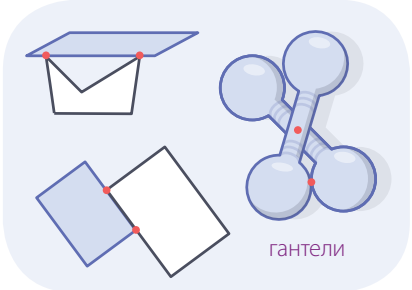
Однако это определение годится не для всех случаев. Все знают, что две прямые пересекают друг друга лишь в одной точке. Но ведь никто не скажет, что они касаются в этой точке. Так же могут пересекаться две тропинки в лесу или дуги двух окружностей. С другой стороны бывают случаи, когда геометрические фигуры имеют несколько общих точек, но интуитивно человек считает их соприкасающимися. Говорят, что шкаф касается стены, руки пианиста – клавиш рояля, а поршень мотора касается стенок цилиндра. Посмотрите на данные рисунки: можно ли сказать, что изображённые на них фигуры касаются друг друга?



Две линии пересекают друг друга лишь в одной точке

Пальцы пианиста касаются клавиш музыкального инструмента

Теннисные мячи касаются стенок круглого стакана по окружностям

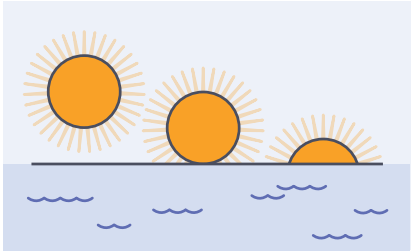


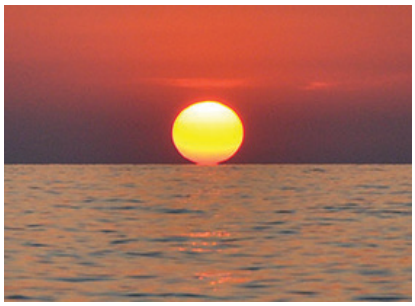
Фигуры «касаются» в нескольких точках

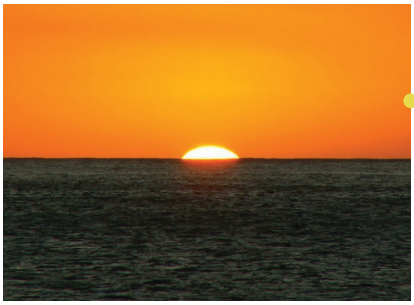
Приведённые примеры показывают, что строго определить касание геометрических фигур во всех случаях довольно трудно. Касание для нас – это всегда некое пограничное состояние фигур или предметов, которое пропадает, если немного увеличить расстояние между ними. В то же время для построения математических моделей большое значение имеет то, как данная фигура на плоскости расположена по отношению к прямой линии, а предмет в пространстве – по отношению к плоскости. Именно с этим будут связаны важные понятия опорной прямой и касательной.

Касательная к окружности

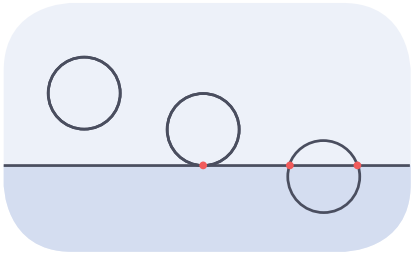
Давайте начнём издалека. Вернее – с линии горизонта... Наверняка каждый из вас видел, как на закате Солнце садится в море. Вначале они не имеют общих точек, потом солнечный диск касается линии горизонта, затем несколько минут над морем видна только его часть... Это завораживающее зрелище каждый день являет людям все стадии пересечения круга и практически прямой линии.







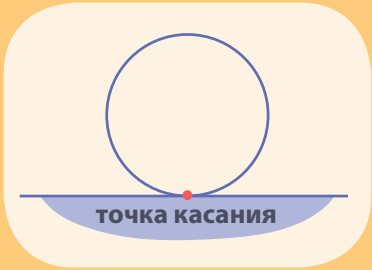
Помните, что угловой размер Солнца равен половины градуса? Сколько минут опускается оно в море на экваторе?



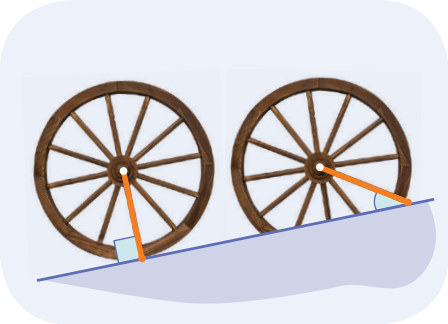
Точно так же окружность и прямая могут не иметь общих точек, могут пересекаться в двух точках, а могут иметь лишь одну общую точку. Именно такое положение и называют касанием прямой и окружности. Давайте возьмём его как определение касательной:

Прямая называется **касательной** к окружности, если она имеет с ней только одну общую точку.

Общая точка окружности и касательной к ней называется их **точкой касания**.

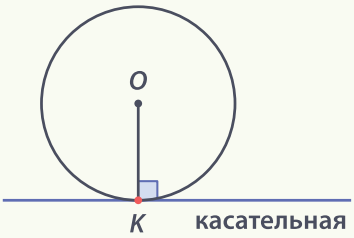


Когда колесо телеги катится по ровной дороге, в каждый момент времени с дорогой оно тоже имеет лишь одну общую точку. Давайте проведём в эту точку спицу колеса. Какой угол она будет образовывать с дорогой? Каждый понимает, что этот угол должен быть прямым. Иначе колесо должно было уйти под землю, опустится ниже дороги. Вполне естественно, что данное утверждение можно доказать геометрически. Но вначале давайте его сформулируем:



ТЕОРЕМА О КАСАТЕЛЬНОЙ

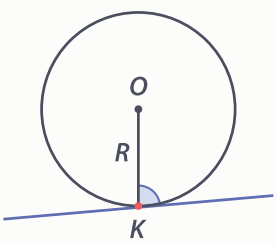
Касательная к окружности перпендикулярна её радиусу, проведённому в точку касания.

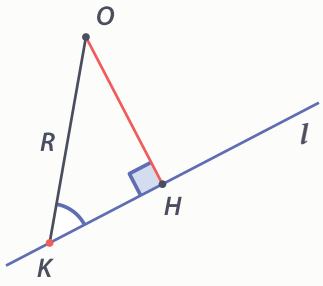


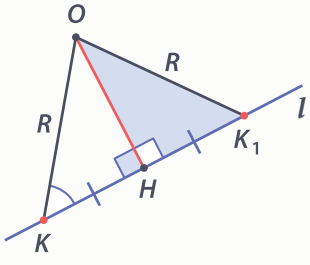
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть прямая l касается окружности с центром O в точке K. По определению касательной это означает, что прямая l и окружность больше не имеют общих точек. Будем рассуждать от противоположного. Предположим, что радиус OK нашей окружности не перпендикулярен прямой l.

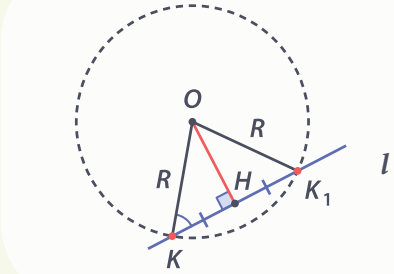
Опустим из центра O на эту прямую перпендикуляр OH. Тогда точки H и K будут различаться, и между ними окажется некоторый отрезок HK. Давайте теперь в другую сторону от точки H на прямой l отложим отрезок $HK_1 = HK$. Треугольники OHK_1 и OHK будут равны по первому признаку. Поэтому отрезок OK_1 будет равен отрезку OK, то есть он будет равен радиусу нашей окружности R.







Что это может значить? Только то, что точка K_1 должна находится на нашей окружности и одновременно на прямой l. Но тогда прямая l и окружность имеют две общие точки: K и K_1. А это противоречит тому, что они касаются. Значит, для касания прямой и окружности в точке K необходимо, чтобы радиус OK образовывал с ней угол $90°$.

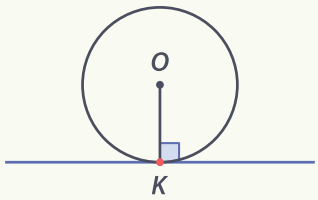


Что и требовалось доказать.

Как может звучать утверждение, обратное к теореме о касательной? Чтобы проще это было сказать, давайте саму теорему о касательной сформулируем в терминах «если, что». Тогда звучать она будет так: «Если прямая касается окружности, то она перпендикулярна её радиусу, проведённому в данную точку». Нам осталось только поменять местами условие и заключение этой теоремы. Так мы получим обратное утверждение, которое запишем как обратную теорему о касательной.

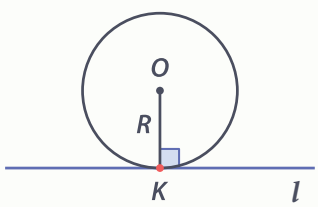
ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА О КАСАТЕЛЬНОЙ

Если прямая проходит через точку окружности и перпендикулярна её радиусу, проведённому в данную точку, то эта прямая касается окружности.

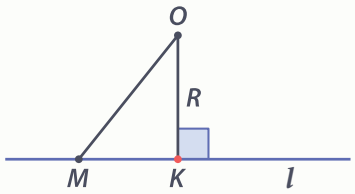


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть прямая l проходит через точку K окружности с центром O и перпендикулярна её радиусу OK. Мы докажем, что прямая l касается этой окружности.



Возьмём на прямой l любую точку M, отличную от K. Тогда отрезок OM будет длиннее отрезка OK, поскольку он является наклонной к данной прямой, а отрезок OK – перпендикуляром. Значит, расстояние от точки M до центра окружности будет больше её радиуса, поэтому она должна лежать вне этой окружности. Таким образом, все точки на прямой l за исключением точки K лежат вне данной окружности. Значит, эта прямая имеет с окружностью лишь одну общую точку, то есть является касательной.



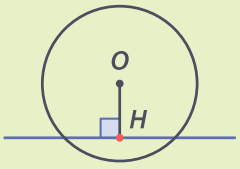
Что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

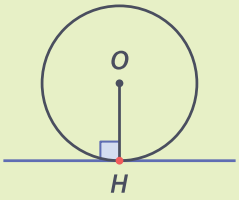
1. Докажите, что все точки круга, образованного окружностью, лежат по одну сторону от её касательной.

Помните, что расстояние от точки до прямой линии – это длина перпендикуляра, опущенного из неё на эту прямую? Так вот – расстояние от центра данной окружности до прямой однозначно определяет их взаимное расположение на плоскости. Если прямая пересекает окружность, то это расстояние будет меньше её радиуса, если вообще не имеет с окружностью общих точек – больше радиуса. А если прямая имеет с окружностью лишь одну общую точку, то это расстояние равно её радиусу. Итак, давайте запишем все случаи их взаимного расположения на плоскости:

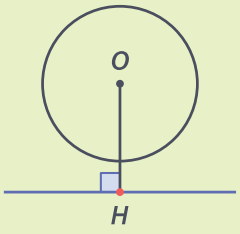
ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ



$OH < R$
Секущая



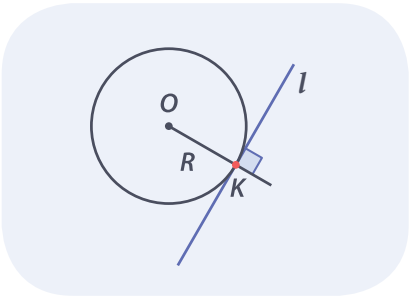
$OH = R$
Касательная



$OH > R$

Как построить касательную к окружности?

Как через точку K окружности провести касательную к ней прямую? Сделать это теперь совсем просто. Достаточно по линейке соединить точку ***K*** с центром ***O*** данной окружности и построить в этой точке прямую ***l***, перпендикулярную прямой ***OK***. По доказанной теореме прямая ***l*** будет опорной прямой для круга (***O***; ***R***), причём с данным кругом она будет иметь лишь одну общую точку ***K***. Значит, эта прямая и будет касательной к окружности.

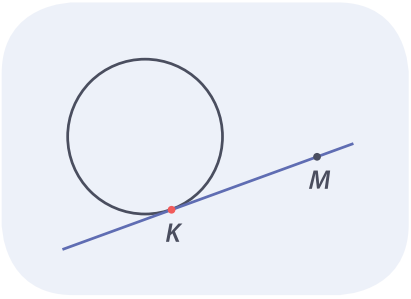


УПРАЖНЕНИЯ

2. Циркулем и линейкой постройте касательную к данной окружности, проходящую через точку K.

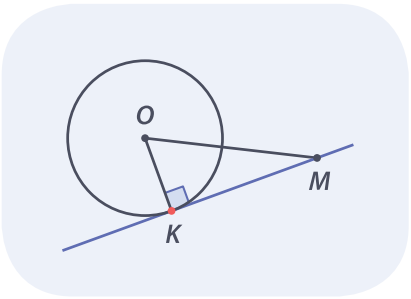
Давайте теперь построим касательную к окружности, которая проходит через точку ***M***, не лежащую на самой окружности. Как вы думаете: сколько таких касательных можно провести? Данное построение – уже более сложная задача. Помните, что пользоваться линейкой в геометрии можно только для проведения прямой через две данные точки? По-другому использовать её нельзя.

Давайте вначале сделаем предварительный анализ нашего построения.

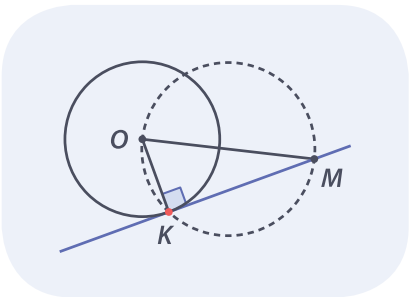


Анализ решения

*Пусть нужная нам касательная к окружности уже построена: она проходит через точку **M** и касается окружности в точке **K**. Давайте отметим центр нашей окружности – точку **O**. По теореме касательная **MK** должна быть перпендикулярна радиусу **OK** данной окружности. Значит, угол **OKM** равен* 90°. *Помните, где находятся все точки на плоскости, из которых данный отрезок **OM** виден под прямым углом? Правильно – они лежат на окружности с диаметром **OM**! Значит, нужная точка **K** должна лежать на пересечении окружности с диаметром **OM** и данной нам окружности. Имея точку **K**, по линейке уже легко построить касательную **MK**.*

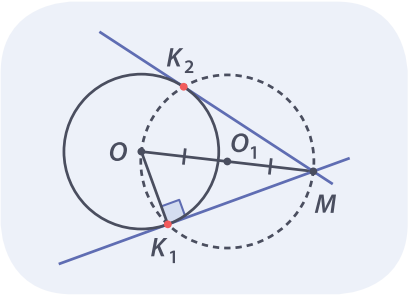


При анализе задачи мы с вами обнаружили некоторые особенности нужного нам чертежа и наметили план своих действий. Теперь нам пора перейти к самому построению.



Построение

1. *Строим центр окружности – точку O. Для этого можно взять на окружности любые три точки и построить серединные перпендикуляры к соединяющим эти точки хордам.*
2. *Строим середину отрезка OM – точку O_1.*
3. *Строим окружность с центром в точке O_1 и радиусом O_1M. Пересекаем её с данной окружностью в точках K_1 и K_2.*
4. *Строим прямые MK_1 и MK_2 – они будут касаться нашей окружности в точках K_1 и K_2.*

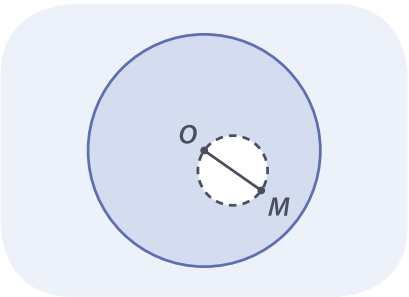


Построение закончено.

Замечание: Построение серединного перпендикуляра к отрезку и середины отрезка – это элементарные построения, на них можно просто ссылаться при записи более сложных построений. На будущее напомним, что элементарными считают всего восемь построений:

1) откладывание данного отрезка на луче;
2) построение серединного перпендикуляра к данному отрезку;
3) построение перпендикуляра из точки на прямую;
4) построение параллельной прямой;
5) построение биссектрисы угла;
6) построение треугольника по всем его сторонам;
7) откладывание данного угла от луча;
8) построение прямоугольного треугольника по его гипотенузе и катету.

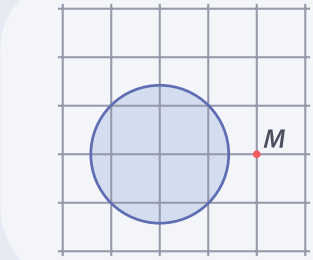
Почему из точки M к окружности можно провести не более двух касательных? На этот «глупый» вопрос как раз отвечает наше построение: каждой касательной однозначно соответствует точка её касания с окружностью, а все такие точки должны лежать на пересечении данной окружности и окружности с диаметром OM. Вы уже знаете, что две различные окружности могут пересекаться не более чем в двух точках. Вот почему и касательных из точки M к окружности можно провести не более двух!



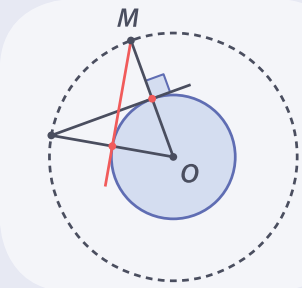
Конечно, не из любой точки плоскости к данной окружности вообще можно провести касательную. Каждому понятно, что для точек внутри самой окружности этого сделать не получится. Интересно, что наше построение учитывает и этот случай: окружность с диаметром OM целиком окажется внутри данной нам окружности, и не будет иметь с ней ни одной точки пересечения.

УПРАЖНЕНИЯ

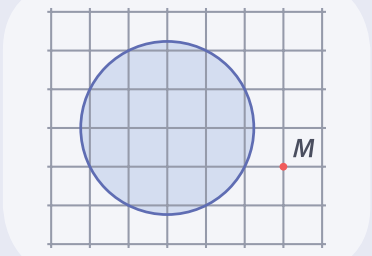
3. На клетчатой бумаге нарисована окружность и отмечена точка M. Постройте одной линейкой касательные к этой окружности, проходящие через точку M.



4. Пользуясь чертежом из Начал Евклида, постройте из точки M касательную к окружности с центром O другим способом.

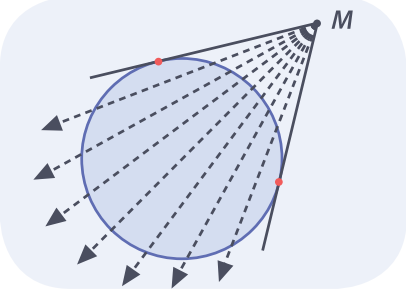


5. На клетчатой бумаге нарисована окружность и отмечена точка M. Постройте одной линейкой касательные к этой окружности, проходящие через точку M.

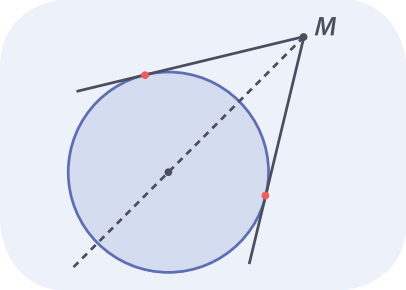


Отрезки касательных

Как мы уже выяснили, из точки вне окружности можно провести к ней ровно две касательные. Эти касательные образуют угол, а данная окружность касается его сторон. В таком случае просто говорят, что окружность ***вписана*** в данный угол. Именно под таким углом будет «видна» окружность из данной точки: все лучи, выходящие из неё и пересекающие окружность, будут лежать внутри этого угла.

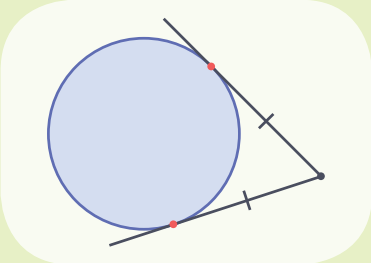


Сразу очевидно, что положение такой окружности симметрично относительно такого угла: её центр должен лежать на его биссектрисе, а точки касания со сторонами находится на равных расстояниях от вершины. Но в математике очевидным считают лишь то, что можно легко доказать! И мы с вами сейчас это докажем. Но сначала давайте сформулируем данное утверждение как свойство отрезков касательных.



СВОЙСТВО ОТРЕЗКОВ КАСАТЕЛЬНЫХ

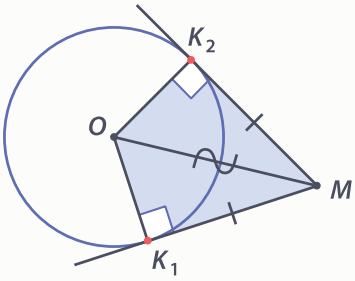
Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть к окружности с центром O *из точки* M *проведены две касательные* MK_1 *и* MK_2. *По теореме о касательной радиусы* OK_1 *и* OK_2, *проведённые в точки их касания с окружностью, равны* 90°.

Давайте рассмотрим прямоугольные треугольники OMK_1 *и* OMK_2. *Они имеют общую гипотенузу* OM *и катеты* OK_1 *и* OK_2, *равные радиусам данной окружности. Значит, эти треугольники должны быть равны по гипотенузе и катету. Следовательно, отрезки* MK_1 *и* MK_2 *наших касательных равны.*

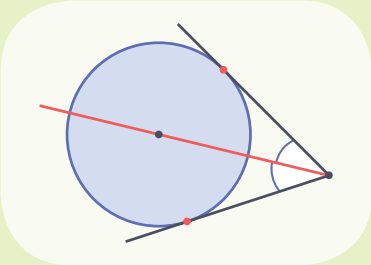


Что и требовалось доказать.

Поскольку в задачах мы часто будем встречать окружность, вписанную в некоторый угол, давайте сформулируем главное свойство такой окружности:

СВОЙСТВО ОКРУЖНОСТИ, ВПИСАННОЙ В УГОЛ

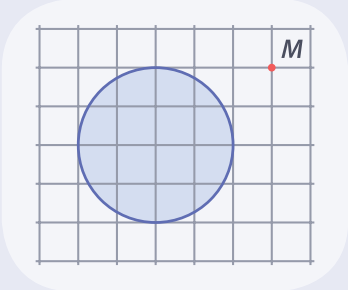
Центр окружности, вписанной в угол, находится на биссектрисе этого угла.



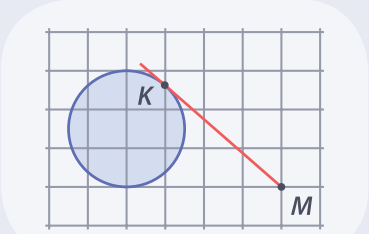
УПРАЖНЕНИЯ

6. Докажите данное свойство.

7. На клетчатой бумаге нарисована окружность и отмечена точка M. Постройте одной линейкой обе касательные к этой окружности, проходящие через точку M.



8. Докажите, что отрезок, который соединяет точки касания окружности со сторонами угла, перпендикулярен его биссектрисе.



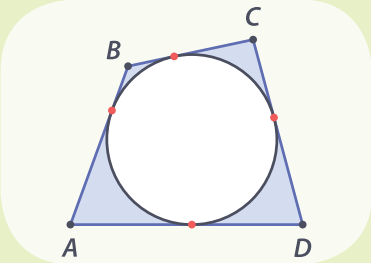
9. Найдите длину касательной MK к окружности на клетчатой бумаге, если сторона клетки равна 1.

С отрезками касательных связано множество задач и теорем, в которых эти отрезки «складывают» друг с другом. Мы приведём здесь лишь несколько самых известных примеров. Первый из них связан с четырёхугольником, все стороны которого касаются одной окружности. Вполне логично, что такой четырёхугольник называют ***описанным около окружности***. Давайте докажем его главное свойство.

СВОЙСТВО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА, ОПИСАННОГО ОКОЛО ОКРУЖНОСТИ

Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы длин его противоположных сторон равны.

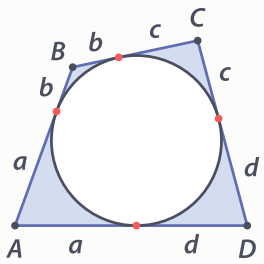
$$AB + CD = BC + AD$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть окружность касается всех сторон четырёхугольника ***ABCD****. Точки её касания разбивают его стороны всего на восемь отрезков.*

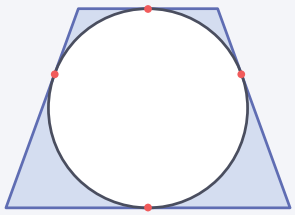
По свойству касательных те из этих отрезков, которые выходят из одной вершины четырёхугольника, должны быть равны. Обозначим их длины соответственно вершинам четырёхугольника буквами ***a****,* ***b****,* ***c*** *и* ***d****. Тогда сумма сторон* ***AB*** *+* ***CD*** *будет равна* ***a*** *+* ***b*** *+* ***c*** *+* ***d****. Тому же самому будет равна и сумма других сторон* ***BC*** *+* ***AD****. Значит, эти суммы должны быть равны.*



Что и требовалось доказать.

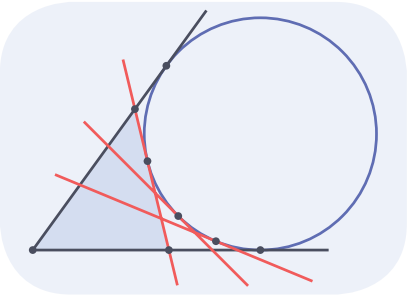
УПРАЖНЕНИЯ

10. Окружность касается всех сторон равнобокой трапеции. Верно ли, что её средняя линия равна боковой стороне?



11. Окружность касается всех сторон четырёхугольника. Можно ли его разрезать на 8 равнобедренных треугольников?

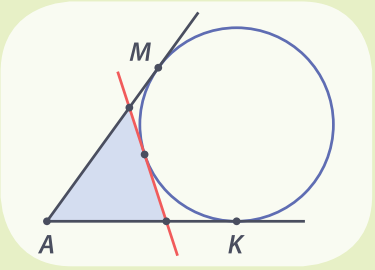
Второй важный пример связан с периметром треугольника, который «отсекает» от угла касательная к окружности, вписанной в этот угол. Оказывается, что для всех касательных, которые показаны на рисунке, периметры отсечённых ими треугольников будут одинаковы. Один из таких треугольников закрашен. И наоборот: все прямые, отсекающие от данного угла треугольники с равным периметром, касаются одной окружности, вписанной в этот угол. Давайте запишем это как свойство касательных к окружности, вписанной в угол.



СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ К ОКРУЖНОСТИ, ВПИСАННОЙ В УГОЛ

Все касательные к окружности, вписанной в угол, которые проходят между данной окружностью и вершиной угла, отсекают от него треугольники равного периметра.

Расстояния от вершины угла до точек касания данной окружности с его сторонами равно половине периметра этих треугольников.



AM = AK = 1/2 P треугольника

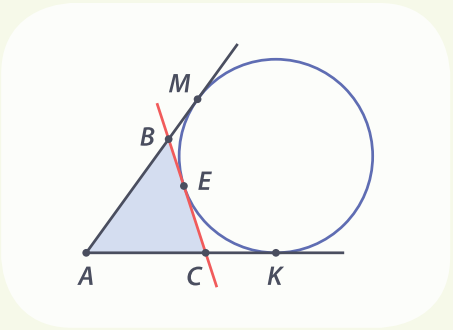
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Пусть окружность касается сторон данного угла с вершиной **A** в точках **K** и **M**. Рассмотрим любую касательную к ней, которая пересекает отрезки **AK** и **AM** в точках **B** и **C**. Обозначим точку её касания с окружностью буквой **E**. По свойству отрезков касательных **CE = CK** и **BE = AM**.*

*Значит, периметр треугольника **ABC** будет равен **AB + AC + BC = AB + AC + (BE + EC) = (AB + BM) + (AC + CK) = AM + AK**.*

*Но отрезки **AM** и **AK** равны потому, что они тоже касательные к окружности из одной точки **A**. Значит, эти отрезки равны половине периметра треугольника **ABC**. Поскольку точки **M** и **K** не зависят от проведения касательной **BC**, то периметр треугольника **ABC** будет постоянным.*

Что и требовалось доказать.

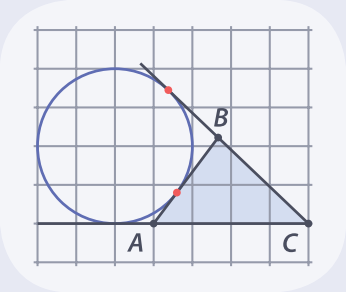


УПРАЖНЕНИЯ

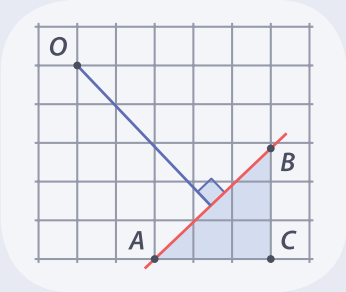
12. Окружность касается всех сторон квадрата. Касательная к ней отсекает от него меньший треугольник. Во сколько раз периметр этого треугольника меньше периметра квадрата?

УПРАЖНЕНИЯ

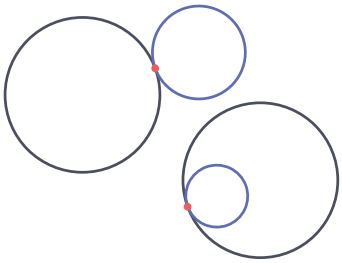
13. Найдите периметр треугольника *ABC* на рисунке с клетчатой бумагой, если сторона клетки равна 1.



14. Периметр треугольника *ABC* на клетчатой бумаге равен 10 клеткам. Найдите расстояние от точки *O* до прямой *AB*.



Касание двух окружностей



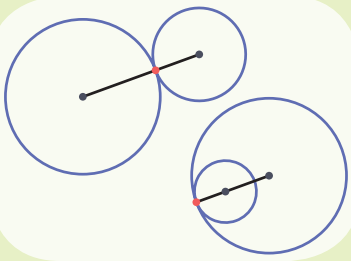
Помните, что две разные окружности могут иметь не более двух общих точек? Если у них окажутся три общие точки, то окружности просто совпадут. А что будет, если у двух окружностей будет всего одна общая точка? Правильно – тогда окружности будут касаться друг друга. Причём касание их может быть внешним или внутренним. Но давайте вначале запишем определение.

Две окружности касаются друг друга, если у них есть только одна общая точка. Эту общую точку двух касающихся окружностей называют их *точкой касания*.

Касаться две окружности могут различными способами, но в любом случае точка их касания будет находиться на одной прямой с центрами этих окружностей. Давайте запишем это как их свойство.

1 СВОЙСТВО КАСАЮЩИХСЯ ОКРУЖНОСТЕЙ

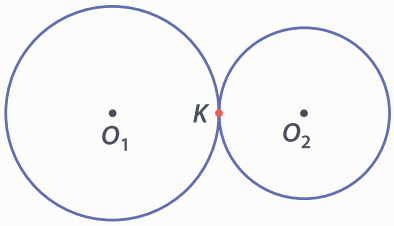
Точка касания двух окружностей лежит на одной прямой с их центрами.

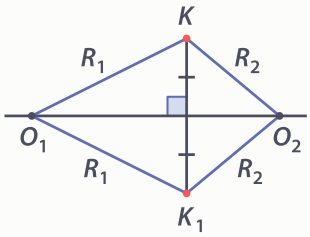


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 касаются друг друга в точке K. По нашему определению это значит, что других общих точек у этих окружностей нет. Давайте рассуждать от противоположного.

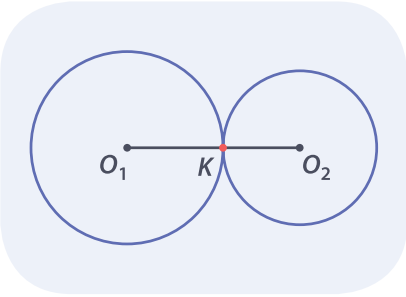
Предположим, что точка K не лежит на прямой O_1O_2. Тогда её можно симметрично отразить относительно этой прямой и получить другую точку K_1. Центры O_1 и O_2 наших окружностей будут равноудалены от точек K и K_1. Значит, точка K_1 будет находиться на таких же расстояниях от этих центров, что и точка K. Но тогда точка K_1 должна лежать на двух наших окружностях. Поэтому данные окружности должны пересекаться в двух точках: K и K_1. А по условию они могут иметь только одну общую точку. Мы получили противоречие. Таким образом, наше предположение неверно, и точка касания K должна лежать на одной прямой с центрами окружностей.



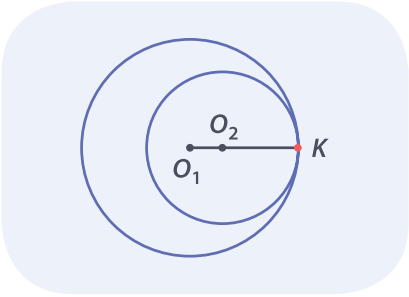


Что и требовалось доказать.

Итак, точка касания двух окружностей лежит на одной прямой с их центрами. Но где она лежит на этой прямой? Здесь возможны два случая: либо точка касания K лежит на отрезке O_1O_2, либо нет. В соответствии с этим различают случай ***внешнего*** касания двух окружностей и случай их ***внутреннего*** касания. Почему они так называются?



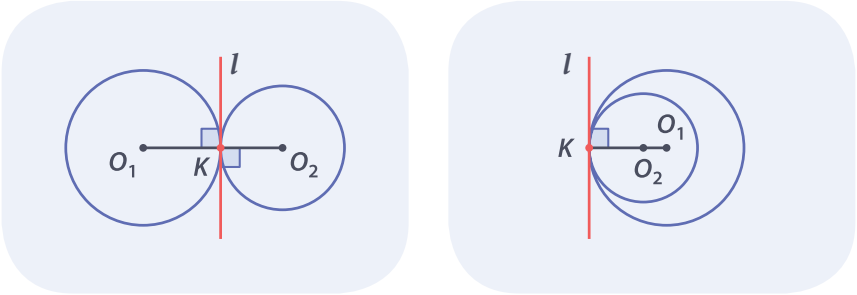
Внешнее касание окружностей



Внутреннее касание окружностей

Всё очень просто: в случае внешнего касания ни одна из окружностей не содержит другую внутри себя. При внутреннем же касании окружностей одна из них всегда оказывается внутри другой. Но дело не только в этом.

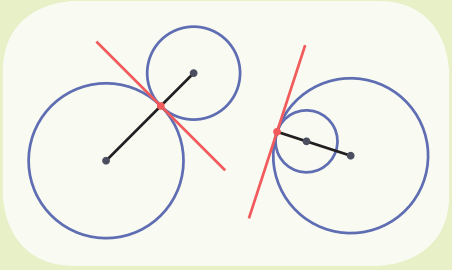
Давайте в точке касания окружностей проведём прямую l перпендикулярно линии их центров.



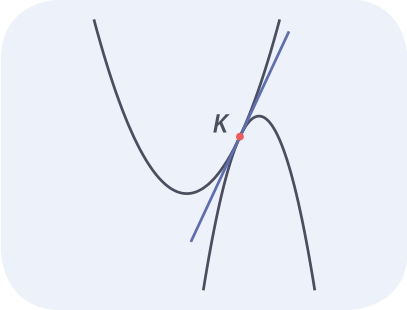
По обратной теореме о касательной эта прямая l будет касаться каждой из наших окружностей. То есть она будет их общей касательной. В первом случае окружности будут лежать по разные стороны от их общей касательной, а во втором – по одну сторону. Но главное, что в точке касания окружностей к ним можно провести общую касательную. Давайте запишем это как ещё одно важное их свойство.

2 СВОЙСТВО КАСАЮЩИХСЯ ОКРУЖНОСТЕЙ

В точке касания к двум окружностям проходит их общая касательная



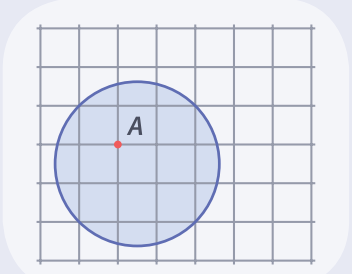
Почему это свойство является важным? А потому, что именно так, через общую касательную в одной точке определяют в математике касание более сложных кривых линий. Например, две параболы будут касаться друг друга в одной точке, если в этой точке они имеют общую касательную прямую. Как вы думаете: на приведённом рисунке параболы касаются внешним или внутренним образом?



В точке касания две кривые имеют общую касательную

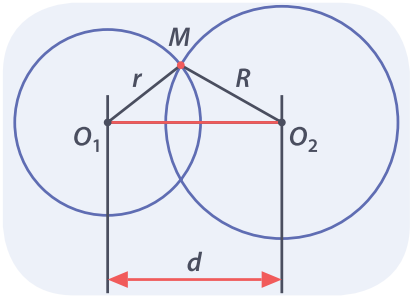
УПРАЖНЕНИЯ

15. На клетчатой бумаге изображена окружность и точка A. Постройте циркулем и линейкой ещё одну окружность с центром в точке A, которая касается первой окружности. Сколько таких окружностей можно построить?

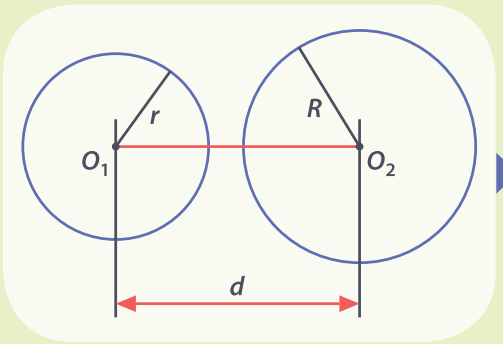


Взаимное расположение двух окружностей

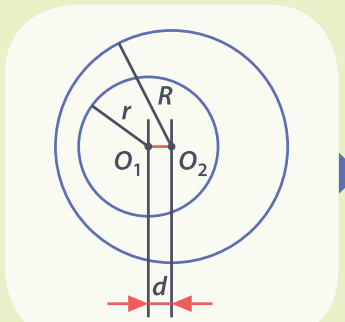
Как могут быть расположены две окружности на плоскости? Когда они пересекаются, когда касаются, а когда не имеют общих точек? Это зависит как от радиусов самих окружностей, так и от расстояния между их центрами. Давайте обозначим радиусы этих окружностей как R и r, a расстояние между их центрами O_1 и O_2 буквой d. Пусть эти окружности имеют общую точку M, не лежащую на прямой O_1O_2. Если мы соединим точку M с центрами, то получим треугольник MO_1O_2, стороны которого равны R, r и d. По известному вам неравенству в этом случае мы получим, что $R - r < d < R + r$. Можно доказать, что это двойное неравенство и есть условие пересечения двух окружностей.



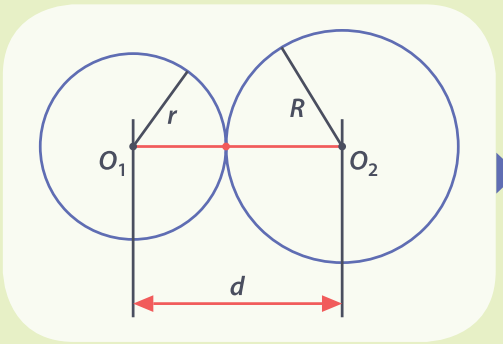
$R - r < d < R + r$



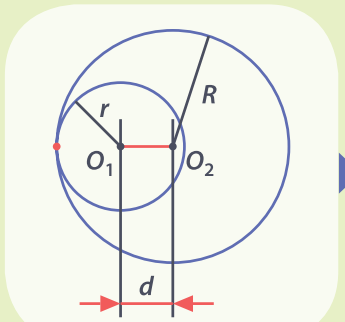
$R + r < d$



$d < R - r$



$R + r = d$



$d = R - r$

Что же будет, если $d > R + r$? В этом случае окружности будут находиться вне друг друга, и общих точек у них уже не будет. Не будет общих точек и в случае, когда $d < R - r$. Тогда одна из окружностей целиком будет лежать внутри другой.

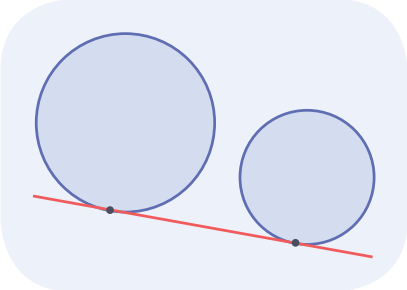
В пограничных же случаях, когда $d = R + r$ или $d = R - r$, окружности будут касаться друг друга внешним или внутренним образом.

Общая касательная к двум окружностям

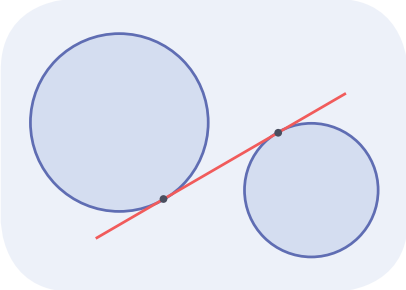
Если одна прямая касается сразу двух окружностей, то она называется их ***общей касательной***. Различают ***внешнюю*** и ***внутреннюю*** общие касательные к двум окружностям. Чем они отличаются друг от друга? Посмотрите на данные рисунки. На первом рисунке обе окружности находятся по одну сторону от касательной, а на втором – по разные стороны. В соответствии с этим в первом случае такую касательную называют внешней, а во втором – внутренней. Давайте так и запишем:

Общую касательную к двум окружностям называют внешней, если обе окружности лежат от неё в одной полуплоскости.

Общую касательную к двум окружностям называют внутренней, если окружности лежат от неё в разных полуплоскостях.



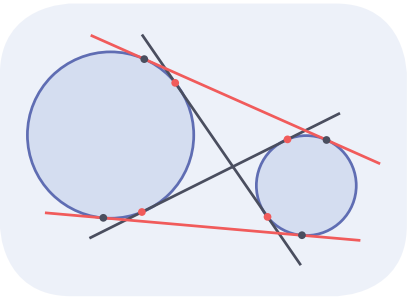
Общая внешняя касательная



Общая внутренняя касательная

Как должны быть расположены две окружности, чтобы к ним можно было провести общую внешнюю или общую внутреннюю касательную? Сколько таких касательных можно построить? Правильно ответить на эти вопросы вам поможет ваша интуиция. Мы только скажем, что больше четырёх таких касательных провести не получится.

Все четыре общие касательные к двум окружностям показаны на нашем рисунке.



Все общие касательные к двум окружностям

УПРАЖНЕНИЯ

16. Нарисуйте две окружности так, чтобы к ним можно было провести: а) только две общие касательные; б) только одну общую касательную; в) ни одной общей касательной; г) ровно три общие касательные.

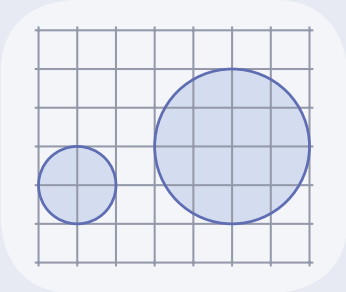
Для каждого из этих случаев проведите нужные касательные пока «на глазок».

УПРАЖНЕНИЯ

17. Докажите, что отрезки общих внутренних касательных к двум окружностям, которые лежат между точками их касания, равны.

18. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных и точка пересечения общих внешних касательных к двум окружностям лежат на одной прямой с их центрами.

19. Одной линейкой постройте две общие внешние касательные к окружностям на клетчатой бумаге.

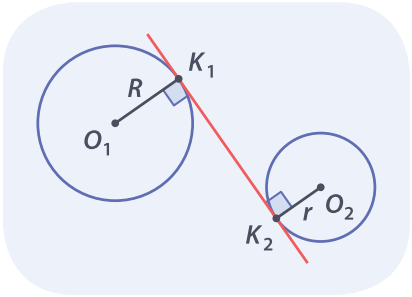


А как построить общую касательную к двум окружностям «честно», то есть циркулем и линейкой? Мы сделаем это для окружностей, которые находятся вне друг друга. В этом случае построим к ним общую внутреннюю касательную.

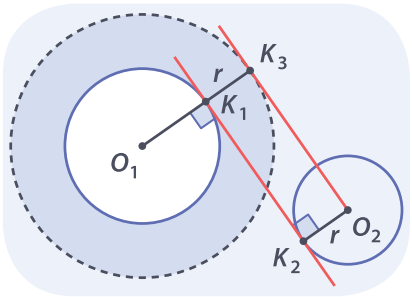
Давайте попробуем свести данную довольно сложную задачу к более простой – к построению касательной из данной точки к одной окружности. Мы начнём наше построение опять с анализа данной задачи, можно сказать, пойдём в обратную сторону от необходимого нам результата к её условию.

Анализ решения

Предположим, что общая внутренняя касательная к двум данным окружностям уже построена. Пусть их центры находятся в точках O_1 и O_2, радиусы равны R и r, а нужная нам прямая касается их соответственно в точках K_1 и K_2. По теореме касательная должна быть перпендикулярна радиусам этих окружностей, проведённых в данные точки. Сделаем теперь важное дополнительное построение: проведём окружность с центром O_1 и радиусом $R + r$. Образно можно сказать, что первую окружность мы «надуем» как воздушный шарик до этого размера. А вторую окружность «сдуем» до одной точки O_2.

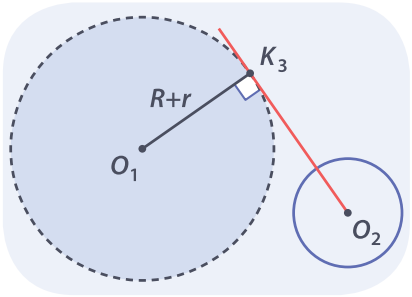


Продлим теперь радиус O_1K_1 до пересечения с этой новой окружностью в точке K_3. Тогда отрезки K_1K_3 *и* O_2K_2 будут перпендикулярны нашей касательной K_1K_2 и должны иметь одинаковую длину r. Значит, четырёхугольник $K_1K_2O_2K_3$ будет прямоугольником по признаку. Но тогда прямая O_2K_3 будет параллельна нашей касательной и перпендикулярна радиусу O_1K_3 новой окружности. Поэтому она должна касаться её в точке K_3!



Можем ли мы построить такую прямую? Конечно, можем. Ведь для этого нам осталось только циркулем и линейкой построить касательную из точки O_2 к новой «раздутой» окружности. А мы это уже научились делать.

Построив эту касательную, мы получим точку K_3, по ней потом легко построим точку K_1 и проведём через неё перпендикуляр к радиусу O_1K_1. Он и будет нужной нам общей внутренней касательной к нашим окружностям.



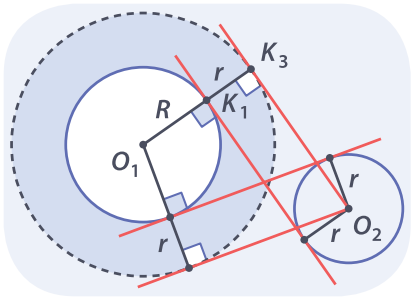
А теперь уже можно записать алгоритм построения.

Построение

1. Строим центры двух данных окружностей O_1 и O_2.
2. На любой прямой от одной точки в разные стороны откладываем отрезки, равные радиусам окружностей R и r и получаем отрезок с длиной $R + r$.
3. Строим окружность $(O_1; R + r)$
4. Из точки O_2 строим к окружности $(O_1; R + r)$ касательную O_2K_3.
5. Пересекаем отрезок O_1K_3 с окружностью $(O_1; R)$ в точке K_1.
6. В точке K_1 строим перпендикуляр к прямой O_1K_3 – эта прямая касается данных нам окружностей.

Исследование

Количество решений задачи равно числу касательных, которые из точки O_2 можно построить к окружности $(O_1; R + r)$. Так как данные нам окружности находятся вне друг друга, то расстояние между их центрами больше $R + r$. Значит, точка O_2 будет лежать вне круга $(O_1; R + r)$. Поэтому из неё можно провести к нему ровно две касательных. Следовательно, общих внутренних касательных к данным окружностям можно провести тоже две.



УПРАЖНЕНИЯ

20. Постройте циркулем и линейкой общие внешние касательные к двум данным окружностям.

21. Придумайте план построения общих внешних и внутренних касательных с помощью использования свойств подобия.

ВОПРОСЫ

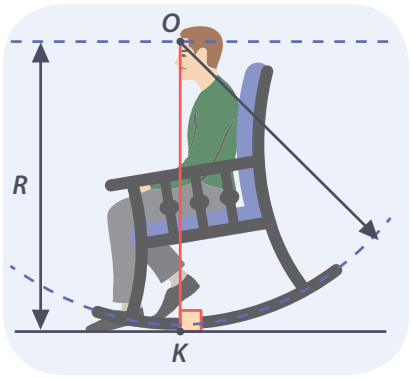
1. В каком случае прямую называют касательной к окружности?
2. В чём заключается теорема о касательной к окружности?
3. Как звучит обратная теорема о касательной?
4. Сколько касательных можно провести к окружности из одной точки?
5. Где находится центр окружности, вписанной в угол?
6. Какое свойство отрезков касательных к окружности вы знаете?
7. Какое свойство имеет четырёхугольник, все стороны которого касаются одной окружности?
8. В каком случае говорят, что две окружности касаются друг друга?
9. Какие случаи касания двух окружностей вы знаете?
10. В каких случаях две окружности не имеют общих точек?
11. При каких условиях две окружности пересекают друг друга в двух точках?
12. Какие вы знаете общие касательные к двум окружностям? Чем они отличаются?
13. Сколько общих касательных можно провести к двум окружностям?
14. Каким свойством обладают все прямые, которые отсекают от данного угла треугольники одинакового периметра?
15. В каком случае из точки к окружности можно провести только одну касательную?
16. В любой ли плоский угол можно вписать окружность?
17. Точка лежит вне окружности. Где лежат все лучи, с началом в данной точке, которые пересекают эту окружность?
18. Как в математике определяют касание в одной точке двух кривых линий?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1 ★☆☆

Кресло-качалка имеет в своём основании дугу окружности. Голова человека, сидящего в таком кресле, находится примерно в центре этой окружности. По какой линии движется голова человека, если такое кресло качается на ровном полу?

РЕШЕНИЕ: Обозначим центр окружности основания качалки буквой *O*, а точку её касания с полом буквой *K*. Пусть радиус этой окружности равен *R*. По условию голова человека находится в точке *O*. Поскольку окружность качалки касается пола, то радиус *OK* по теореме будет всегда перпендикулярен полу. Значит, и расстояние от точки *O* до пола будет равно *R*.

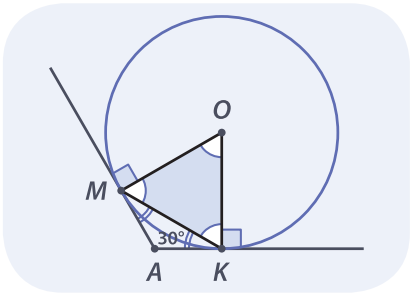


При движении кресла точка его касания с полом и голова человека перемещаются, но расстояние от центра окружности *O* до пола всегда остаётся постоянным. Поэтому точка *O* должна двигаться по отрезку прямой, параллельной линии пола, расстояние до которой равно *R*.

ОТВЕТ: голова человека движется по отрезку прямой линии

ПРИМЕР 2

Окружность касается сторон угла в двух точках. Найдите величину этого угла, если отрезок, соединяющий данные точки, равен радиусу этой окружности.

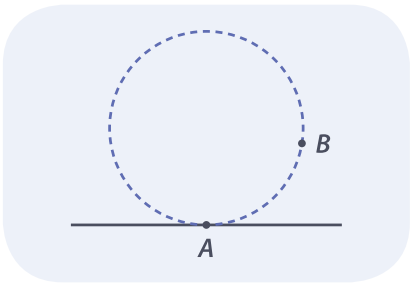


РЕШЕНИЕ: Обозначим вершину угла буквой *A*, точки касания окружности с его сторонами буквами *M* и *K*, а её центр *O*. По теореме о касательной радиусы *OM* и *OK* окружности перпендикулярны сторонам угла. Отрезок *MK* по условию задачи равен радиусу окружности, поэтому треугольник *MOK* будет равносторонним. Значит, его углы *OMK* и *OKM* должны быть равны 60°. Следовательно, углы *AMK* и *AKM* равны 90° – 60° = 30°. Из треугольника *AMK* легко найти, что его угол при вершине *A* равен 120°.

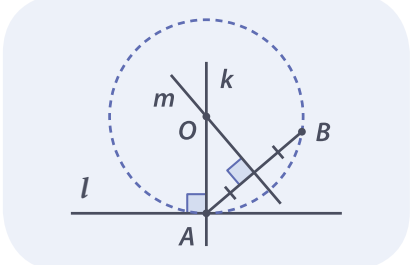
ОТВЕТ: 120°

ПРИМЕР 3

На прямой взяли точку *A*. Точка *B* не лежит на этой прямой. Постройте окружность, которая проходит через точку *B* и касается в точке *A* данной прямой.



РЕШЕНИЕ: Обозначим данную нам прямую буквой *l*, а центр нужной окружности буквой *O*. По теореме о касательной её радиус *OA* должен быть перпендикулярен прямой *l*. Кроме того, центр *O* должен лежать на серединном перпендикуляре к хорде *AB* этой окружности. Отсюда вытекает и построение:



1) в точке *A* к прямой *l* строим перпендикулярную ей прямую *k*.

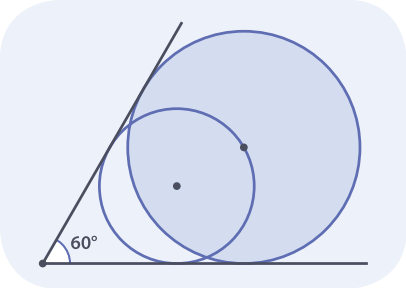
2) Строим серединный перпендикуляр *m* к отрезку *AB*.

3) Точку O пересечения прямых l и m берём за центр окружности.

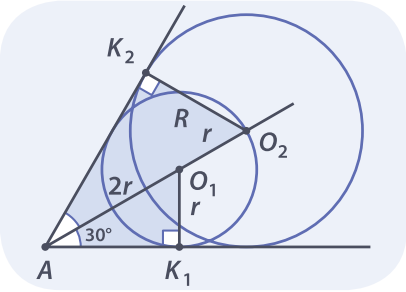
4) Строим окружность с центром O и радиусом OA – она искомая.

ПРИМЕР 4

Две окружности вписаны в угол 60°, причём одна из них проходит через центр другой. Найдите отношение их радиусов.



РЕШЕНИЕ: Пусть две окружности с центрами O_1 и O_2 вписаны в угол с вершиной A, причем O_2 лежит на меньшей из них. Обозначим радиус меньшей окружности буквой r, а точку её касания со стороной угла как K_1. Радиус большей окружности соответственно обозначим как R, и точку её касания со стороной K_2. Поскольку окружности вписаны в угол, их центры лежат на его биссектрисе. Следовательно, углы O_1AK_1 и O_2AK_2 равны **30°.**

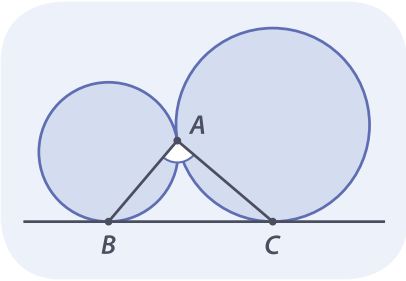


Кроме того, по теореме о касательной радиусы O_1K_1 и O_2K_2 окружностей перпендикулярны сторонам нашего угла. Посмотрите на прямоугольный треугольник AO_1K_1: он имеет острый угол 30°. По свойству такого треугольника его гипотенуза должна быть в два раза больше катета O_1K_1. Значит, $AO_1 = 2r$. Точно так же из треугольника AO_2K_2 мы получим, что $AO_2 = 2R$. Поскольку центр O_2 лежит на меньшей окружности, то $O_1O_2 = r$. Поэтому отрезок AO_2 равен $2r + r = 3r$. Значит, мы получаем уравнение $3r = 2R$. Откуда следует, что $r/R = 2:3$.

ОТВЕТ: **r/R = 2:3**

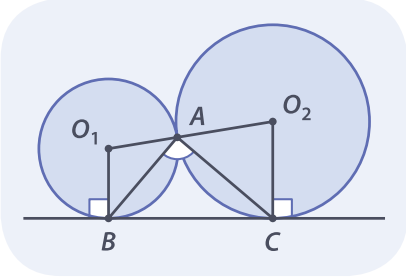
ПРИМЕР 5

Две окружности касаются внешним образом в точке A. Одна прямая касается их в точках B и C. Найдите угол BAC.



РЕШЕНИЕ: Пусть данные окружности имеют центры в точках O_1 и O_2. Их радиусы O_1B и O_2C должны быть перпендикулярны прямой BC по теореме о касательной. Поскольку окружности касаются в точке A, эта точка должна лежать на отрезке O_1O_2.

Радиусы первой окружности образуют равнобедренный треугольник O_1AB, поэтому при его основании AB углы равны α. Радиусы второй окружности образуют так же равнобедренный треугольник O_2AC с углами β при основании AC.

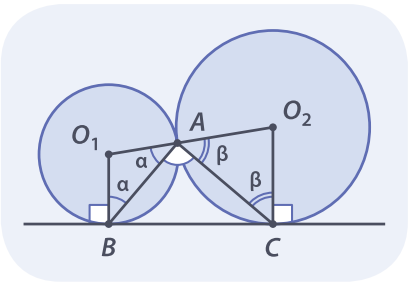


Давайте теперь обозначим величину искомого угла BAC буквой γ. Поскольку угол O_1AO_2 развернутый, то должно быть $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. В то же время углы ABC и ACB будут равны $90° - \alpha$ и $90° - \beta$ соответственно.

Запишем в треугольнике *ABC* сумму его углов: $90° - \alpha + 90° - \beta + \gamma = 180°$. Откуда следует, что $\gamma = \alpha + \beta$.

Значит, $180° = \alpha + \beta + \gamma = 2\gamma$. Поэтому $\gamma = 90°$.

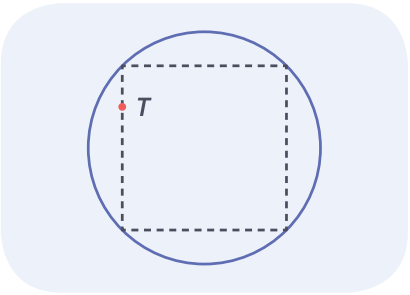
ОТВЕТ: 90°



Замечание: Другое и даже более красивое решение этой задачи можно получить, если провести в точке A общую касательную к данным окружностям.

ПРИМЕР 6 ★ ★ ★

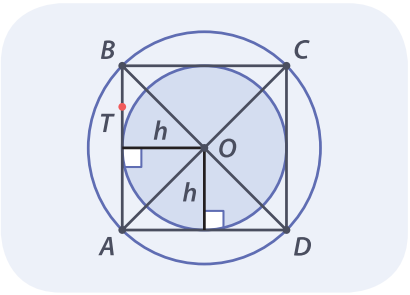
Дана окружность и точка внутри неё. Впишите в эту окружность квадрат так, чтобы данная точка лежала на его стороне.



РЕШЕНИЕ: Сделаем вначале анализ задачи.

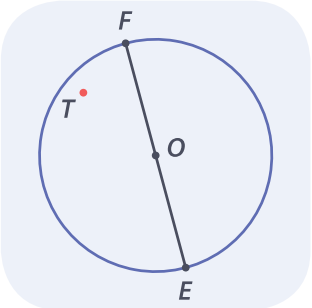
Анализ

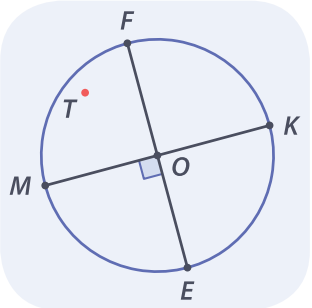
Предположим, что нужный нам квадрат *ABCD* уже построен. Легко видеть, что центр *O* данной окружности лежит на пересечении его диагоналей, а диагонали разбивают квадрат на четыре равных треугольника. Причём точно такие же треугольники получатся при проведении диагоналей любого другого квадрата, вписанного в данную окружность. Поэтому расстояния от центра окружности *O* до сторон любого такого квадрата будут одинаковы и равны *h*. Значит окружность с центром *O* и радиусом *h* будет касаться всех его сторон. Но тогда прямая *AB* должна касаться этой окружности и проходить через точку *T*. Значит, эту прямую можно построить как касательную к окружности (*O*; *h*) из точки *T*. Получив точки *A* и *B*, мы легко уже построим нужный квадрат.



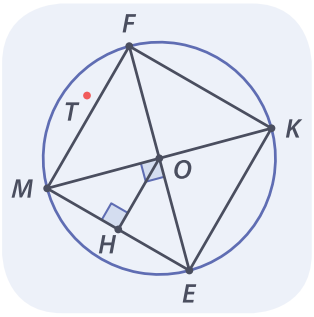
Построение

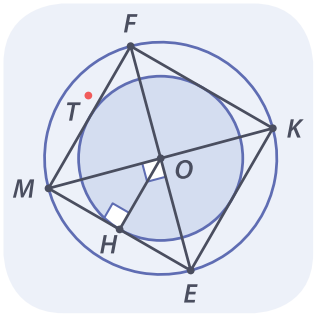
1. Строим центр окружности *O*.
2. Проводим произвольный диаметр *EF* окружности.
3. Строим диаметр *MK*, перпендикулярный *EF* и получаем квадрат *EMFK*.

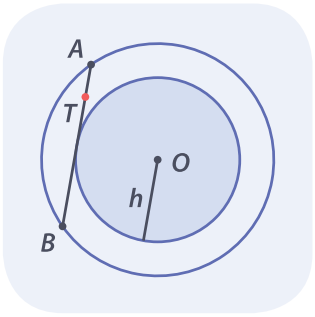


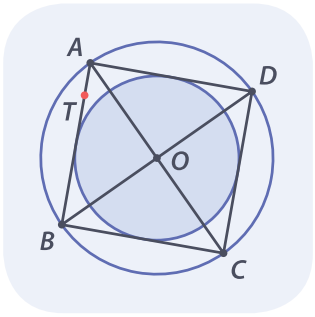


4. Опускаем из точки O перпендикуляр $OH = h$ на сторону EM этого квадрата.
5. Строим окружность $(O; h)$.
6. Проводим касательную из точки T к окружности $(O; h)$, которая пересекает данную нам окружность в точках A и B.
7. Проводим диаметры через точки A и B данной нам окружности и получаем точки C и D. Нужный квадрат $ABCD$ построен.





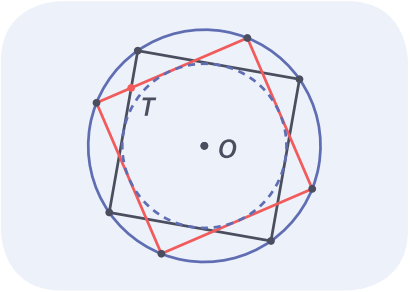




Исследование

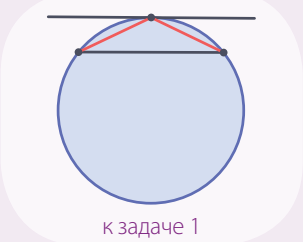
Квадрат можно построить только, если точка T лежит вне круга $(O; h)$ или на его границе. Для точек, лежащих на окружности $(O; h)$ такой квадрат можно построить единственным способом. Для точек T, лежащих вне круга $(O; h)$ таких квадратов будет два – поскольку касательных из точки T к окружности $(O; h)$ можно провести тоже две.

Оба решения показаны на рисунке.



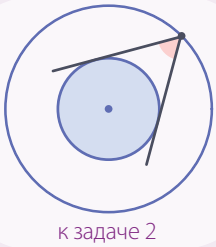
РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

1 ★☆☆ Касательная параллельна хорде окружности. Докажите, что точка касания равноудалена от концов данной хорды.



к задаче 1

2 ★☆☆ Две окружности имеют один центр, а одна из них в два раза больше другой. Найдите угол между касательными, которые проведены из точки одной окружности к другой.

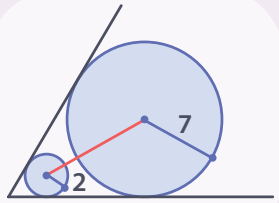


к задаче 2

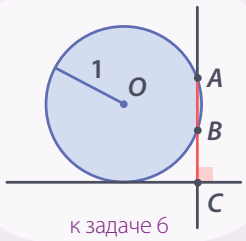
3 ★☆☆ Две касательные к окружности параллельны. Докажите, что расстояние между ними равно диаметру этой окружности.

4 ★☆☆ Две окружности касаются друг друга, а их радиусы относятся как 5 : 7. Чему равны эти радиусы, если расстояние между центрами окружностей равно 36?

5 ★☆☆ Окружности с радиусами 2 и 7 вписаны в угол с величиной 60°. Найдите расстояние между их центрами.



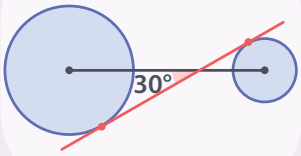
к задаче 5



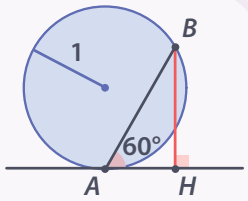
к задаче 6

6 ★☆☆ Перпендикулярно касательной к окружности провели прямую. Она пересекла окружность в точках A и B, а данную касательную в точке C. Найдите длину отрезка AC, если AB = BC, а радиус окружности равен 1.

7 ★☆☆ Общая внутренняя касательная к двум окружностям образует с линией их центров угол 30°. Найдите радиусы этих окружностей, если один из них в два раза больше другого, а расстояние между центрами окружностей равно 30.



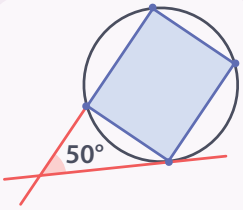
к задаче 7



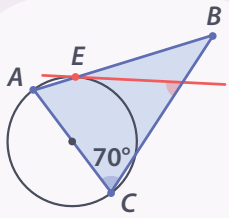
к задаче 8

8 ★☆☆ Прямая касается окружности радиуса 1 в точке A. Хорда AB образует с касательной угол 60°. Найдите длину перпендикуляра, опущенного из точки B на эту касательную.

9 ★☆☆ В окружность вписан прямоугольник. К этой окружности в его вершине провели касательную. Найдите угол между диагоналями прямоугольника, если данная касательная образует с продолжением другой стороны прямоугольника угол 50°.



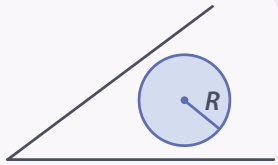
к задаче 9



к задаче 10

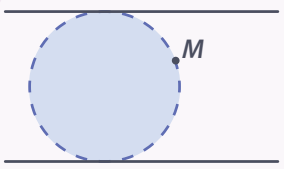
10 ★☆☆ Угол при основании AC равнобедренного треугольника ABC равен 70°. Окружность с диаметром AC пересекает его сторону AB в точке E. В данной точке к этой окружности провели касательную. Какой угол она образует со стороной BC?

11 ★☆☆ Постройте окружность данного радиуса, вписанную в данный угол.



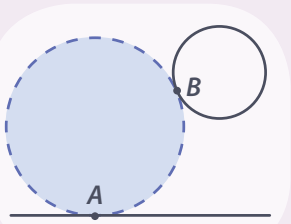
к задаче 11

12 ★☆☆ Даны две параллельные прямые и точка M между ними. Постройте окружность, которая проходила бы через данную точку и касалась данных прямых. Сколько таких окружностей можно провести?

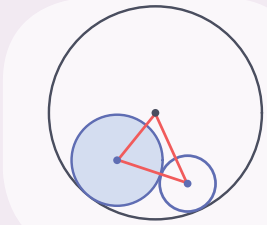


к задаче 12

13 ★☆☆ Точка A лежит на данной прямой, точка B лежит на данной окружности. Постройте ещё одну окружность, которая касалась бы в точках A и B данных прямой и окружности. Сколько решений может быть у этой задачи?

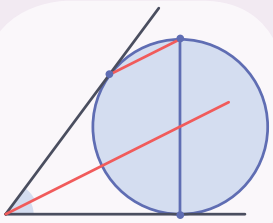


к задаче 13


к задаче 14

14 ★☆☆ Две окружности касаются внешним образом, причем каждая из них касается изнутри окружности радиуса R. Найдите периметр треугольника, образованного центрами этих окружностей.

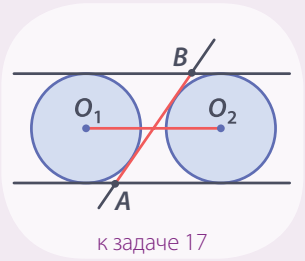
15 ★☆☆ В угол вписана окружность. Через точку её касания со стороной провели диаметр. Другой конец диаметра соединили со второй точкой касания окружности. Докажите, что полученный отрезок параллелен биссектрисе угла.


к задаче 15

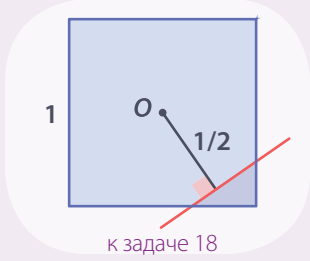
16 ★☆☆ Через точку M, лежащую внутри данного угла, проведите прямую, отсекающую от него треугольник заданного периметра. Всегда ли это возможно?

к задаче 16

17 ★★☆ Две окружности касаются двух параллельных прямых и одной секущей AB. Докажите, что расстояние между их центрами равно длине секущей.



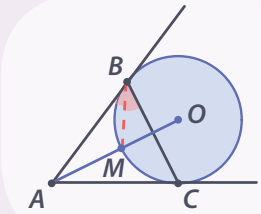
к задаче 17



к задаче 18

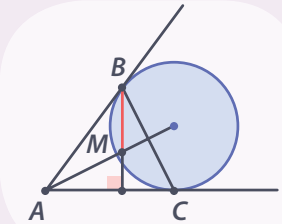
18 ★★☆ Сторона квадрата равна 1. Прямая проходит на расстоянии ½ от его центра и отсекает от квадрата треугольник. Найдите периметр этого треугольника.

19 ★★☆ Окружность с центром O касается сторон угла с вершиной A в точках B и C. Отрезок AO пересекает окружность в точке M. Докажите, что точка M лежит на биссектрисе угла ABC.



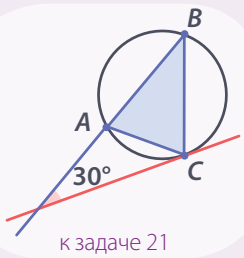
к задаче 19

20 ★★☆ Окружность с центром O касается сторон угла с вершиной A в точках B и C. Перпендикуляр из точки B на другую сторону угла пересекает прямую AO в точке M. Докажите, что отрезок BM равен радиусу данной окружности.

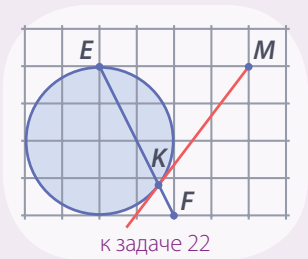


к задаче 20

21 ★★☆ Равнобедренный треугольник ABC вписан в окружность. Касательная к этой окружности, проведённая в точке C его основания образует с прямой AB угол 30°. Найдите угол при вершине B этого треугольника.



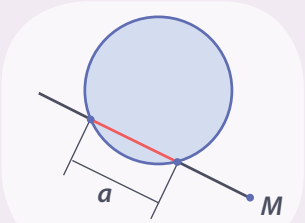
к задаче 21



к задаче 22

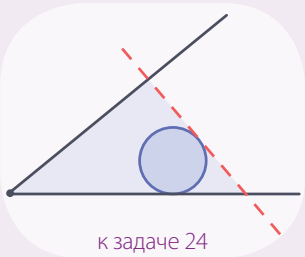
22 ★★☆ Отрезок EF на клетчатой бумаге пересекает окружность в точке K. Верно ли, что прямая MK касается этой окружности?

23 ★★☆ Через данную точку проведите прямую, на которой данная окружность высекала бы хорду, равную данному отрезку.



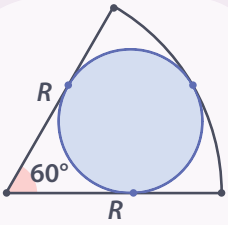
к задаче 23

24 ★★☆ Окружность касается одной стороны угла. Постройте касательную к данной окружности, которая отсечет от угла треугольник заданного периметра. Какое наибольшее число решений может иметь задача?


к задаче 24

25 ★★☆ Постройте треугольник по углу, периметру и высоте, опущенной из данного угла.

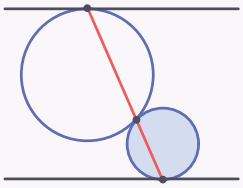
26 ★★☆ Дан сектор круга радиуса R с углом 60°. Найдите радиус окружности, вписанной в сектор.



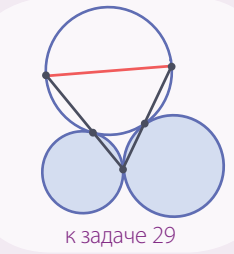
к задаче 26

27 ★★☆ Две касающиеся окружности вписаны в угол 60°. Найдите отношение их радиусов.

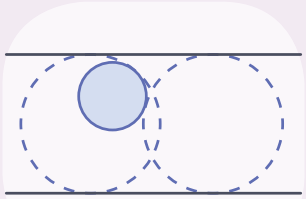
28 ★★☆ Две окружности касаются внешним образом, причем каждая из них касается одной из двух параллельных прямых так, как это показано на рисунке. Докажите, что три получившиеся точки касания лежат на одной прямой.

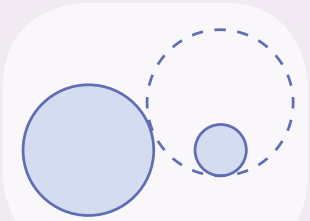

к задаче 28

29 ★★☆ Три окружности касаются друг друга внешним образом. Две прямые, проходящие через точки их касания, вторично пересекают одну из этих окружностей в двух точках. Докажите, что эти две точки – диаметрально противоположны.


к задаче 29

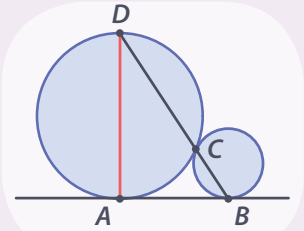
30 ★★☆ Постройте окружность, касающуюся двух параллельных прямых и данной окружности (разберите случаи внешнего и внутреннего касания).


к задаче 31


к задаче 32

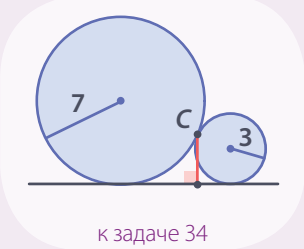
31 ★★☆ Радиусы двух окружностей равны 2 и 5, а расстояние между их центрами равно 10. Третья окружность касается одной из них внешним образом, а другой – внутренним образом. Докажите, что радиус третьей окружности не меньше 3,5.

32 ★★☆ Две окружности касаются друг друга в точке C. Одна прямая касается их в точках A и B. Прямая BC пересекает вторую окружность в очке D. Докажите, что отрезок AD является её диаметром.



к задаче 33

33 ★★☆ Две окружности с радиусами 3 и 7 касаются друг друга в точке C. Найдите расстояние от точки C до общей внешней касательной к этим окружностям.



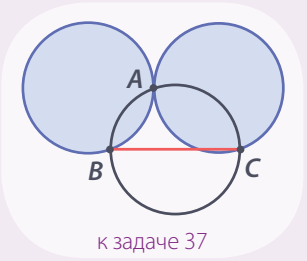
к задаче 34

34 ★★☆ Из точки A к окружности провели касательные AB и AC. Касательная к этой окружности, параллельная BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и K. Найдите MK, если AB = a, BC = b.

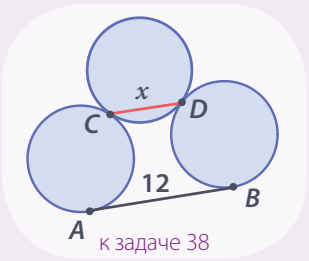
к задаче 35

35 ★★☆ Постройте три окружности, которые попарно касались бы друг друга внешним образом в трёх заданных точках.

36 ★★☆ Три окружности касаются друг друга внешним образом. Две прямые, проходящие через точки их касания, вторично пересекают одну из этих окружностей в двух точках. Докажите, что эти две точки – диаметрально противоположны.



к задаче 37

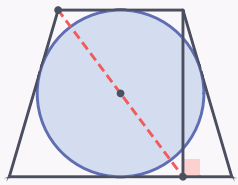


к задаче 38

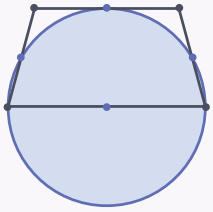
37 ★★☆ К двум равным окружностям провели общую внешнюю касательную AB. Третья окружность того же радиуса касается данных окружностей в точках C и D. Найдите CD, если AB = 12.

38 ★★☆ В трапецию можно вписать окружность. Докажите, что окружности, построенные на её боковых сторонах как на диаметрах, касаются друг друга.

39 ★★☆ В равнобокую трапецию вписали окружность. Из вершины одного её тупого угла на основание опустили высоту. Докажите, что отрезок, соединяющий основание этой высоты с вершиной другого тупого угла трапеции, проходит через центр данной окружности.



к задаче 40

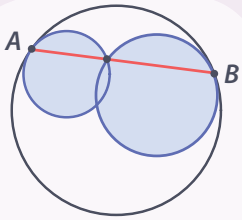


к задаче 41

40 ★★☆ На большем основании трапеции, как на диаметре, построили окружность. Оказалось, что она проходит через середины её боковых сторон и касается другого основания. Найдите углы трапеции.

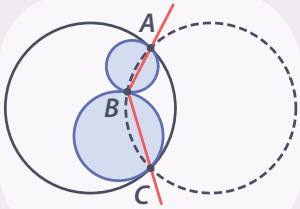
41 ★★☆ Длины трёх сторон четырёхугольника последовательно равны 3, 5 и 6. Найдите его четвёртую сторону, если некоторая окружность высекает на всех его сторонах равные хорды.

42 ★★☆ Две окружности с радиусами R и r внутренним образом касаются третьей окружности в точках A и B. Оказалось, что одна из точек их пересечения лежит на отрезке AB. Найдите радиус третьей окружности.



к задаче 43

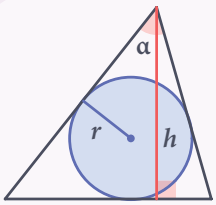
43 ★★★ Две окружности внешним образом касаются в точке B, а в точках A и C касаются третьей окружности изнутри. Оказалось, что радиус третьей окружности равен радиусу окружности, проходящей через точки A, B и C. Найдите угол ABC.



к задаче 44

44 ★★★ Постройте прямую, на которой две данные окружности высекали бы хорды, равные двум данным отрезкам.

45 ★★★ Постройте треугольник по углу, радиусу вписанной окружности и высоте, проведённой из данного угла.

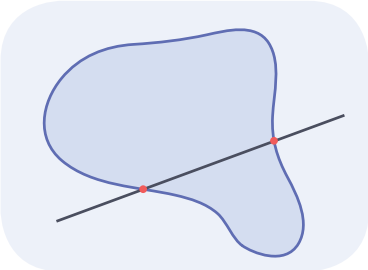


к задаче 46

ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Опорные прямые

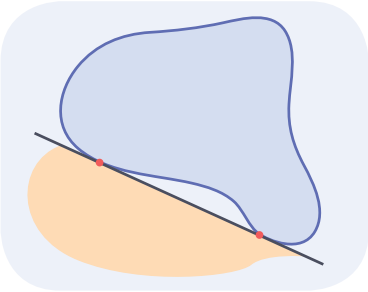
Если прямая имеет общие точки с геометрической фигурой, то на самом деле есть всего два случая их взаимного расположения. В первом случае некоторые части фигуры находятся по разные стороны от этой прямой. Тогда говорят, что прямая пересекает фигуру, и такую прямую называют ***секущей***.



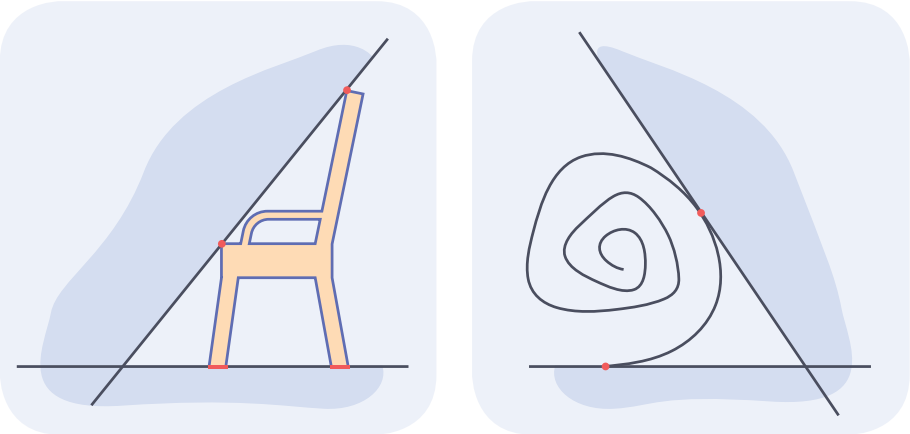
Секущая прямая

Во втором же случае все точки геометрической фигуры лежат по одну сторону от данной прямой или на ней самой. Тогда эту прямую называют ***опорной прямой*** фигуры.

Своё название опорная прямая получила потому, что фигуру можно, говоря образно, «опереть» на неё, как твёрдый предмет опирают о стену. На данных рисунках показаны геометрические фигуры и несколько опорных прямых к ним.



Опорная прямая



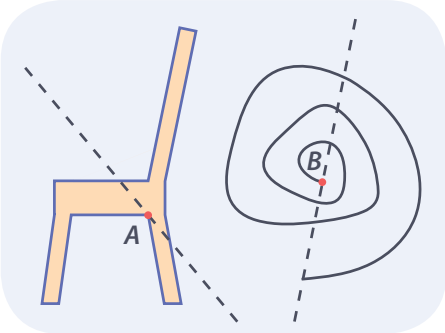
Опорные прямые к фигурам

Давайте запишем ещё раз:

Прямую называют опорной прямой для фигуры, если с ней она имеет общие точки, а все другие точки этой фигуры лежат в одной полуплоскости относительно данной прямой.

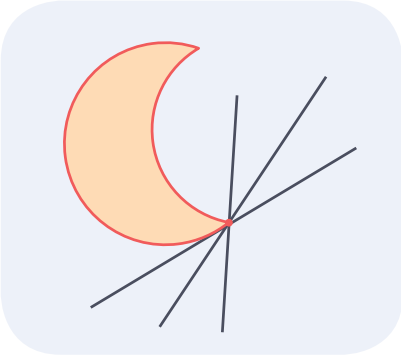
Как видно из рисунков, опорная прямая фигуры может иметь с ней одну общую точку, несколько таких точек или даже целый отрезок. А всегда ли через точку на границе фигуры можно провести такую прямую?

Те же рисунки показывают, что сделать это можно не всегда. Например, через точки *A* и *B* данных фигур опорные прямые к ним никак не проведёшь. Правда, такие точки бывают только у невыпуклых фигур. Можно доказать, что если фигура выпуклая, то через любую точку на её границе всегда проходит опорная прямая.



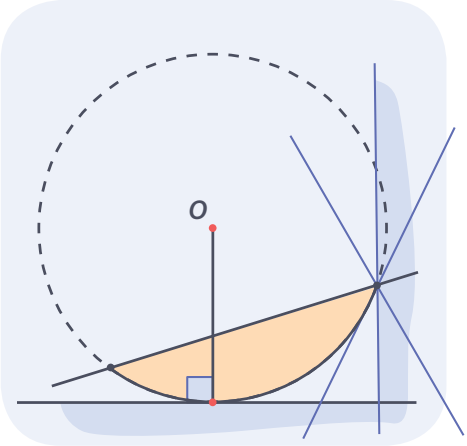
Иногда через точку фигуры проходит даже несколько опорных прямых. Такие точки называют ***вершинами*** фигуры. Наоборот, если в данной точке граница у фигуры не имеет вершин и углов, то в этой точке к ней можно провести не более одной такой прямой.

Через эту точку фигуры проходит лишь **одна** опорная прямая



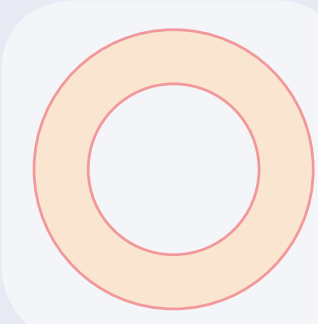
Через вершину фигуры проходит **несколько** опорных прямых

Касательная к окружности является также и опорной прямой для образованного ею круга. Однако для части круга это уже не всегда верно. На данном рисунке показан сегмент круга и несколько его опорных прямых. Видно, что некоторые из них не касаются окружности данного сегмента. Почему так происходит? Как раз потому, что в отличие от целого круга, сегмент имеет две особые точки – вершины. Именно в этих вершинах к сегменту круга можно провести несколько опорных прямых.



УПРАЖНЕНИЯ

22. Отметьте все точки фигуры в форме кольца, через которые к ней можно провести опорную прямую.

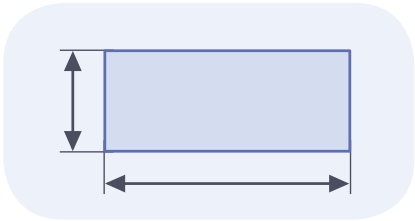


23. Отметьте все точки на границе «вазы», через которые к ней можно провести опорную прямую.
А через какие точки можно провести несколько таких прямых?

УПРАЖНЕНИЯ

24. Нарисуйте геометрическую фигуру, состоящую из дуг окружностей и имеющую только три точки, через которые к этой фигуре можно провести опорную прямую.

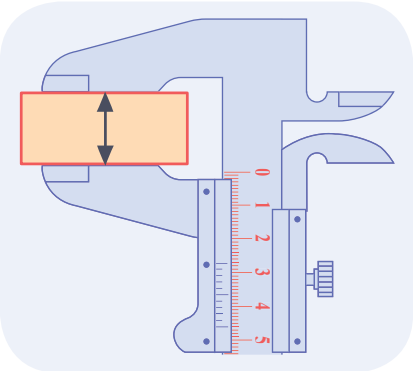
Фигуры постоянной ширины

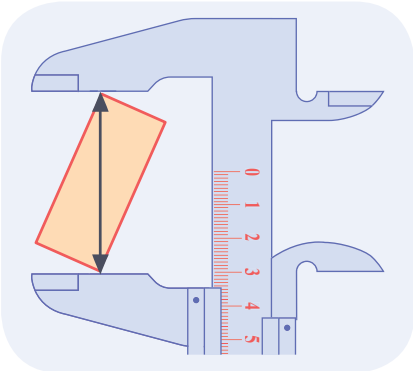


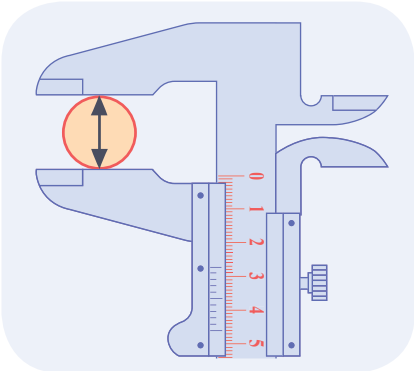
Что такое ширина фигуры? Например, у письменного стола есть и длина, и ширина. Так же можно сказать про размеры комнаты или кровати. Почему так говорят? А потому, что длина и ширина в нашем понимании – это всегда стороны некоторого прямоугольника. Более длинная его сторона – это его длина. Более короткая – ширина. Хорошо, а теперь скажите, какая длина может быть у круга? Наверное, у круга есть только ширина... А что вы могли бы сказать про ширину овала или даже треугольника?

Как правило, в геометрии говорят о ширине фигуры лишь по данному направлению. Можно даже себе представить, что фигуру «зажимают в тиски» между двумя прямыми, параллельными этому направлению. И не удивительно, что тогда у одной фигуры по разным направлениям может быть разная ширина. Правильнее было бы вообще сказать, что

Ширина фигуры – это расстояние между двумя её параллельными опорными прямыми.



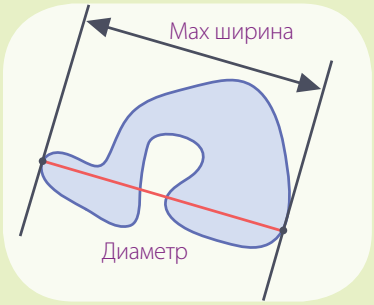




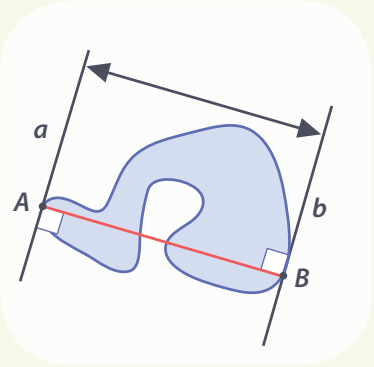
Давайте возьмём несколько фигур и посмотрим на их ширину с точки зрения геометрии. Тогда, например, наибольшей шириной прямоугольника окажется вовсе не его сторона, а диагональ! А шириной круга окажется любой из его диаметров. Можно легко доказать, что диаметр любой геометрической фигуры – это всегда и самая большая её ширина. Давайте запишем это как теорему.

ТЕОРЕМА

Диаметр геометрической фигуры равен её наибольшей ширине.

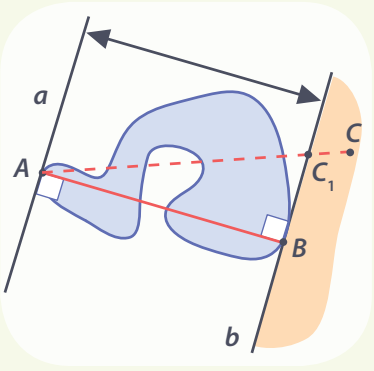


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

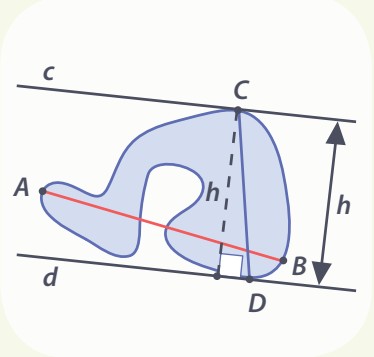


*Пусть отрезок **AB** – диаметр данной нам фигуры. Проведём через его концы прямые **a** и **b**, перпендикулярные этому отрезку. Вначале мы докажем, что две эти прямые – опорные для данной нам фигуры. Тогда сама фигура окажется целиком в полосе между этими прямыми, а расстояние между ними будет её шириной по данному направлению и равно отрезку **AB**.*

*Давайте рассуждать опять от противоположного. Предположим, что хотя бы одна точка C нашей фигуры лежит по другую сторону от прямой **b**, чем отрезок **AB**. В этом случае отрезок **AC** должен пересечь прямую **b** в некоторой точке C_1. Ясно, что тогда $AC > AC_1$. Обратите внимание: отрезок AC_1 – это наклонная из точки **A** к прямой **b**, поэтому он длиннее перпендикуляра **AB**, проведённого к ней. Значит, $AC > AB$. Но как раз этого не может быть, поскольку **AB** – диаметр нашей фигуры и он – самый длинный отрезок, соединяющий её точки. Мы получили противоречие.*



*Поэтому вся наша фигура и отрезок **AB** должны быть в одной полуплоскости относительно прямой **b**. Точно так же можно доказать, что все точки фигуры и отрезок **AB** лежат в одной полуплоскости относительно прямой **a**. Значит, данная нам фигура целиком должна находиться в полосе между прямыми **a** и **b**, поэтому её ширина по данному направлению равна диаметру **AB**.*

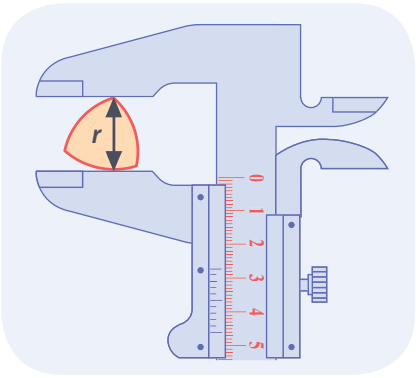


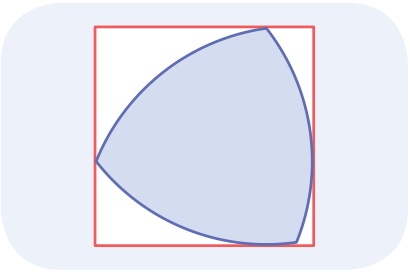
*Может ли ширина фигуры по другим направлениям быть больше её диаметра? Легко понять, что этого не может быть. В самом деле, если к данной фигуре провести две любые опорные прямые **c** и **d**, параллельные другому направлению, то расстояние **h** между ними будет меньше отрезка **CD**, который соединяет точки их касания с данной фигурой (подумайте, почему!) Кроме того, по определению диаметра фигуры должно быть $CD \le AB$. Но тогда $h \le CD \le AB$. Значит,*

ширина ***h*** *фигуры по любому направлению не может быть больше её диаметра* ***AB***.

Что и требовалось доказать.

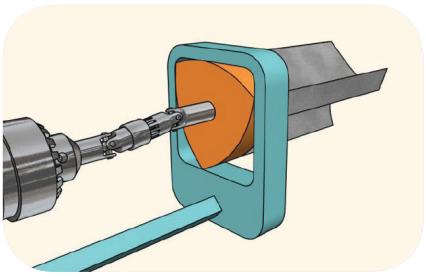
Существуют ли фигуры, у которых ширина по всем направлениям одинакова, как у круга? Оказывается, такие фигуры существуют. И совершенно логично их называют ***фигурами постоянной ширины***. Самой же простой такой фигурой является треугольник Рёло, о котором мы с вами говорили в предыдущем параграфе. Напомним, что этот криволинейный треугольник получается при пересечении трех одинаковых кругов, окружности которых проходят через центры друг друга.

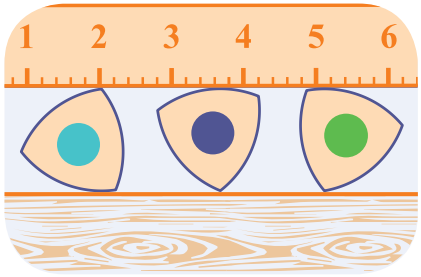




Немецкий изобретатель Франц Рёло в конце XIX века обнаружил, что такой треугольник можно свободно вращать внутри квадрата и он будет касаться сразу всех его сторон. При этом вращении центр данного треугольника движется практически по окружности, а его углы скользят по сторонам квадрата и лишь немного не «достают» до его вершин. Не удивительно, что идею такого треугольника в 1914 году использовал английский инженер Гарри Уаттс, когда изобрёл сверло, которым можно сверлить почти квадратные отверстия – их углы получаются чуть закруглёнными, а площадь отличается от нужного квадрата лишь на 1%.

Интересно, что треугольник Рёло в своём сечении имеют не только специальные свёрла для квадратных дырок, но и многие обычные карандаши и ручки. Почему их делают такими? Дело в том, что эта треугольная форма даже лучше круглой подходит для того, чтобы такой карандаш легко было держать и поворачивать тремя пальцами одной руки. Положите на стол рядом несколько одинаковых карандашей треугольной формы, а сверху на них – вашу линейку. Тогда эту линейку можно будет «катать» по этим карандашам так, как если бы они были круглыми в своём сечении. Почему линейка будет двигаться вдоль стола ровно и без скачков? А потому, что треугольник Рёло имеет постоянную ширину по всем направлениям.

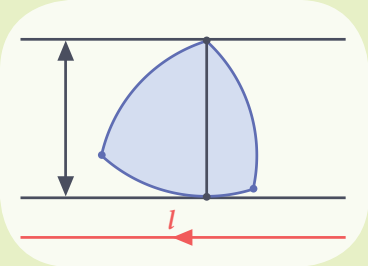




И сейчас мы это докажем.

ТЕОРЕМА

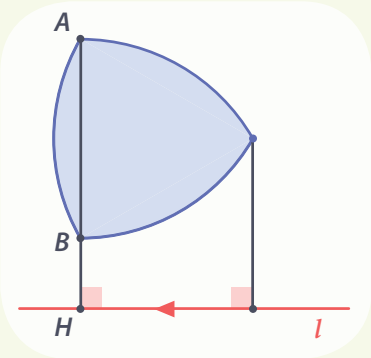
Треугольник Рёло имеет постоянную ширину.



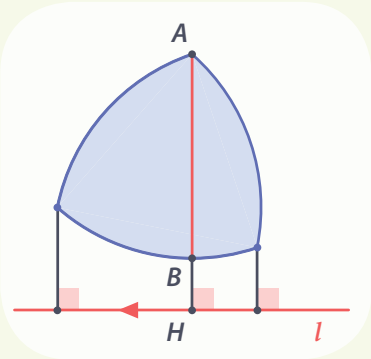
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Возьмём треугольник Рёло и найдём его ширину по направлению прямой ***l****. Это значит, что мы должны найти две опорные прямые к этому треугольнику, параллельные прямой* ***l*** *и вычислить расстояние между ними.*

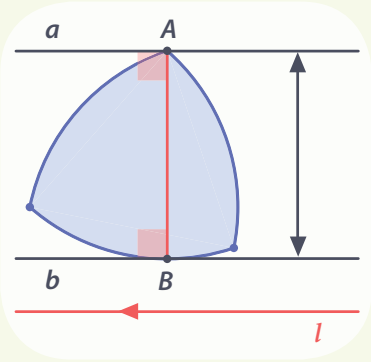
Опустим из трёх вершин этого треугольника перпендикуляры на прямую ***l****. Тогда мы получим на данной прямой две или три точки – основания этих перпендикуляров. Две точки получатся тогда, когда перпендикуляры из двух вершин треугольника Рёло будут совпадать. Тогда эти две вершины мы обозначим буквами* ***A*** *и* ***B****.*



А что делать, если точек на прямой будет три? Помните: по аксиоме из трёх точек на прямой всегда одна лежит между двумя другими. Давайте эту «среднюю» точку обозначим буквой ***H****, а ту вершину треугольника, из которой был опущен в эту точку перпендикуляр, обозначим буквой* ***A****. Тогда прямая* ***AH*** *должна пересекать треугольник Рёло ещё в одной точке – мы обозначим её буквой B.*



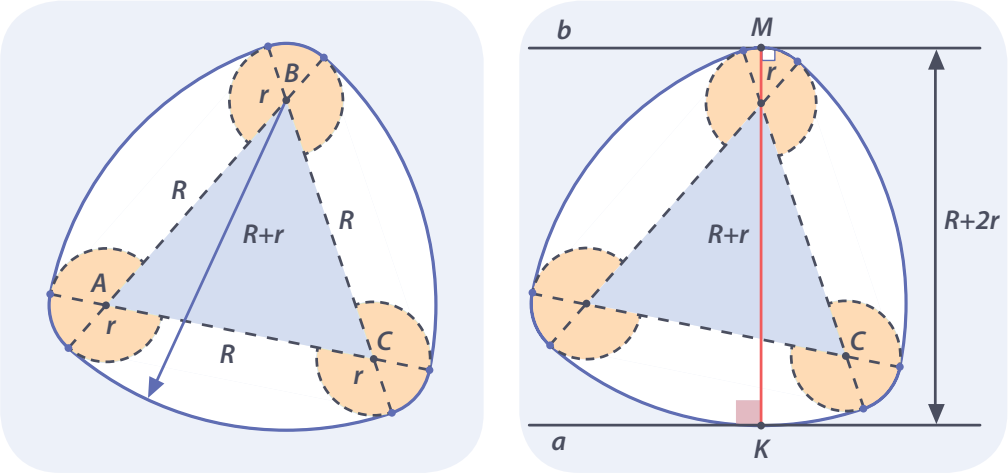
В обоих разобранных нами случаях отрезок ***AB*** *будет равен радиусу кругов, которыми образован сам треугольник Рёло. В предыдущем параграфе мы с вами уже доказали, что этот радиус равен диаметру всей фигуры. Давайте теперь через концы диаметра* ***AB*** *перпендикулярно ему проведём прямые* ***a*** *и* ***b****. По предыдущей теореме эти прямые будут опорными для всей фигуры треугольника. Кроме того, они будут параллельными прямой* ***l****. Значит, ширина треугольника Рёло по данному направлению будет равна его диаметру* ***AB****. А поскольку все его диаметры одинаковы, то и ширина треугольника Рёло по всем направлениям будет одинакова.*



Что и требовалось доказать.

Замечание: Из данного доказательства следует, что треугольник Рёло может касаться двух параллельных прямых либо своей вершиной, либо дугой окружности.

Существуют ли фигуры постоянной ширины, у которых нет углов? Оказывается, они тоже есть. Давайте построим такую фигуру по принципу того же треугольника Рёло. Возьмём равносторонний треугольник *ABC* со стороной *R* и в его вершинах построим три окружности с меньшими радиусами r. Теперь из точек *A*, *B* и *C* построим ещё три окружности с радиусами *R* + *r*. Нужная фигура получится, если дуги больших окружностей «состыковать» с дугами меньших в точках *K*, *M* и других. Угла в «точках стыка» между дугами разных окружностей не будет, поскольку в этих точках у них будет общая касательная (тоже имеет постоянную ширину по всем направлениям. Попробуйте это доказать уже самостоятельно.



УПРАЖНЕНИЯ

25. Докажите, что диаметр показанной фигуры равен R+2r.

26. Докажите, что показанная на данном рисунке фигура имеет постоянную ширину.

По аналогии с треугольником Рёло можно построить и многоугольные фигуры постоянной ширины тоже с «закруглёнными» углами. Это позволяет использовать их вместо обычных круглых монет. Такие монеты не раз чеканились в Великобритании.

УПРАЖНЕНИЯ

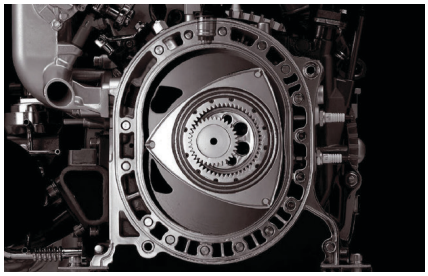
27. Попробуйте догадаться, как «устроена» такая монета, если по всем направлениям она имеет постоянную ширину.

28. Треугольники Рёло можно встретить даже на стрельчатых окнах готических соборов. Посчитайте, сколько их на данной фотографии.

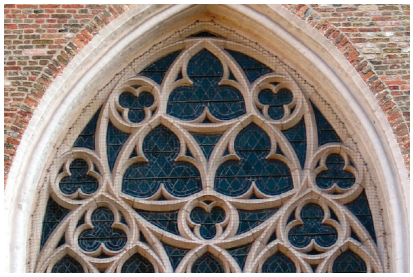
Впрочем, фигуры постоянной ширины широко используют не только на монетном дворе Англии.

Треугольник Рёло – это движущаяся часть многих кулачковых механизмов, которые обычное движение ротора по окружности переводят во возвратно-поступательное, или толкательное. Такие механизмы использовались в паровозах, кинопроекторах и швейных машинках. На основе треугольника Рёло основан принцип действия двигателя внутреннего сгорания Ванкеля, в котором нет ни одного поршня. Такие двигатели при меньшем объёме выдают большую рабочую мощность, чем классические двигатели на поршнях. Камерами же сгорания в них служат не цилиндры, а движущиеся стороны самого вала, имеющего форму треугольника Рёло.

Треугольник Рёло
в кулачковом механизме



Двигатель Ванкеля

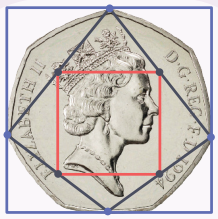


Треугольники Рёло
на окне собора

Наконец, фигуры постоянной ширины не обошли стороной и обычный велосипед. Конечно, изобрели его с круглыми колёсами. Однако и по сей день находятся любители, которые изобретают его заново – они ставят на свои велосипеды экзотические колёса – треугольные, пятиугольные... И на них катаются! Как вы думаете, какую форму имеют эти колеса?

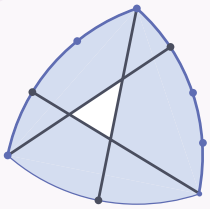
РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

46 ★★☆ Фигура постоянной ширины вписана в квадрат. Четыре точки касания фигуры образуют некоторый четырёхугольник. Докажите, что середины сторон этого четырёхугольника снова образуют квадрат.



к задаче 47

47 ★★☆ Три диаметра треугольника Рёло, идущие из трёх его вершин, делят противоположные дуги соответственно в пропорциях 1:1, 1:2, 1:3. Найдите углы треугольника, образующегося при пересечении этих диаметров.



к задаче 48

Внимание!

В связи с большой загрузкой в подготовке выхода бумажного издания материалов и во избежание задержек с выпуском последних тем мы вынуждены временно пропустить выпуск материалов по теме «Вписанные углы».

Напоминаем, что вы всегда можете пользоваться удобной вам литературой, а также активно пользоваться сборниками задач по геометрии, необходимую часть из которых мы включили в этот файл.

М. Волчкевич стр. 133–154
Уроки геометрии в задачах

- Биссектрисы пересекаются в одной точке
- Вписанные углы
- Признаки вписанного четырёхугольника

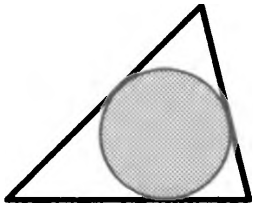
М. Волчкевич, Ф. Ивлев, И. Ященко стр. 139–151
Универсальный многоуровневый задачник по геометрии 7-9

- §5.2. Вписанные углы
- §5.3. Вписанные четырёхугольники
- §5.4. Другие углы, связанные с окружностью

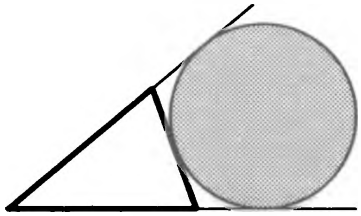
Биссектрисы пересекаются в одной точке

Окружность называется *вписанной* в треугольник, если она касается всех его сторон.

Окружность называется *вневписанной* в треугольник, если она касается одной его стороны и продолжений двух других. Всего у треугольника существуют три вневписанные окружности.

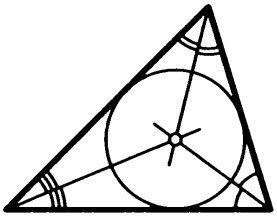


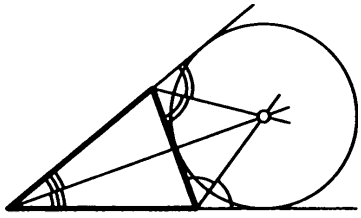
вписанная окружность



вневписанная окружность

Теорема о вписанной окружности треугольника. В любой треугольник можно вписать единственную окружность. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис всех углов треугольника.





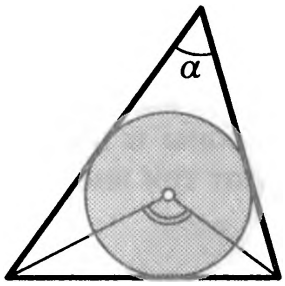
Теорема о вневписанной окружности треугольника. В любом треугольнике существует единственная вневписанная окружность, касающаяся его данной стороны. Центр вневписанной окружности лежит на пересечении биссектрис двух внешних и одного внутреннего угла треугольника.

Теорема об описанном четырехугольнике. Для того чтобы в выпуклый четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма длин одной пары его противоположных сторон равнялась сумме длин другой пары.

1. В многоугольник можно вписать окружность. Докажите, что биссектрисы всех его углов пересекаются в одной точке. Верно ли обратное?

2. Докажите терему о вписанной окружности треугольника.

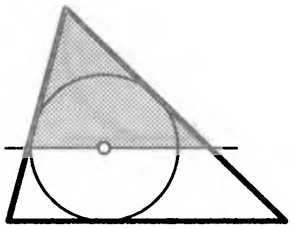
3. Окружность вписана в треугольник. Найдите угол, под которым из ее центра видно его основание, если противоположный основанию угол треугольника равен α.



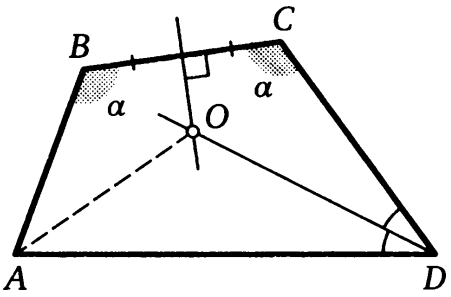
К задаче 3

4. Может ли центр вписанной окружности треугольника лежать на его средней линии?

5. Через центр вписанной окружности треугольника провели прямую, параллельную одной его стороне. Докажите, что эта прямая отсекает от данного треугольника меньший треугольник, периметр которого равен сумме двух сторон данного треугольника.



К задаче 5



К задаче 7

6. Можно ли произвольный треугольник разрезать на шесть равнобедренных треугольников?

7. В четырехугольнике $ABCD$ углы B и C равны α. Биссектриса угла D пересекает серединный перпендикуляр к стороне BC в точке O. Найдите $\angle AOD$.

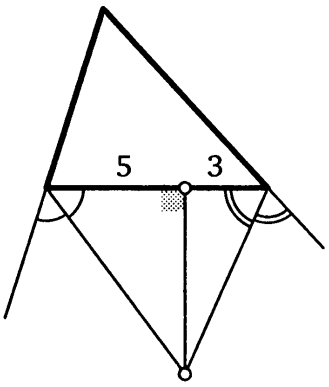
8. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$, все углы которого тупые, $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$, $\angle E = \angle F$. Докажите, что серединные перпендикуляры к его сторонам AB, CD, EF пересекаются в одной точке.

9. Докажите теорему о вневписанной окружности треугольника.

10. Сколько может быть окружностей, касающихся трех данных различных прямых?

11. Точка O — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Найдите $\angle BOC$, если $\angle BAC = \alpha$.

12. Провели биссектрисы двух внешних углов треугольника. Из точки их пересечения на его сторону опустили перпендикуляр. Он делит ее на отрезки с длинами 3 и 5. Найдите разность двух других сторон треугольника.

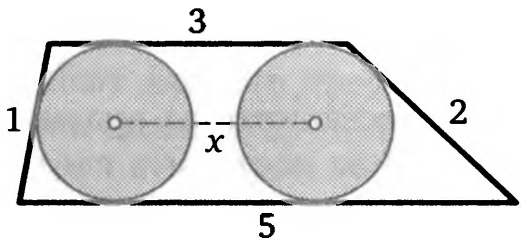


К задаче 12

13. Биссектрисы трех углов четырехугольника пересекаются в одной точке. Длины трех его сторон в указанном порядке равны 3, 4, 6. Найдите четвертую сторону.

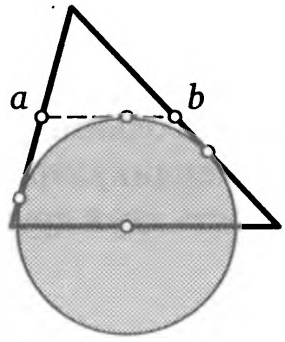
14. Окружность высекает на всех сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что биссектрисы всех его углов пересекаются в одной точке.

15. Основания трапеции равны 3 и 5, а ее боковые стороны равны 1 и 2. Каждая из двух окружностей касается трех сторон трапеции. Найдите расстояние между их центрами.

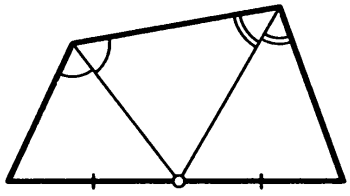


К задаче 15

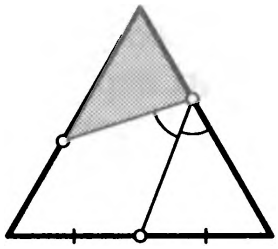
16. Окружность с центром на основании треугольника касается его боковых сторон и средней линии. Найдите основание, если боковые стороны треугольника равны a и b.



К задаче 16



К задаче 17

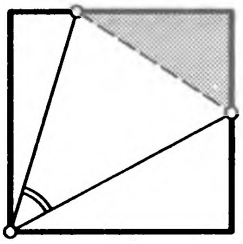


К задаче 18

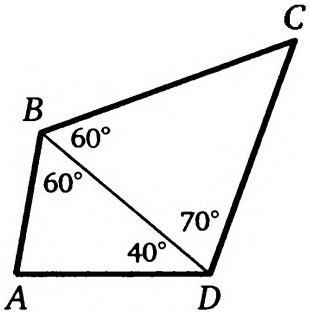
17. Биссектрисы соседних углов четырехугольника пересекаются в середине его стороны. Докажите, что либо у этого четырехугольника равны два угла, либо две стороны параллельны.

18. От угла равностороннего треугольника со стороной 1 отрезали меньший треугольник так, что биссектриса его внешнего угла делит пополам сторону исходного треугольника, противоположную данному углу. Найдите периметр отрезанного треугольника.

19. От квадрата со стороной 1 отрезали треугольник с периметром 2 так, как показано на рисунке. Докажите, что отмеченный на нем угол всегда равен 45°.



К задаче 19

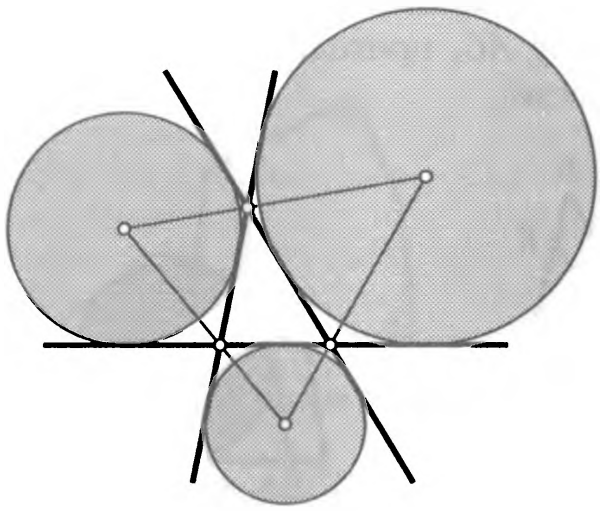


К задаче 21

20. Стороны угла пересекаются за краем бесконечного листа бумаги (полуплоскости). Как построить след его биссектрисы на листе, не выходя за край?

21. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle ABD = \angle CBD = 60°$, $\angle ADB = 40°$, а $\angle BDC = 70°$. Найдите угол между его диагоналями.

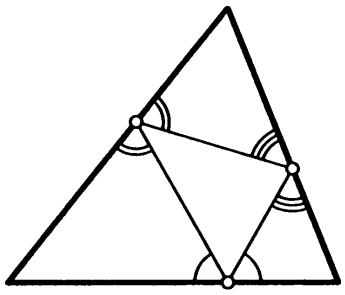
22. Восстановите треугольник по центрам трех его вневписанных окружностей.



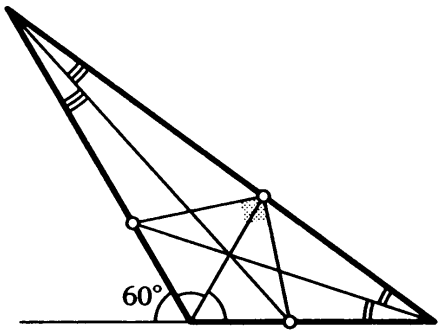
К задаче 22

23. Постройте треугольник по центрам его вписанной и двух вневписанных окружностей.

24. На сторонах треугольника выбраны три точки так, что отмеченные на рисунке углы равны. Докажите, что данные точки — основания высот треугольника.



К задаче 24

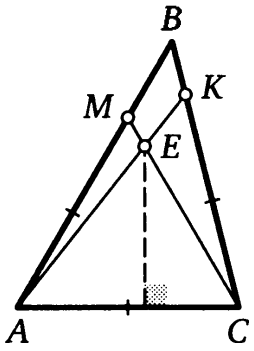


К задаче 26

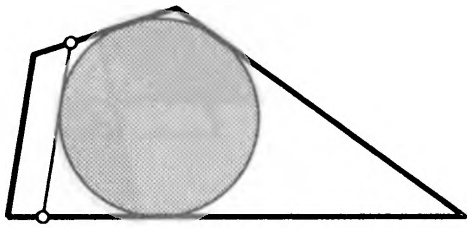
25. Основания высот данного треугольника образуют прямоугольный треугольник. Докажите, что один из углов данного треугольника равен 45°.

26. Один из углов треугольника равен 120°. Докажите, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.

27. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли соответственно точки M и K так, что $AM = AC = CK$. Отрезки AK и CM пересеклись в точке E. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки E на сторону AC, проходит через центр вписанной в треугольник окружности.



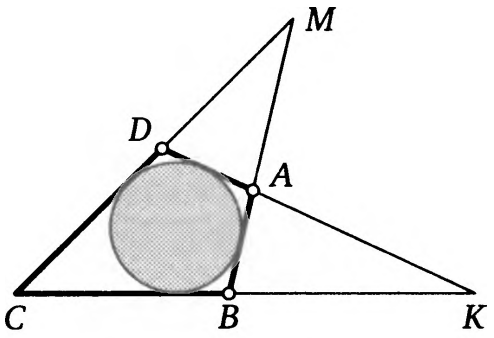
К задаче 27



К задаче 28

28. (Признак описанного четырехугольника.) Суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны. Докажите, что в него можно вписать окружность. (*Для доказательства воспользуйтесь приведенным чертежом.*)

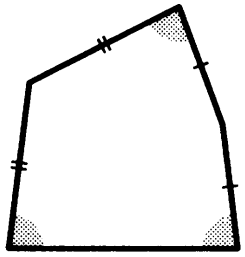
29. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а продолжения сторон AD и BC — в точке K. Докажите, что если выполняется условие $BK + BM = DK + DM$, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.



К задаче 29

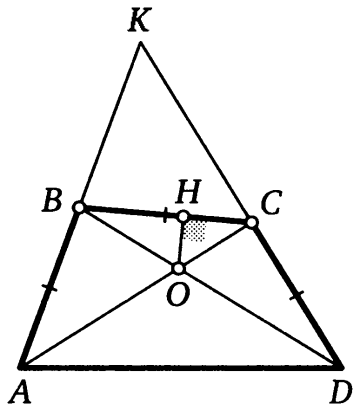
30. Про выпуклый пятиугольник $ABCDE$ известно, что $AB + CD = BC + DE$, причем его тупые углы A и E равны. Докажите, что биссектрисы трех углов этого пятиугольника пересекаются в одной точке.

***31.** У выпуклого пятиугольника есть три равных острых угла и две пары равных сторон, расположенных так, как это показано на рисунке. Докажите, что в данный пятиугольник можно вписать окружность.



К задаче 31

***32.** Про четырехугольник $ABCD$ известно, что $AB = BC = CD$, его диагонали пересекаются в точке O, а продолжения сторон AB и CD — в точке K. Из точки O на сторону BC опущен перпендикуляр OH. Докажите, что $BK + BH = CK + CH$.



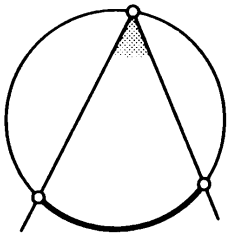
К задаче 32

33. Противоположные стороны шестиугольника попарно параллельны, а три его диагонали, соединяющие противолежащие вершины, равны. Докажите, что данный шестиугольник можно вписать в окружность.

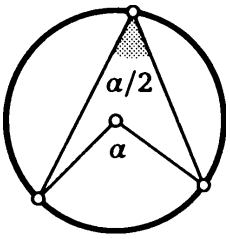
Вписанные углы

Любые два луча, выходящие из центра окружности, делят ее на две части. Каждая из этих частей называется *дугой окружности*. Два плоских угла, образованных данными лучами, называют *центральными*. Величина центрального угла, определяющего данную дугу, называется *градусной мерой дуги*.

Угол называется *вписанным в окружность*, если его вершина лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

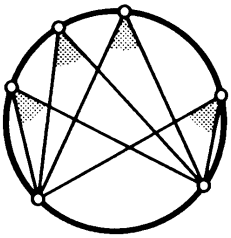


Говорят, что вписанный угол *опирается на дугу* окружности, если его стороны проходят через концы этой дуги, а вершина не принадлежит дуге.



Теорема о вписанном угле. Величина вписанного в окружность угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

Из данной теоремы следует, что все углы, вписанные в одну окружность и опирающиеся на одну дугу, равны.



Свойство вписанного четырехугольника. Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°.

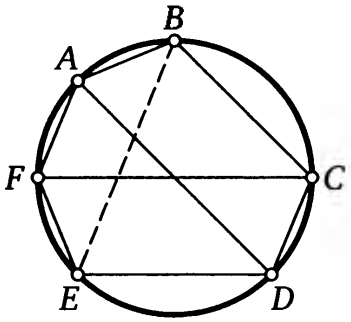
1. Верно ли такое определение вписанного угла: угол называется вписанным в окружность, если он имеет с ней ровно три общие точки?

2. В одну окружность вписаны два равных угла. Докажите, что они опираются на равные хорды. Верно ли обратное?

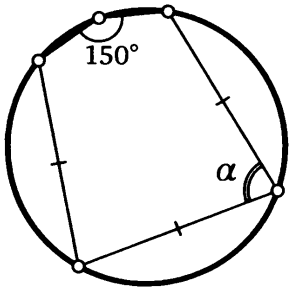
3. Трапеция вписана в окружность. Докажите, что она равнобокая.

4. В окружности проведена хорда, равная ее радиусу. Какова может быть величина угла, вписанного в эту окружность и опирающегося на данную хорду?

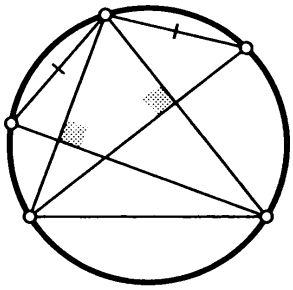
5. В окружность вписали шестиугольник $ABCDEF$. Оказалось, что в нем $AD \parallel BC$, $CF \parallel DE$. Докажите, что тогда $BE \parallel AF$.



К задаче 5



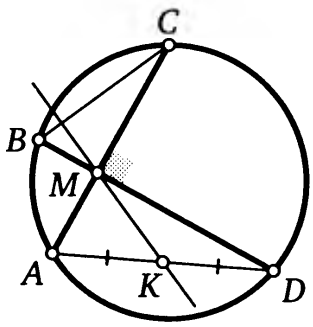
К задаче 6



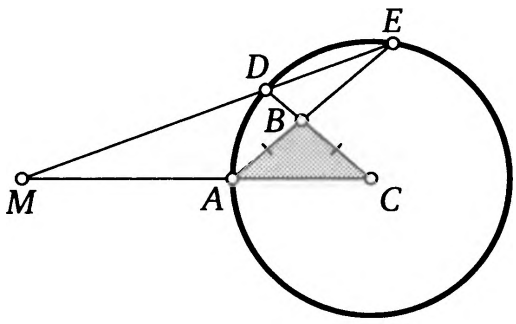
К задаче 7

6. Пятиугольник вписан в окружность. Один его угол равен 150°, а три стороны, не выходящие из вершины данного угла, равны между собой. Найдите угол α между этими сторонами.

7. В треугольнике провели две высоты. Их продолжения пересекают его описанную окружность в двух точках. Докажите, что эти точки равноудалены от третьей вершины треугольника.



К задаче 9



К задаче 10

8. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, AH — его высота. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

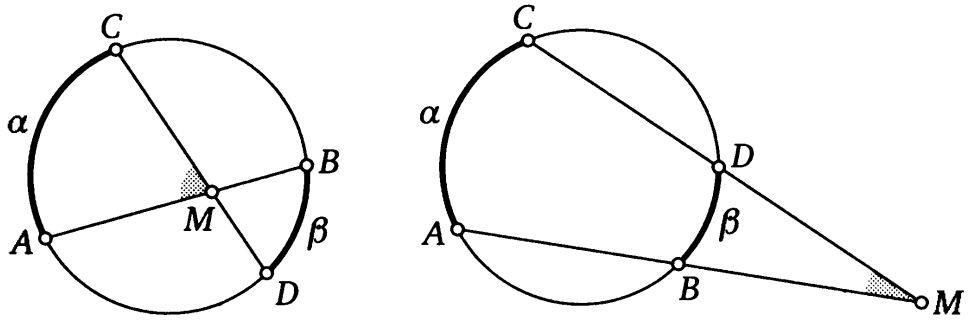
9. В круге через точку M провели две перпендикулярные хорды AC и BD. Точка K — середина отрезка AD. Докажите, что прямые MK и BC перпендикулярны.

10. Основание AC равнобедренного треугольника ABC является радиусом окружности. Продолжения боковых сторон треугольника пересекают окружность в точках D и E. Прямые DE и AC пересекаются в точке M. Докажите, что $AM = AE$.

11. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Точка I — центр вписанной в него окружности. Известно, что $\angle AOC = 60°$. Найдите $\angle AIC$. *Внимание: задача имеет 2 решения!*

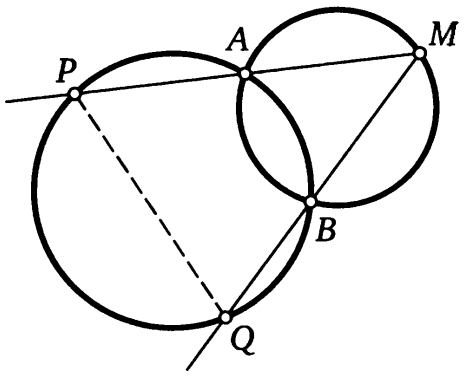
12. На основании равнобедренного треугольника взяли произвольную точку. Отрезок, соединяющий ее с противоположной вершиной, делит треугольник на два меньших треугольника. Докажите, что радиусы окружностей, описанных вокруг этих треугольников, равны.

13. Хорды AB и CD одной окружности пересекаются в точке M. Найдите угол AMC, если градусные меры дуг AC и BD равны α и β соответственно. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для случая, когда прямые AB и CD пересекаются вне круга в точке M.



К задаче 13

14. Две окружности пересекаются в точках A и B. На одной из них берется произвольная точка M. Прямые MA и MB пересекают вторую окружность в точках P и Q. Докажите, что длина хорды PQ не зависит от выбора точки M.



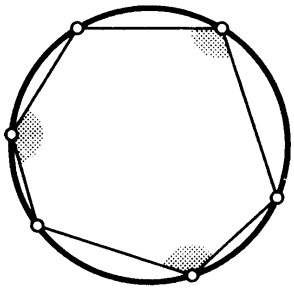
К задаче 14

15. В окружность вписан равносторонний десятиугольник $A_1A_2...A_{10}$. Найдите угол между прямыми: а) A_1A_7 и A_4A_9; б) A_7A_8 и A_3A_5.

16. Биссектрисы двух углов треугольника пересекают описанную вокруг него окружность в точках M и K. Докажите, что отрезок MK перпендикулярен биссектрисе третьего угла треугольника.

17. Докажите свойство вписанного в окружность четырехугольника.

18. Шестиугольник вписан в окружность. Найдите сумму углов при трех его не соседних вершинах.

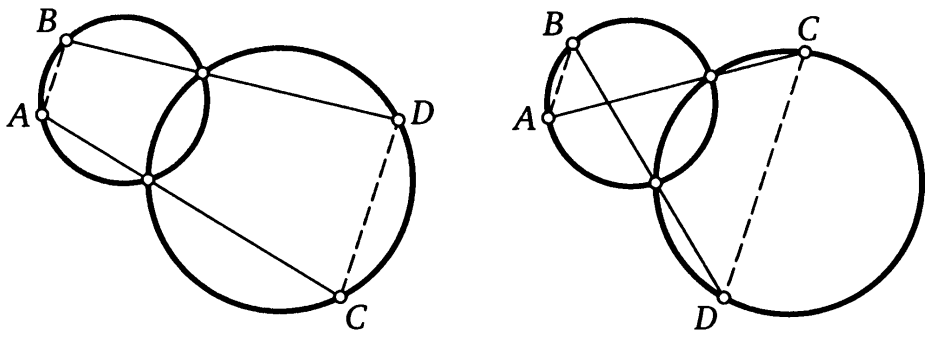


К задаче 18

19. Найдите сумму четырех аналогичных углов для вписанного в окружность восьмиугольника.

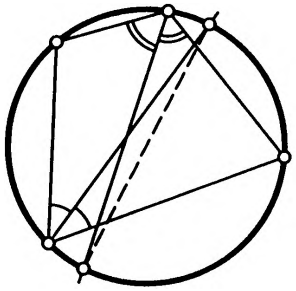
20. Во вписанном четырехугольнике равны два угла при соседних вершинах. Докажите, что у него есть две параллельные стороны.

21. Через точки пересечения двух окружностей проведены две произвольные прямые. Они пересекают первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D. Докажите, что $AB \parallel CD$ (разберите два случая).

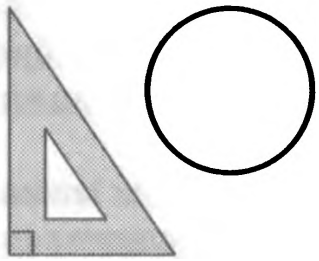


К задаче 21

22. Биссектрисы противоположных углов вписанного в окружность четырехугольника пересекают ее в двух точках. Докажите, что эти точки диаметрально противоположные.



К задаче 22



К задаче 24

23. В окружности проведены две равные хорды. Докажите, что их концы лежат на параллельных прямых.

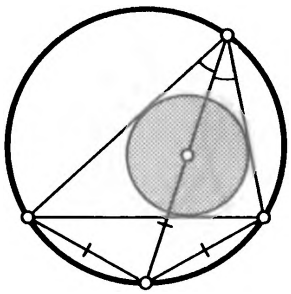
24. Чертежным угольником можно рисовать прямые углы. Как с его помощью построить центр данной окружности?

25. Трапеция с углом 20° при основании вписана в окружность, а ее меньшее основание равно боковой стороне. Найдите радиус окружности, если большее основание трапеции равно 1.

26. Трапеция с основаниями a и b вписана в окружность, а ее боковая сторона видна из центра окружности под углом 120°. Найдите диагонали трапеции.

27. Докажите, что серединный перпендикуляр к стороне треугольника и биссектриса его противоположного угла пересекаются на описанной окружности.

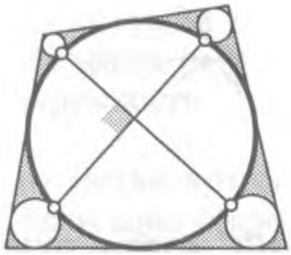
28. (Лемма о трезубце.) Биссектриса треугольника пересекает описанную вокруг него окружность в некоторой точке. Докажите, что данная точка равноудалена от двух вершин треугольника и центра вписанной в него окружности.



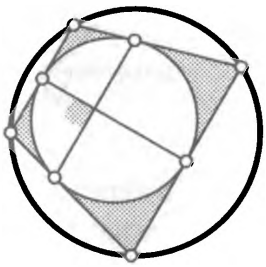
К задаче 28

29. Дан неравнобедренный треугольник. Верно ли, что в нем биссектриса всегда лежит между медианой и высотой, проведенными из одной вершины?

30. В четырехугольник вписана окружность. Четыре меньшие окружности вписаны в углы четырехугольника и касаются первой окружности. Докажите, что отмеченные на чертеже отрезки, соединяющие точки их касания, перпендикулярны.



К задаче 30

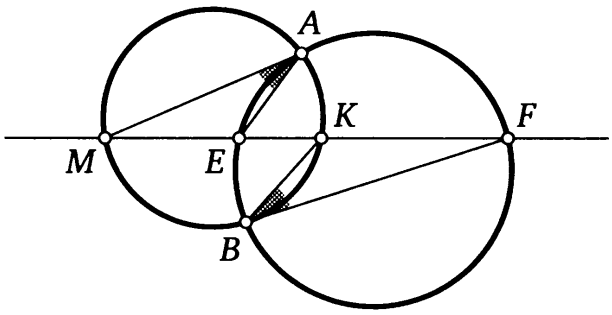


К задаче 31

31. В окружность вписан четырехугольник. Оказалось, что он также описан вокруг другой окружности. Докажите, что два отрезка, соединяющих точки ее касания с противоположными сторонами четырехугольника, перпендикулярны.

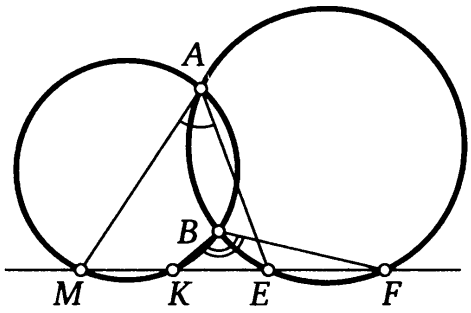
32. Продолжения противоположных сторон AB и CD вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а продолжения сторон BC и AD — в точке K. Докажите, что биссектрисы углов AMD и CKD перпендикулярны.

33. Две окружности пересекаются в точках A и B. Произвольная прямая пересекает первую окружность в точках M и K, а вторую — в точках E и F (точка E лежит на отрезке MK, а точка K — на отрезке EF). Докажите, что $\angle MAE = \angle KBF$.



К задаче 33

34. В обозначениях предыдущей задачи для случая, когда точка K лежит на отрезке ME, а точка E — на отрезке KF, докажите, что $\angle MAE + \angle KBF = 180°$.



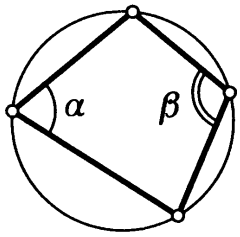
К задаче 34

35. На стороне AC треугольника ABC взяли точку M. Пусть O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABM и CBM. Оказалось, что точки B, M, O_1 и O_2 лежат на одной окружности. Докажите, что она проходит через середину стороны AC.

36. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон, лежат на его описанной окружности.

Признаки вписанного четырехугольника

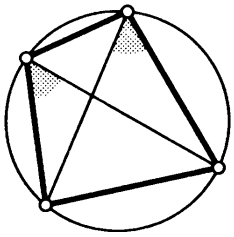
Свойство вписанного четырехугольника. Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°.



$\alpha + \beta = 180°$

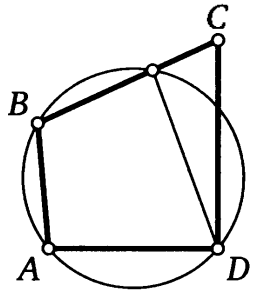
Первый признак вписанного четырехугольника. Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то его можно вписать в окружность.

Второй признак вписанного четырехугольника. Если одна сторона выпуклого[20] четырехугольника видна из двух его вершин под равными углами, то этот четырехугольник можно вписать в окружность.

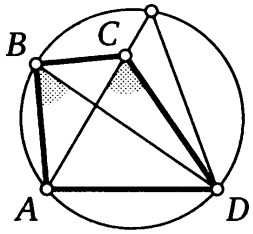


1. Приведите пример четырехугольника, который нельзя вписать в окружность.

2. Используя приведенный чертеж, докажите первый признак вписанного четырехугольника.



К задаче 2



К задаче 3

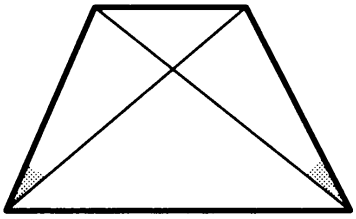
3. Используя приведенный чертеж, докажите второй признак вписанного четырехугольника.

4. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle BAC = 30°$, $\angle BCA = 40°$, $\angle CAD = 50°$, $\angle ACD = 60°$. Найдите угол между его диагоналями.

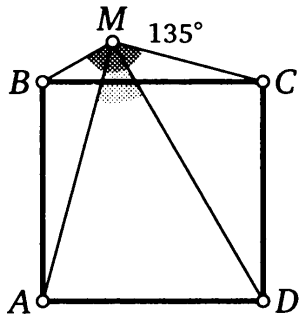
---

[20] Подумайте, почему условие выпуклости четырехугольника существенно.

5. Диагонали трапеции образуют равные углы с ее боковыми сторонами так, как показано на рисунке. Докажите, что трапеция равнобокая.



К задаче 5

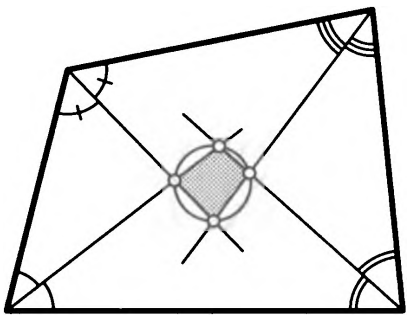


К задаче 6

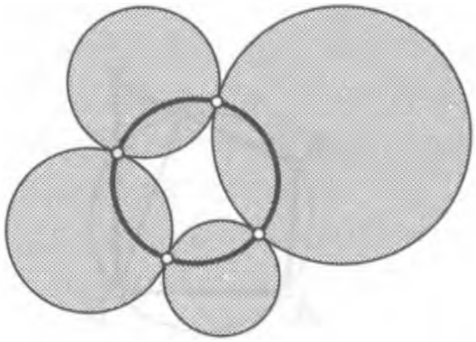
6. Вне квадрата $ABCD$ взята такая точка M, что угол BMC равен 135°. Найдите угол AMD.

7. Вне равностороннего треугольника ABC взяли точку E так, что угол BEC прямой. Точка M — середина AC. Найдите угол MEC. *Будьте внимательны: в задаче есть разные случаи!*

8. Докажите, что биссектрисы всех углов выпуклого четырехугольника при пересечении образуют вписанный четырехугольник.



К задаче 8



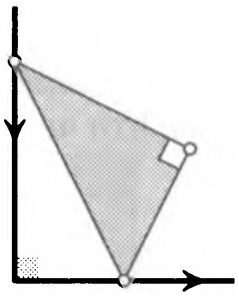
К задаче 9

9. Четыре круга расположены так, что каждый из них касается двух других внешним образом. Докажите, что четыре точки их касания лежат на одной окружности.

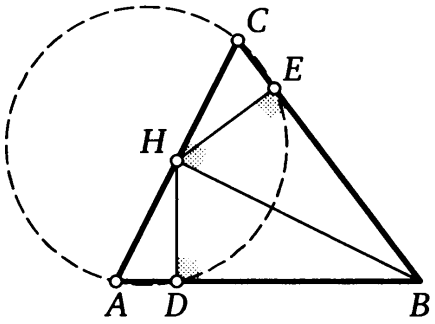
10. В треугольнике ABC проведены высоты AM и CK. Докажите, что угол BKM равен углу ACB.

11. В треугольнике ABC проведены высоты AM и CK. Точка O — центр его описанной окружности. Докажите, что $BO \perp MK$.

12. Две вершины прямоугольного треугольника «скользят» по сторонам прямого угла. Докажите, что третья его вершина движется по прямой.



К задаче 12



К задаче 13

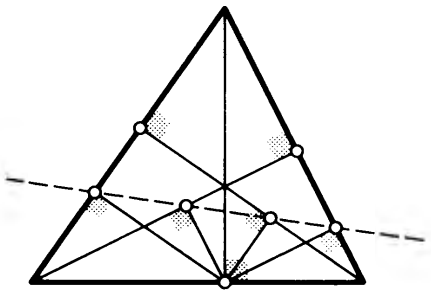
13. В треугольнике ABC провели высоту BH. Точки D и E — проекции точки H на стороны AB и BC. Докажите, что точки A, D, E и C лежат на одной окружности.

14. (Теорема о высотах треугольника.) Используя вписанные углы, докажите, что высоты любого треугольника пересекаются в одной точке.

15. Основания высот остроугольного треугольника образуют новый треугольник. Докажите, что в этом треугольнике данные высоты являются биссектрисами.

16. На диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC опущены перпендикуляры BE и CK. Докажите, что точки A, E, K и D лежат на одной окружности.

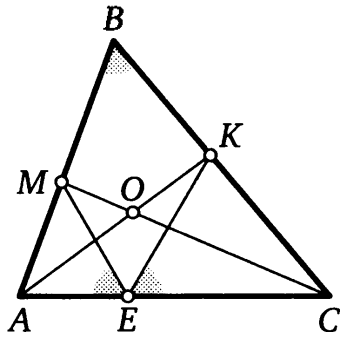
17. В треугольнике провели три высоты. Из основания одной из них опустили перпендикуляры на две другие высоты и на две стороны треугольника. Докажите, что основания всех этих перпендикуляров лежат на одной прямой.



К задаче 17

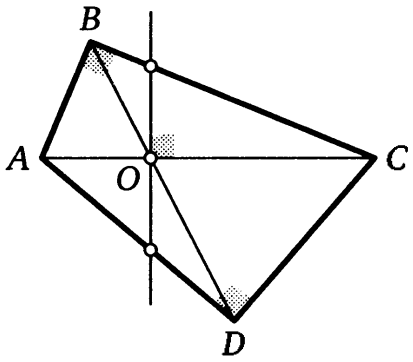
18. Через концы боковой стороны равнобокой трапеции и точку пересечения ее диагоналей провели окружность. Докажите, что она проходит через центр окружности, описанной вокруг трапеции.

19. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки M, K и E так, что $\angle AEM = \angle CEK = \angle ABC$. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник $OMBK$ вписанный.

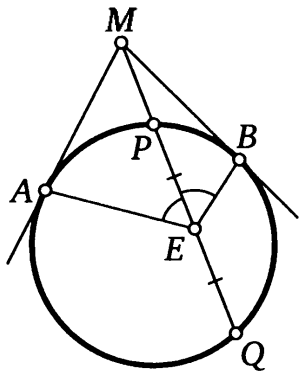


К задаче 19

20. В четырехугольнике $ABCD$ углы B и D прямые. Через точку O пересечения его диагоналей проведена прямая, перпендикулярная AC. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный внутри четырехугольника, делится точкой O пополам.



К задаче 20

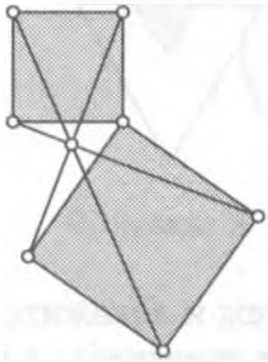


К задаче 21

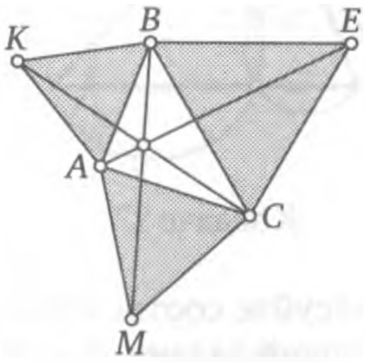
21. Из точки M к окружности проведены касательные MA, MB и произвольная прямая, пересекающая окружность в точках P и Q. Точка E — середина хорды PQ. Докажите, что угол AEM равен углу BEM.

22. Из точки пересечения диагоналей вписанного в окружность четырехугольника опущены перпендикуляры на его стороны. Докажите, что основания этих перпендикуляров образуют четырехугольник, в который можно вписать окружность.

23. Два квадрата имеют общую вершину. Докажите, что отмеченные на рисунке отрезки пересекаются в одной точке.



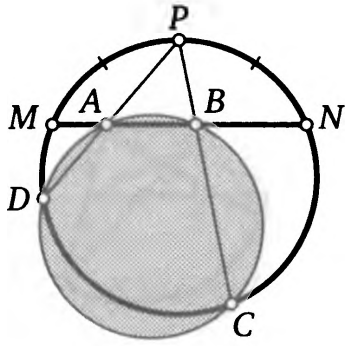
К задаче 23



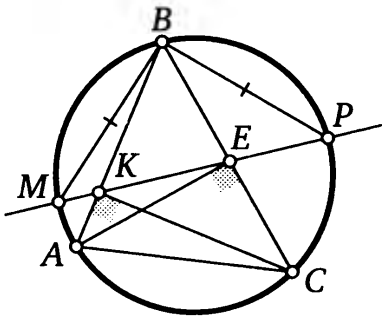
К задаче 24

24. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построили равносторонние треугольники ABK, BCE и ACM. Докажите, что отрезки AE, BM и CK равны и пересекаются в одной точке.

25. Через середину P дуги MN окружности проведены две прямые, пересекающие стягивающую ее хорду в точках A и B, а окружность — в точках C и D. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.



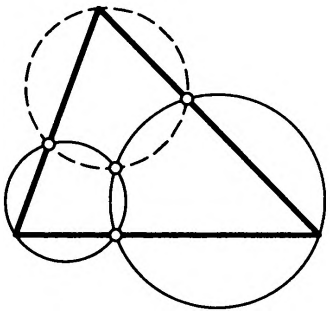
К задаче 25



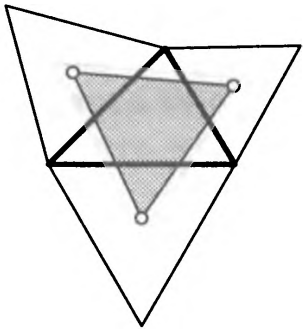
К задаче 26

26. В треугольнике ABC проведены высоты AE и CK. Прямая KE пересекает описанную окружность в точках M и P. Докажите, что $BM = BP$.

27. На каждой стороне треугольника отметили по точке. Докажите, что три отмеченные на рисунке окружности пересекаются в одной точке.



К задаче 27

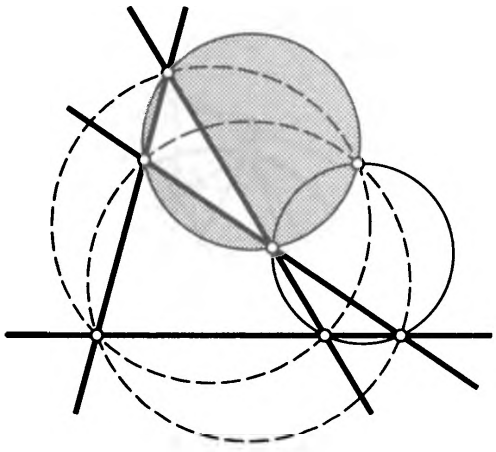


К задаче 29

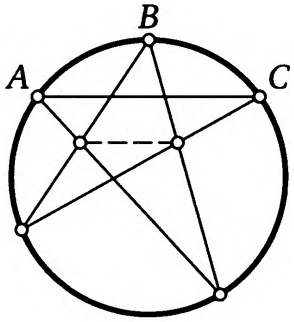
28. Нарисуйте соответствующий чертеж и докажите утверждение предыдущей задачи для случая, когда указанные в ней окружности пересекаются вне треугольника.

29. (Задача Наполеона.) На сторонах произвольного треугольника построили равносторонние треугольники. Докажите, что их центры образуют также равносторонний треугольник.

30. Четыре пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что четыре окружности, описанные вокруг них, пересекаются в одной точке (*точке Микеля*).



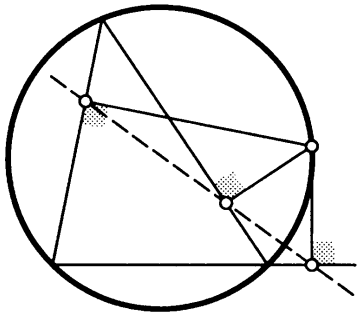
К задаче 30



К задаче 31

31. Пятиугольная звезда вписана в окружность. Отмеченный на рисунке пунктиром отрезок параллелен ее звену AC. Докажите, что тогда $AB = BC$.

32. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности треугольника на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой (*прямая Симпсона*).

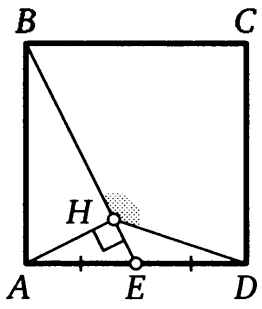


К задаче 32

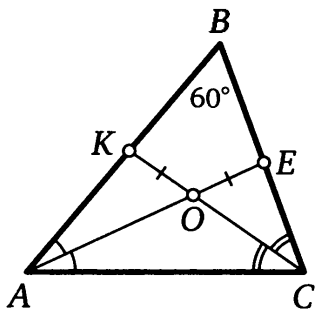
33. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle ABC = 120°$, $\angle ACB = 20°$, $\angle ADB = 40°$ и $\angle BDC = 80°$. Найдите угол между его диагоналями.

34. Биссектриса треугольника делит пополам угол между его медианой и высотой, проведенными из той же вершины. Докажите, что треугольник прямоугольный.

35. Точка E — середина стороны AD квадрата $ABCD$. На отрезок BE опущен перпендикуляр AH. Найдите угол BHD.



К задаче 35

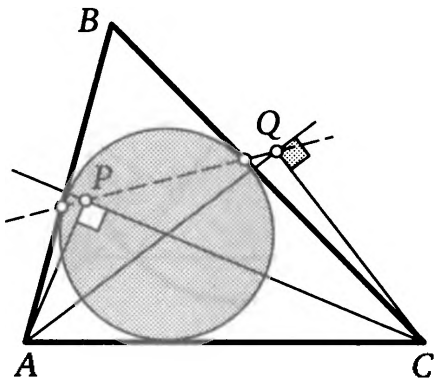


К задаче 36

36. Биссектрисы AE и CK треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что угол ABC равен 60°. Докажите, что $OE = CK$.

37. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках M и K. Биссектриса угла A пересекает прямую MK в точке E. Докажите, что угол AEC прямой.

38. На биссектрисы углов A и C треугольника ABC опустили перпендикуляры AP и CQ. Докажите, что прямая PQ проходит через точки касания со сторонами вписанной в треугольник ABC окружности.



К задаче 38

39. Стороны AB и CD ромба $ABCD$ видны из некоторой точки M под углами 80° и 100°. Под какими углами видны из этой точки стороны AD и BC?

***40.** В треугольнике ABC провели медиану BM. Оказалось, что сумма углов ABM и ACB равна 90°. Докажите, что данный треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный.

Уровень C

C1. Три окружности с центрами в точках A, B, C попарно касаются друг друга внешним образом в точках O, P и M, $\angle ABC = 90°$. Точка P лежит на прямой AC. Найдите угол KPM.

C2. Две окружности, радиусы которых равны 5 и 3, касаются внутренним образом. Хорда большей окружности касается меньшей окружности и делится точкой касания в отношении 3 : 1. Найдите длину этой хорды.

C3. В окружность вписана замкнутая пятизвенная ломаная, четыре звена которой равны, а пятое является диаметром окружности. Найдите угол между её равными звеньями.

C4. Докажите, что полукруг — выпуклая фигура.

5.2. Вписанные углы

Уровень A

A1. Среди приведённых ниже утверждений найдите верные.

1) Центральным углом называется угол, который проходит через центр окружности.
2) Центральным углом называется угол, вершина которого лежит в центре окружности.
3) Центральный угол равен половине дуги, на которую он опирается.
4) Центральный угол равен дуге, на которую он опирается.
5) Центральный угол всегда меньше 180°.

A2. Среди приведённых ниже утверждений найдите верные.

1) Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности.
2) Вписанным углом называется угол, который имеет с окружностью ровно 3 общие точки.
3) Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.
4) Вписанный угол равен центральному углу, опирающемуся на ту же дугу.
5) Вписанный угол в 2 раза меньше центрального угла, опирающегося на ту же дугу.
6) Вписанные углы, опирающиеся на равные дуги, равны.

А3. Среди приведённых ниже утверждений найдите верные.

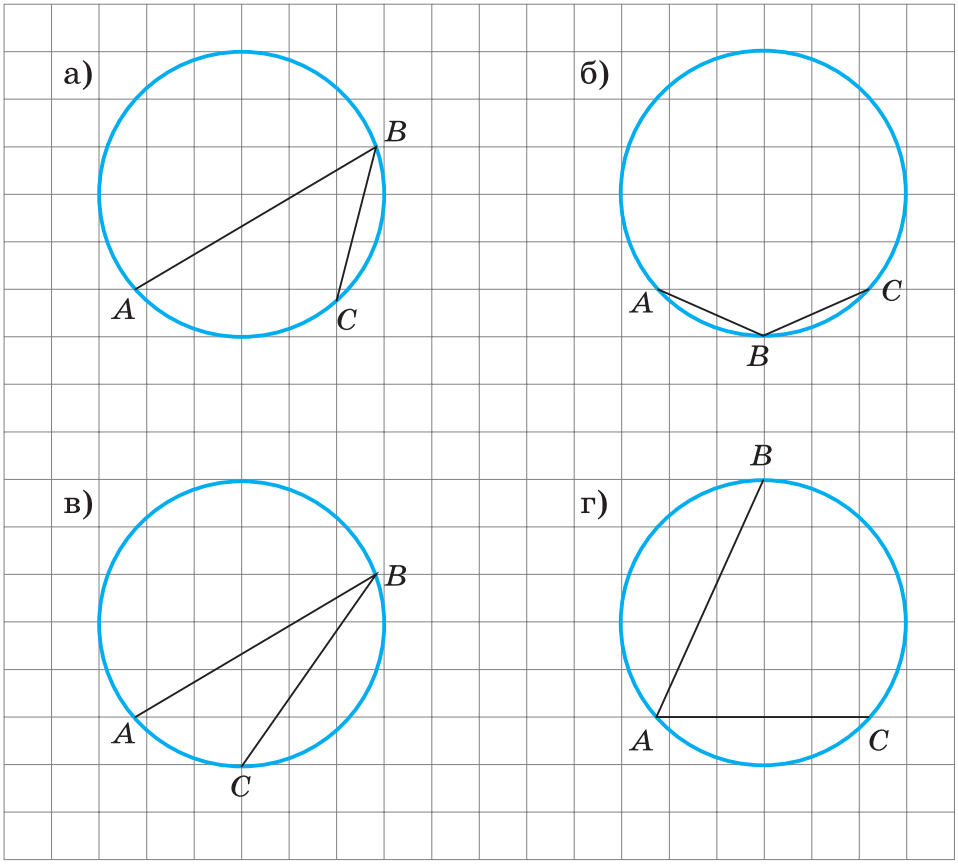
1) Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°.

2) Вписанный угол, опирающийся на треть окружности, равен 120°.

3) Угол AFB между хордами AC и BD, пересекающимися в точке F, равен полусумме дуг AB и CD.

4) Угол ABF между продолжениями хорд AC и BD, пересекающимися в точке F, равен разности дуг AB и CD.

А4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите его градусную меру.



А5. а) Точки A и B делят окружность на две дуги, длины которых относятся как 5 : 6. Найдите величину центрального угла, опирающегося на меньшую из дуг.

б) Точки A и B делят окружность на две дуги, длины которых относятся как 11 : 30. Найдите величину вписанного угла, опирающегося на меньшую из дуг.

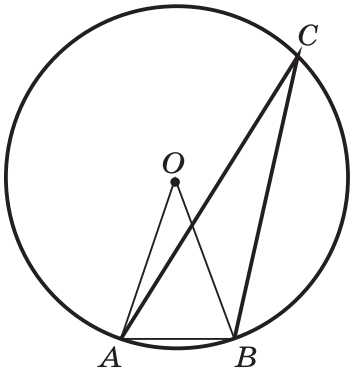
А6. Точки A, B, C и D, последовательно расположенные на окружности в указанном порядке, делят её на четыре дуги, градусные меры которых относятся как $1:2:3:4$ (дуга AB — наименьшая). Найдите:

а) градусную меру дуги AC; б) угол BAD.

А7. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, равную:

а) $\frac{1}{5}$ окружности; б) $\frac{7}{18}$ окружности.

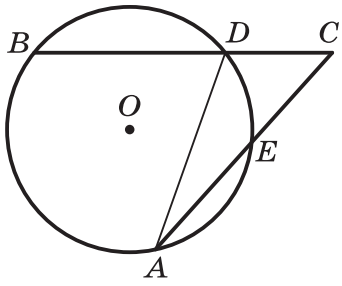
А8. а) Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Точки O и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Найдите угол ACB, если угол AOB равен $27°$.



б) Отрезки AB и BC являются хордами окружности с центром в точке O. Найдите угол ACB, если угол ABO равен $42°$.

в) Треугольник ABC вписан в окружность. Известны два его угла: $\angle A = 80°$, $\angle B = 55°$, Найдите угол AOB.

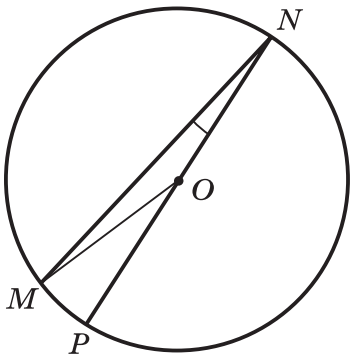
А9. а) Угол ACB равен $54°$ (см. рисунок). Градусная мера дуги окружности AB, не содержащей точки D и E, равна $138°$. Найдите угол DAE.



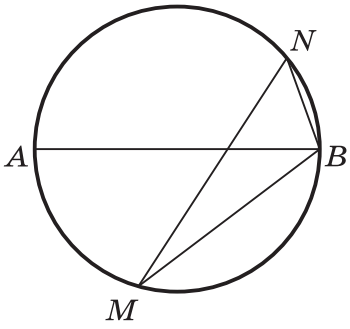
б) Угол ACB равен $36°$ (см. рисунок). Найдите градусную меру дуги окружности AB, не содержащей точки D и E, если угол DAE равен $20°$.

в) Через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие. Какой угол они образуют, если меньшая и большая дуги окружности, заключённые между сторонами этого угла, равны $49°$ и $122°$ соответственно.

А10. а) Угол MNP вписан в окружность с центром в точке O, NP — диаметр этой окружности. Найдите градусную меру угла MON, если $\angle MNP = 28°$.



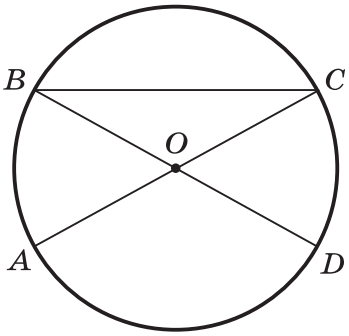
б) На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что $\angle NMB = 19°$. Найдите угол NBA.



А11. В окружности с центром в точке O отрезки AC и BD являются диаметрами.

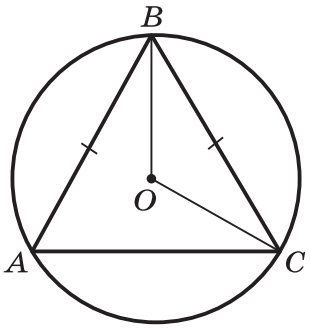
а) Угол AOD равен 148°. Найдите угол ACB.

б) Угол BDC равен 43°. Найдите угол AOD.

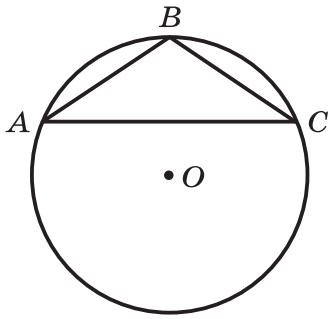


А12. а) Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB = BC$ и $\angle ABC = 57°$. Найдите угол BOC.

а)



б)



б) Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника ABC, в котором $AB = BC$ и $\angle ABC = 156°$. Найдите угол BOC.

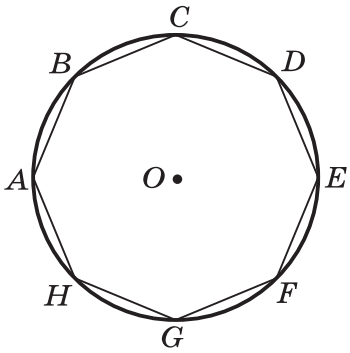
А13. В окружность вписан равносторонний восьмиугольник $ABCDEFGH$. Найдите:

а) величину угла ACB;

б) величину угла AOG;

в) величину угла BHE;

г) величину угла OBG.



Уровень B

B1. Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите BH, если $PK = 14$.

B2. На окружности последовательно отмечены точки A, B, C и D, делящие окружность на дуги, градусные меры которых имеют отношение $AB : BC : CD : DA = 3 : 4 : 5 : 6$. Найдите величину угла между прямыми AB и CD.

B3. Треугольник ABC равнобедренный. Радиус OA описанной около него окружности образует с основанием AC угол OAC, равный 20°. Найдите угол BAC.

B4. Докажите, что равные хорды в окружности стягивают равные дуги.

B5. В окружности проведена хорда, равная радиусу. Чему может быть равна величина угла, вписанного в эту окружность и опирающегося на данную хорду?

B6. а) Докажите, что биссектриса вписанного в окружность угла делит дугу, на которую он опирается, на две равные дуги.

б) Прямая, проходящая через вершину A и центр O окружности, вписанной в треугольник ABC, пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке M. Докажите, что треугольники BOM и COM равнобедренные.

B7. В треугольнике провели две прямые, содержащие его высоты. Докажите, что точки пересечения этих прямых с окружностью, описанной около треугольника равноудалены от третьей вершины треугольника.

B8. а) Чему равна градусная мера дуги окружности, если радиус, проведённый в её конец, составляет со стягивающей её хордой угол в 36°?

б) Градусная мера дуги окружности равна 118°. Найдите угол между стягивающей её хордой и продолжением радиуса, проведённого в конец дуги.

B9. Вписанный угол величиной 30° опирается на хорду AB. Докажите, что длина хорды AB равна радиусу окружности.

B10. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2, угол при вершине — 120°. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

B11. Окружность описана около равностороннего треугольника ABC. На дуге BC, не содержащей точку A, расположена точка M, делящая эту дугу в отношении $1:2$. Найдите углы треугольника AMB.

B12. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC повторно пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке D, отличной от точки C. Докажите, что $AD = BD$.

B13. На хорде AB окружности с центром O взята точка C. Окружность, описанная около треугольника AOC, пересекает данную окружность в точке D, отличной от точки C. Докажите, что $BC = CD$.

B14. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая пересекает эти окружности последовательно в точках A, B, C и D и пересекает отрезок PQ. Докажите, что углы APB и CDQ равны.

B15. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O окружности, описанной около этого треугольника. Из вершины A проведена высота AH. Докажите, что углы BAH и OAC равны.

B16. В треугольнике ABC угол B равен $60°$. Биссектрисы AD и CE этого треугольника пересекаются в точке O. Докажите, что $OD = OE$.

B17. Докажите, что параллельные прямые отсекают на окружности равные дуги.

B18. Две окружности пересекаются в точках M и K. Через эти точки проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C, вторую — в точках B и D. Докажите, что $AC \parallel BD$.

Уровень C

C1. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Третья окружность с центром в точке P пересекает первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D. Докажите, что углы AQD и BQC равны.

C2. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC в точках K и P соответственно. Найдите радиус этой окружности, если $\angle ABC = 81°$, $AC = 6$ см, а угол AKC в 10 раз больше угла KAP.

C3. Внутри треугольника ABC взята точка P так, что $\angle BPC = \angle BAC + 60°$, $\angle APC = \angle ABC + 60°$ и $\angle APB = \angle ACB + 60°$. Прямые AP, BP и CP пересекают окружность, описанную около треугольника ABC, в точках K, L и M. Докажите, что KLM — правильный треугольник.

C4. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle MAC = \angle MCD = \alpha$. Найдите градусную меру угла ABM.

C5. Вершины A и B правильного треугольника ABC лежат на окружности, а вершина C — внутри этой окружности. Точка D лежит на окружности, причём $BD = AB$. Прямая CD пересекает окружность в точке E, отличной от точки D. Докажите, что длина отрезка EC равна радиусу данной окружности.

C6. Все углы треугольника ABC меньше 120°. Докажите, что внутри этого треугольника существует точка, из которой все стороны треугольника видны под углом 120°.

5.3. Вписанные четырёхугольники

Уровень А

A1. Среди приведённых ниже утверждений выберите верные.

1) Четырёхугольник можно вписать в окружность, если сумма двух его противоположных углов равна 180°.

2) В четырёхугольнике, вписанном в окружность, диагонали перпендикулярны друг другу.

3) В четырёхугольнике, вписанном в окружность, сумма двух соседних углов всегда меньше 180°.

4) В четырёхугольнике, вписанном в окружность, сумма противоположных углов равна 180°.

5) В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, угол ABD не равен углу ACD.

6) В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, угол, смежный с углом A, равен углу C.

A2. Найдите угол C четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, если угол A равен:

а) 10°;

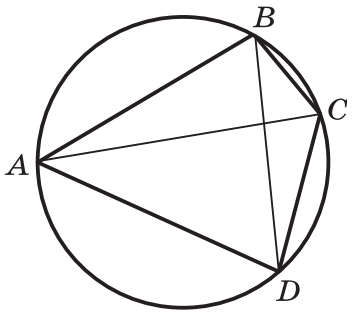
б) 60°;

в) 179°.

А3. а) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 61°, угол CAD равен 37°. Найдите угол ABC.

б) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 82°, угол ABD равен 47°. Найдите угол CAD.

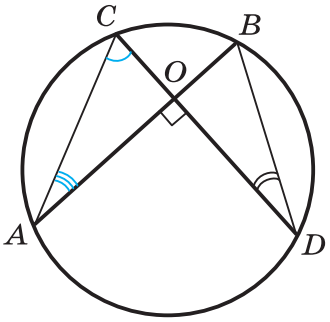
в) В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Найдите угол ACD, если углы BAD и ADB равны соответственно 73° и 37°.



А4. Точки A, B, C и D лежат на одной окружности так, что хорды AB и CD взаимно перпендикулярны, а $\angle BDC = 25°$. Найдите:

а) величину угла CAB;

б) величину угла ACD.



А5. В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, найдите углы A и C, если известно, что градусные меры дуг, на которые они опираются, относятся как:

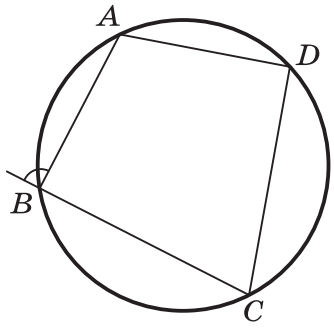
а) 1 : 1; б) 1 : 3; в) 7 : 11.

А6. Можно ли четырёхугольник $ABCD$ вписать в окружность, если его углы A и C соответственно равны:

а) 10° и 80°; б) 40° и 140°; в) 115° и 75°; г) 45° и 135°?

А7. В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, найдите внешний угол при вершине B, если угол D равен:

а) 45°; б) 75°; в) 110°.

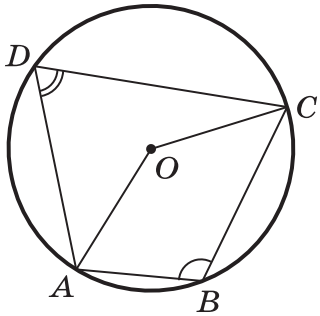


А8. Найдите углы B и D вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$, если известно, что центральный угол AOC, содержащий внутри себя точку B, равен:

а) 120°;

б) 20°;

в) 163°.



Уровень B

B1. а) Точки A, B, C и D последовательно расположены на окружности. Известно, что градусные меры дуг AB, BC, CD и DA относятся как $1:3:5:6$ соответственно. Найдите углы четырёхугольника $ABCD$.

б) Могут ли величины углов A, B, C и D во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ относиться как $1:4:5:4$?

B2. Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения его сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

B3. Из произвольной точки M катета BC прямоугольного треугольника ABC на гипотенузу AB опущен перпендикуляр MN. Докажите, что угол MAN равен углу MCN.

B4. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AK = 6$, а сторона AC в 1,5 раза больше стороны BC.

B5. а) Докажите, что вокруг равнобокой трапеции можно описать окружность.

б) Докажите, что если трапеция вписана в окружность, то она равнобокая.

B6. Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 10$, а углы B и C четырёхугольника равны 112° и 113° соответственно.

B7. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Докажите, что:

а) около четырёхугольников CA_1HB_1, AC_1HB_1 и BA_1HC_1 можно описать окружности;

б) около четырёхугольников AB_1A_1B, BC_1B_1C и CA_1C_1A можно описать окружности.

B8. Продолжения сторон AB и CD вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD — в точке Q. Докажите, что точки пересечения биссектрис углов AQB и BPC со сторонами четырёхугольника являются вершинами ромба.

B9. Точки A, B, C и D лежат на окружности. Точки M, N, K и L — середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что прямая MK перпендикулярна прямой NL.

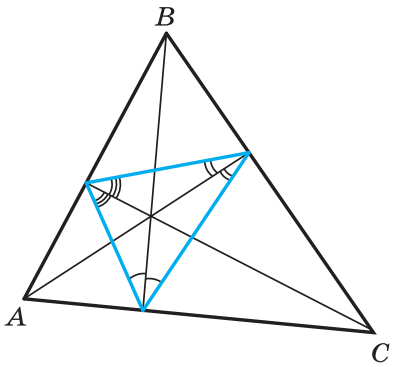
B10. Трапеция с высотой h вписана в окружность. Боковая сторона трапеции видна из центра окружности под углом $120°$. Найдите среднюю линию трапеции.

B11. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Точки B_0 и C_0 симметричны вершинам B и C относительно биссектрисы угла BOC. Докажите, что угол C_0AC равен углу B_0DB.

B12. К двум окружностям, пересекающимся в точках K и M, проведена общая касательная. Докажите, что если A и B — точки касания, то сумма углов AMB и AKB равна $180°$.

B13. Прямая l касается окружности с диаметром AB в точке C; M и N — проекции точек A и B соответственно на прямую l, D — проекция точки C на AB. Докажите, что $CD^2 = AM \cdot BN$.

B14. Треугольник с вершинами в основаниях высот треугольника ABC называется ортотреугольником треугольника ABC. Докажите, что высоты остроугольного треугольника ABC являются биссектрисами его ортотреугольника.



B15. Пусть H — точка пересечения высот в треугольнике ABC. Докажите, что точки, симметричные H относительно сторон треугольника ABC, лежат на его окружности, описанной около треугольника ABC.

B16. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, AH — высота треугольника ABC. Докажите, что углы BAH и OAC равны.

Уровень C

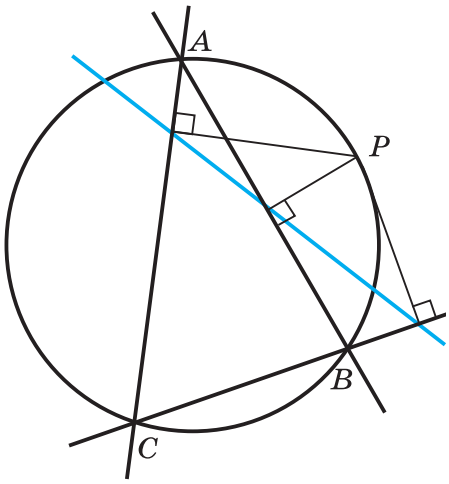
C1. Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 25$ и $CD = 16$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K, причём $\angle AKB = 60°$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

С2. Медианы AM и BE треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите длину третьей медианы треугольника, если $AM = BE = 7$ см, а точки O, M, E и C лежат на одной окружности.

С3. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята произвольная точка P. Отрезки AP и BC пересекаются в точке Q. Докажите, что $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

С4. Три окружности равных радиусов проходят через точку M и попарно пересекаются в точках A, B и C, отличных от точки M. Докажите, что точки A, B и C лежат на окружности того же радиуса, а M — точка пересечения высот треугольника ABC.

С5. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника или их продолжения из произвольной точки окружности, описанной около этого треугольника, лежат на одной прямой (эту прямую называют прямой Симсона).



5.4. Другие углы, связанные с окружностью

Уровень А

А1. Сформулируйте теорему:

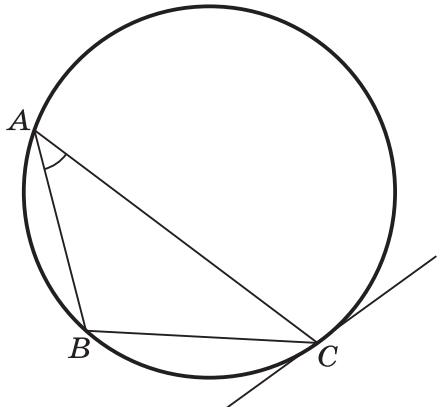
а) об угле между хордой и касательной;

б) об угле между хордами;

в) об угле между секущими.

А2. Треугольник ABC вписан в окружность. Через точку C проведена касательная к этой окружности. Найдите угол A треугольника, если угол между хордой CB и касательной равен:

а) 18°; б) 56°; в) 76°.

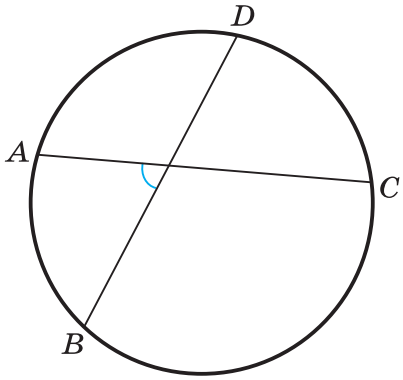


А3. Треугольник ABC вписан в окружность. Через точку C проведена касательная к этой окружности. Найдите угол между хордой CB и касательной, если угол A треугольника ABC равен:

а) 42°;
б) 39°;
в) 71°.

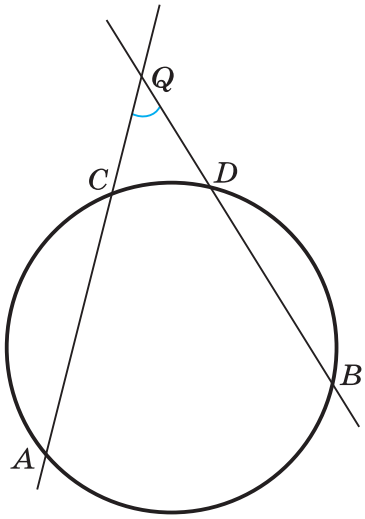
А4. В окружности пересекаются хорды AC и BD. Найдите острый угол между ними, если градусные меры дуг AB и CD соответственно равны:

а) 89° и 31°;
б) 36° и 56°;
в) 63° и 45°.



А5. Продолжения хорд AC и BD окружности за точки C и D соответственно пересекаются в точке Q. Найдите угол AQB, если градусные меры дуг DC и AB соответственно равны:

а) 19° и 95°;
б) 34° и 89°;
в) 50° и 123°.



Уровень В

В1. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку A, лежащую на первой окружности, проведены прямые AP и AQ, пересекающие вторую окружность в точках B и C соответственно. Докажите, что касательная в точке A к первой окружности параллельна прямой BC.

В2. Окружность касается одной из сторон угла величиной 40° в его вершине A и пересекает другую сторону угла в точке B, отличной от точки A. На меньшей дуге AB взяли точку M. Найдите угол AMB.

B3. а) Окружность разделена точками A, B, C, D на дуги. Известно отношение градусных мер этих дуг: $AB : BC : CD : DA = 2 : 3 : 5 : 6$. Проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке M. Найдите угол AMB.

б) Окружность разделена точками A, B, C, D на дуги. Известно отношение градусных мер этих дуг: $AB : BC : CD : DA = 3 : 2 : 13 : 7$. Хорды AD и BC продолжены до пересечения в точке M. Найдите угол AMB.

B4. Через конец хорды, делящей окружность в отношении $3 : 5$, проведена касательная. Найдите острый угол между хордой и касательной.

B5. На продолжении диаметра AB окружности взята точка C. Через неё проведена касательная к этой окружности, D — точка касания. Угол ADC равен $110°$. Найдите градусную меру дуги BD.

B6. Внутри окружности находится ещё одна окружность, не имеющая с первой общих точек. Хорды CE и DF большей окружности не пересекаются и касаются меньшей окружности в точках A и B соответственно, CND и EPF — дуги между концами хорд. Найдите градусную меру дуги CND, если градусные меры дуг AMB и EPF равны $154°$ и $70°$ соответственно.

B7. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и P. Через точку A проведена касательная к окружности S_1, пересекающая окружность S_2 в точке B, отличной от точки A, через точку P — прямая, параллельная AB, пересекающая окружности S_1 и S_2 в точках D и C соответственно. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

B8. Касательная в точке A к окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает прямую BC в точке E. AD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AE = ED$.

Уровень C

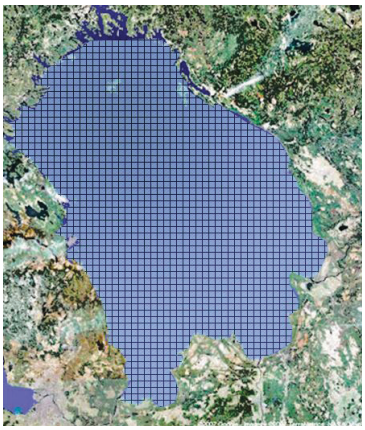
C1. Докажите, что прямая, соединяющая середины дуг AB и AC, где A, B и C — три точки одной окружности, отсекает на хордах AB и AC равные отрезки, считая от точки A.

C2. К двум окружностям, пересекающимся в точках K и M, проведена общая касательная. Докажите, что если A и B — точки касания, то сумма углов AMB и AKB равна $180°$.

§ 11 ПЛОЩАДИ

Каждый человек знает, что такое площадь. Площадь бывает у пола в комнате, у квартиры, земельного участка. Озеро, поле и даже целая страна имеют площадь. Площадь можно найти у стены или забора, которые нужно покрасить. Но что такое площадь? Каждому ясно, что она должна показывать, насколько велика квартира, участок земли, лес или страна. Сколько нужно взять одинаковых плиток, чтобы покрыть ими стену. Или сколько нужно купить банок краски, чтобы покрасить ею забор слоем одной толщины.

А вы помните, в чём принято измерять площади? Площади квартир измеряют в квадратных метрах, площади садовых участков – в арах или в «сотках», площади полей – уже в гектарах, а площади стран и морей – в квадратных километрах. Обратите внимание: площади всегда измеряют в квадратах. То есть считают, сколько примерно одинаковых квадратов поместится в квартире, садовом участке, поле или стране. В Англии и США длины принято мерить в дюймах, футах или милях. Поэтому и площади они измеряют в квадратных дюймах, квадратных футах или милях.



Площадь Ладожского озера около 18 000 км^2

Вначале мы с вами сравним площади разных прямоугольных фигур.

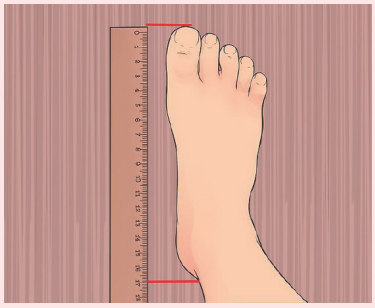
УПРАЖНЕНИЯ

1. Сколько квадратных сантиметров содержится в одном квадратном метре?

2. На греческом языке «гекта» означает сто. Поэтому один гектар содержит 100 аров или 100 «соток» квадратных метров. Сколько гектаров содержит один квадратный километр?

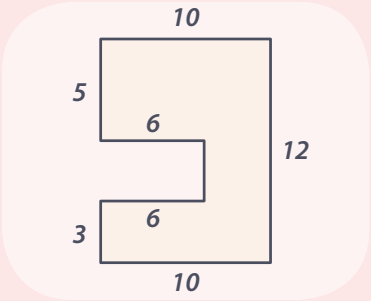
3. В Советском Союзе на одну семью обычно выделялся стандартный садовый участок площадью 6 «соток». Найдите размеры такого прямоугольника, если его длина и ширина отличаются на 1 м.

4. В одном футе 12 дюймов. Сколько квадратных дюймов должно быть в квадратном футе?



5. Как известно, Красная площадь в Москве выложена брусчаткой из карельского диабаза. Размеры одного камня 10х20 см. Определите, сколько их находится на площади, если её длина равна примерно 330 метрам, а ширина – 70 метров.

6. Определите площадь прямоугольной фигуры на данном рисунке.



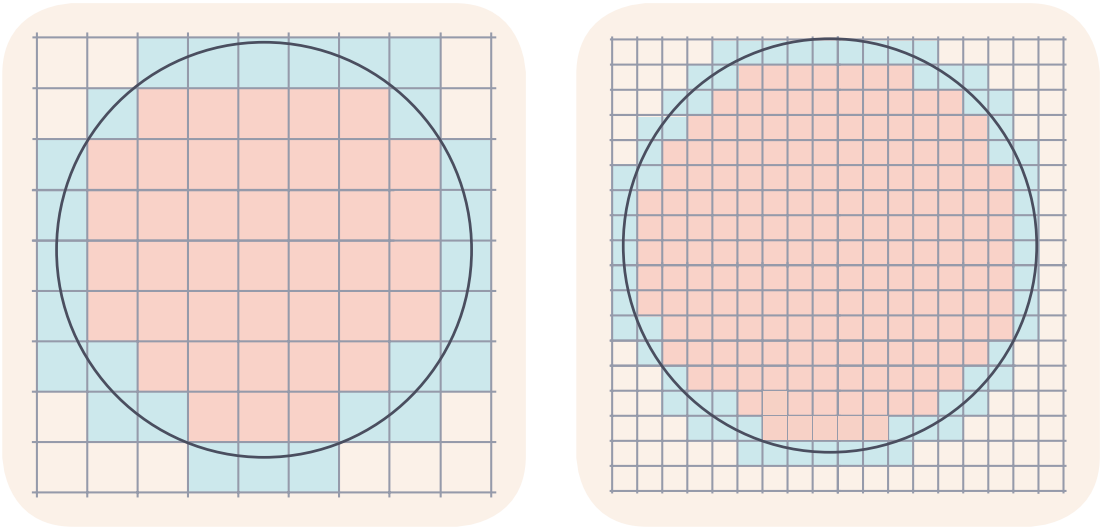
7. Как по фотографии определить примерное количество человек на площади? Известно, что в разреженной толпе на 1 человека приходится 0,9 м^2, в плотной – 0,4 м^2, а в давке – около 0,2м^2. Один из самых массовых митингов в мире прошёл на Манежной площади Москвы 10 марта 1991 года. По оценкам на него собралось около 300 тысяч человек. Считая толпу на этом митинге плотной, определите площадь Манежной площади того времени. Была ли она тогда больше Красной?

Итак, давайте сначала дадим практическое определение площади:

Площадь фигуры – это количество квадратов с определенной стороной (или частей таких квадратов), на которые можно разбить данную фигуру.

Очевидно, что большинство фигур на плоскости в принципе невозможно разбить на целое число равных квадратов. Сделать это не получится ни с треугольником, ни с кругом... Поэтому данным методом их площадь вычислить можно лишь приближённо. Правда, чем меньше брать квадраты разбиения фигуры, тем точнее будет вычислена её площадь и тем меньше ошибка.

Обычно разбиение фигуры на маленькие квадраты делают с помощью ***палетки***. Палеткой называют прозрачную пластину, на которую нанесена сетка из мелких квадратов. Палетку накладывают на плоскую фигуру и приближённо считают количество попавших в неё квадратов этой сетки.



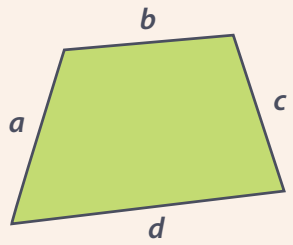
Вычисление площади круга с помощью палетки

УПРАЖНЕНИЯ

8. С помощью палетки со стороной **1** на верхнем рисунке можно утверждать, что площадь изображённого на нем круга больше **41**, но меньше **68** клеток. В таком случае значение его площади приближённо считают равным **54,5** – среднему арифметическому этих границ. Голубым цветом показаны квадраты, которые пересекает окружность, – их количество определяет ошибку данного измерения. То есть считают, что средняя ошибка равна половине площади всех зелёных квадратов. На втором рисунке палетка состоит уже из квадратов со стороной **0,5**. Определите на этом рисунке приближённую площадь данного круга. Сколько единиц составляет на нём средняя ошибка измерения?

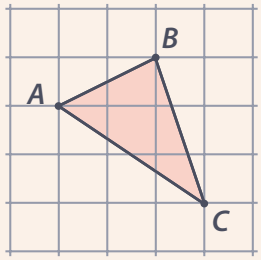
Практический способ измерения площади палеткой не очень удобен для фигур большого размера, но главное – в большинстве случаев он не может дать точного значения площади. Кроме того, непонятно изменится ли площадь самой фигуры, если такую палетку сдвинуть или повернуть: ведь при этом количество попавших в неё квадратов может измениться. Все эти вопросы подводят нас к необходимости получения общего метода вычисления площадей наиболее простых фигур, граница которых состоит из прямых отрезков.

Такие фигуры естественно возникают, когда человек разбивает большое поле на меньшие участки земли. Как вы помните, их называют многоугольниками. Исторически так и было: большинство земельных наделов в древнем Египте, да и все века после были обычными многоугольниками, чаще вообще четырёхугольниками. Древние египтяне для вычисления площадей таких наделов пользовались одной и той же формулой – они перемножали половины сумм противоположных сторон четырёхугольника. Мы с вами выясним, что такая формула была неточной, и научимся считать площадь любого многоугольника абсолютно правильно.



$$S \neq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

Вначале одна задача

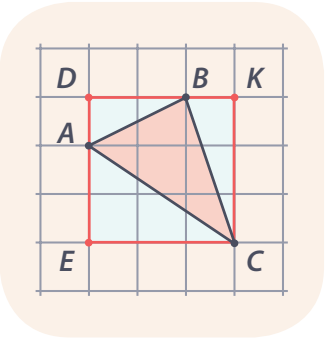


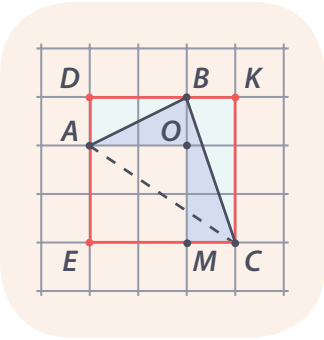
Для начала давайте решим вместе одну задачу и найдём площадь треугольника ABC, изображённого на клетчатой бумаге. В каких единицах мы будем считать его площадь? Конечно же, в этих самых клетках! Методом палетки площадь такого треугольника искать очень неудобно... Непросто даже сразу сказать: больше она 3 клеток или меньше. Поэтому мы пойдём другим путём.

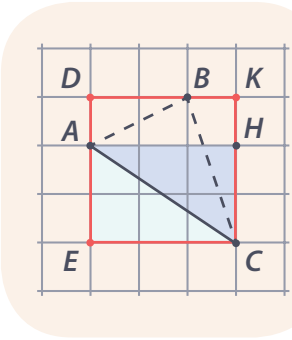
Давайте поместим наш треугольник *ABC* в квадрат *EDKC* со стороной в 3 клетки – на рисунке он показан голубым цветом. Нужный нам треугольник составляет часть площади данного квадрата. Но какую часть? Знаменитого скульптора эпохи Возрождения Микеланжело однажды спросили, как он создаёт свои шедевры. Он ответил так: «Я беру глыбу мрамора и отсекаю от неё всё лишнее». Давайте поступим так же: от целого квадрата, площадь которого составляет 9 клеток, мы вычтем площади трёх «угловых» прямоугольных треугольников.

Их площади легко найти, ведь каждый составляет ровно половину от площади прямоугольника, состоящего из целого числа клеток. Например, площадь треугольника *ABD* равна половине площади прямоугольника *ADBO*, поскольку диагональ делит любой прямоугольник на два равных треугольника. Значит, его площадь составляет 1 клетку. Точно так же площадь треугольника *BKC* составляет половину от площади прямоугольника *BKCM* и равна 3 : 2 = 1,5 клетки. Площадь же треугольника *AEC* – это половина от площади прямоугольника *AECH*, поэтому она равна 6 : 2 = 3 клеткам. Нам осталось только найти площадь искомого треугольника *ABC*. Она будет равна 9 – 1 – 1,5 – 3 = 3,5 клеток.

Обратите внимание: данным методом мы получили абсолютно точный ответ, с помощью палетки этого сделать было бы нельзя.







Свойства площади

При решении последней задачи мы с вами использовали все основные свойства площадей. Эти свойства настолько естественны, что человек применяет их не задумываясь. Давайте всё же проанализируем наши действия. Когда мы считали площади прямоугольных треугольников, то предполагали, что каждый из них составляет половину от площади своего прямоугольника. Почему мы так считали? Просто потому, что диагональ делит прямоугольник на два равных треугольника. Значит, и площади этих треугольников будут равны. Ведь если фигуры можно совместить, то должны совпадать и их площади. Как раз в этом состоит важное свойство самих площадей:

у равных фигур должны быть равны их площади.

Кроме того, при вычислении площади треугольника ABC мы из площади целого квадрата вычитали площади «угловых» треугольников. Почему мы так делали? А потому, что площадь целого квадрата очевидно должна быть суммой площадей всех его частей. Это прекрасно знает каждый маляр: краски на целый забор нужно брать столько, сколько в сумме уйдёт на окрашивание всех его досок. В этом состоит другое важное свойство самой площади:

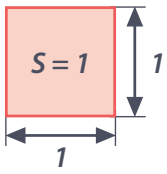
площадь любой фигуры – это сумма площадей всех фигур, на которые она разбита.

Именно поэтому данное свойство площади математики называют её ***аддитивностью***. Ведь по-английски глагол *to add* означает «складывать». Ну и последнее:

площадь любой геометрической фигуры не может быть меньше нуля.

Представить себе фигуру с отрицательной площадью так же сложно, как и поверить в отрицательную массу какого-либо предмета. А вот фигуры, площадь которых равна нулю, существуют: это точка, отрезок, прямая или даже любая «кривая» линия. Вообще все фигуры, у которых нет никакой «внутренней области», должны иметь нулевую площадь – разве можно поместить в них хотя бы один пусть даже самый маленький квадрат? Кстати о квадратах... Люди давно решили измерять площадь именно квадратами, а не кругами или треугольниками. Поэтому естественно

за единицу измерения площади берут квадрат, сторона которого равна единице длины.



А для обозначения площадей фигур обычно используют латинскую букву S – первую букву латинского слова *superficies*, которое означает просто «поверхность».

Итак, давайте перечислим все основные свойства, которые должна иметь площадь:

СВОЙСТВА ПЛОЩАДИ

1. Площадь любой фигуры неотрицательна.
2. Равные фигуры имеют равные площади.

3. При разбиении фигуры на части сумма площадей её частей равна площади всей фигуры.
4. Площадь квадрата со стороной, равной единице длины, равна 1.

Будем ли мы с вами доказывать эти четыре свойства площади? Нет, мы примем их без доказательства, как аксиомы. А как бы вы, например, доказали, что площадь фигуры должна быть неотрицательна или аддитивна?

Вот почему эти четыре свойства обычно называют ***аксиомами площадей***. Саму же теорию площади, построенную на основе этих четырёх свойств, называют аксиоматической. Оказывается, что если пользоваться только данными четырьмя свойствами, можно точно вычислить площадь любого многоугольника на плоскости. Но начнём мы с наиболее простого случая – с обычного прямоугольника.

Площадь прямоугольника

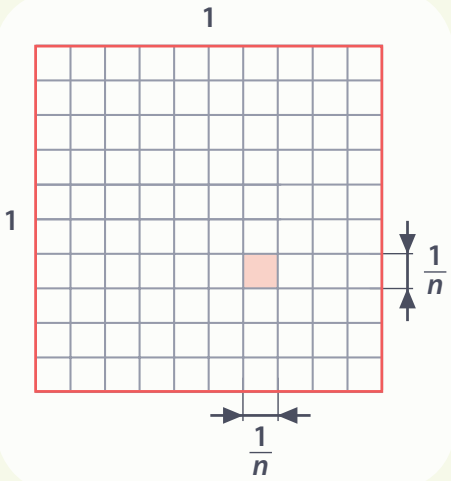
Как найти площадь прямоугольника? Конечно, нужно просто перемножить его «длину» и «ширину», то есть две соседние стороны. Это настолько очевидно, что похоже на ещё одну аксиому площади, которую нельзя доказать. Тем не менее, в приведённом выше списке основных её свойств ничего не сказано о площади прямоугольника. И не сказано об этом как раз потому, что данное утверждение можно доказать, то есть вывести его из четырёх аксиом площади. Давайте это сейчас и сделаем. Причём, мы докажем его не только для прямоугольников с целыми сторонами, а для любых прямоугольников, длины сторон которых могут выражаться «дробными» или рациональными числами.

Но вначале давайте докажем ***лемму*** – более простое утверждение, на которое будем опираться в доказательстве основной теоремы.

ЛЕММА: Площадь квадрата со стороной $\frac{1}{n}$ равна $\left(\frac{1}{n}\right)^2$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Возьмём квадрат со стороной 1 *и разделим каждую его сторону на* n *равных частей. Теперь соединим точки деления на его противоположных сторонах отрезками так, как это показано на рисунке. Полученная сетка разобьёт весь квадрат на одинаковые маленькие квадраты со стороной* $\frac{1}{n}$. *Сколько их будет? Очевидно, каждая строка разбиения будет состоять из* n *таких квадратов, и строк этих тоже будет* n. *Значит, целый квадрат со стороной* 1 *окажется разбитым на* n^2 *маленьких квадратов стороной* $\frac{1}{n}$.



Поскольку все они равны между собой, то равны будут и их площади. Давайте обозначим площадь одного такого квадратика буквой S *и сложим площади всех таких квадратиков. Тогда по аксиоме площадей мы получим уравнение* $n^2 S = 1$.

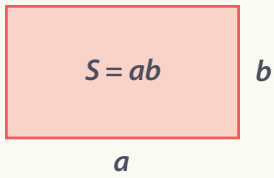
Откуда $S = \left(\frac{1}{n}\right)^2$

Лемма доказана.

Теперь мы готовы доказать основную теорему.

ТЕОРЕМА О ПЛОЩАДИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

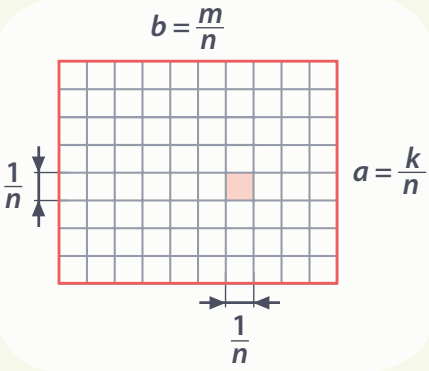
Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.

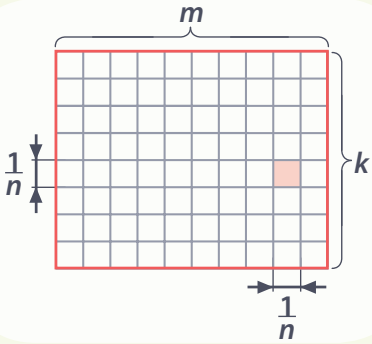


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Будем считать, что стороны a и b данного прямоугольника это любые «дробные» или рациональные числа. Как известно, две любые дроби можно привести одному знаменателю. Давайте сразу приведём числа a *и* b *к общему знаменателю* n*, то есть будем считать, что* $a = k/n$, $b = m/n$. *Тогда каждую сторону нашего прямоугольника можно будет разбить на целое число частей длины* $\frac{1}{n}$.

На стороне a поместится ровно k *таких частей, а на стороне* b *их будет* m. *Так же как в доказанной выше лемме мы разобьём весь прямоугольник на квадратики со стороной* $\frac{1}{n}$ *и посчитаем их количество. В каждой строке разбиения таких квадратиков будет m штук, строк же всего будет k. Значит, общее число квадратиков разбиения будет равно km. По доказанной нами лемме площадь каждого такого квадратика равна* $\left(\frac{1}{n}\right)^2$.





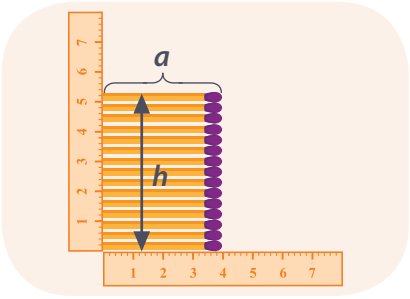
А по аксиоме площадь целой фигуры должна быть суммой площадей всех частей, на которые она разбита.

Поэтому площадь всего прямоугольника будет равна $km \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 = k/n \cdot m/n = a \cdot b$.

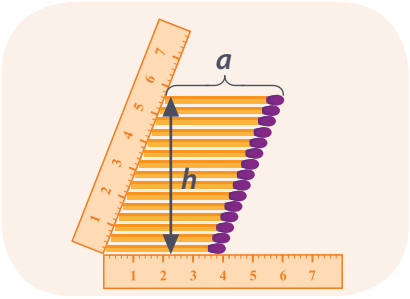
Что и требовалось доказать.

Замечание: Данная теорема верна для прямоугольников с любыми (не обязательно рациональными) сторонами, но доказательство её в общем случае более сложно, и здесь мы его приводить не будем. Прочитать общее доказательство можно будет в конце данного параграфа.

Площадь параллелограмма



Положите на стол ряд спичек длины a и поставьте их перпендикулярно краю одной линейки. Другую линейку положите вдоль этого ряда. Тогда все спички будут образовывать прямоугольник со стороной ***a*** и высотой ***h***. А теперь аккуратно наклоните первую линейку. Она сдвинет спички, причём общая высота ***h*** их ряда при этом не изменится. Сам же ряд спичек примет форму, близкую к параллелограмму. Почему близкую? А потому, что боковая сторона этого «параллелограмма» будет состоять из маленьких зубчиков или ступенек.

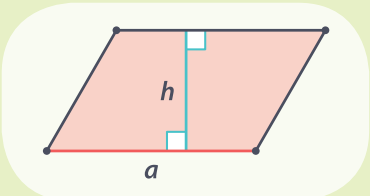


Как вы думаете: изменится ли площадь такого «параллелограмма» по сравнению с прямоугольником? Конечно, нет! Ведь как прямоугольник, так и этот «параллелограмм» состоят из одних и тех же спичек. Значит, площадь параллелограмма должна быть равна площади прямоугольника с теми же основанием a и высотой ***h***, то есть быть равна произведению его сторон ***ah***.

Как раз в этом и заключается теорема о площади параллелограмма. И верна она для всех параллелограммов. Мы с вами её сейчас докажем.

ТЕОРЕМА О ПЛОЩАДИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

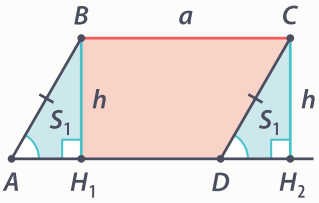
Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на проведённую к ней высоту.



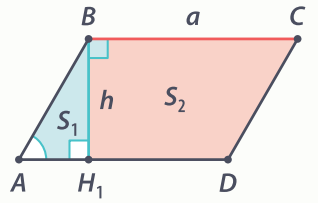
$S = ah$

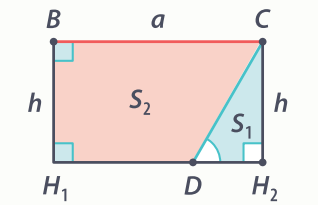
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Пусть сторона **BC** параллелограмма **ABCD** равна **a**, а проведённая к ней высота равна **h**. Будем считать, что при вершине **A** данный нам параллелограмм имеет острый угол. Опустим из его вершин **B** и **C** высоты BH_1 и CH_2. Обе они упадут на луч **AD** и будут равны, поскольку прямые **BC** и **AD** параллельны. Стороны же **AB** и **CD** равны по свойству параллелограмма, поэтому прямоугольные треугольники ABH_1 и DCH_2 будут равны по гипотенузе и катету. Следовательно, эти треугольники можно совместить, и они должны иметь одинаковую площадь. Обозначим её буквой S_1.*



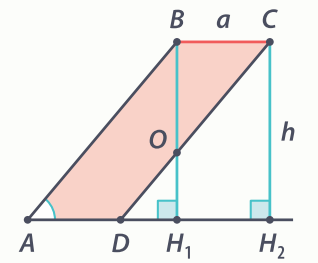
*Вначале мы разберём первый случай, когда высота BH_1 упадёт на сторону **AD** параллелограмма. Тогда она разобьёт его на прямоугольный треугольник и трапецию. Обозначим площадь этой трапеции как S_2. А теперь «отрежем» от параллелограмма данный прямоугольный треугольник и «приклеим» его к противоположной стороне **CD**. Тогда мы получим прямоугольник H_1BCH_2 с площадью $S_1 + S_2$ такой же, как и у нашего параллелограмма. По теореме площадь этого прямоугольника равна произведению **ah** двух его соседних сторон. Значит, и площадь параллелограмма равна произведению его стороны **a** на проведённую к ней высоту **h**. В этом случае теорема доказана.*

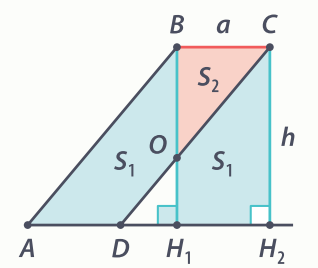




*Рассмотрим теперь второй случай, когда высота BH_1 падает на продолжение стороны **AD** параллелограмма – он показан на данном рисунке.*

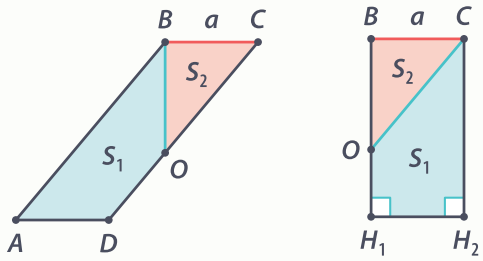
*Тогда эта высота пересечёт его сторону **CD** некоторой точке **O**. Треугольники ABH_1 и DCH_2 будут равны по гипотенузе и катету, как и в первом случае. Значит, их площади тоже должны быть равны. Но в отличие от первого случая данные треугольники теперь имеют общую часть – треугольник DOH_1. Если «отрезать» от каждого из них этот треугольник, то мы получим две трапеции **ABOD** и H_1OCH_2, которые должны тоже иметь равные площади. Обозначим их как S_1. Площадь треугольника **BOC** обозначим как S_2. Тогда данный нам параллелограмм будет иметь площадь $S_1 + S_2$. Очевидно тому же будет равна и площадь прямоугольника H_1BCH_2.*





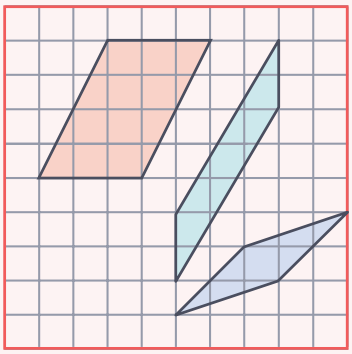
Значит, и в этом случае площадь параллелограмма будет равна площади прямоугольника с той же стороной a и высотой ***h****. То есть в любом случае она равна* ***ah****.*

Что и требовалось доказать.

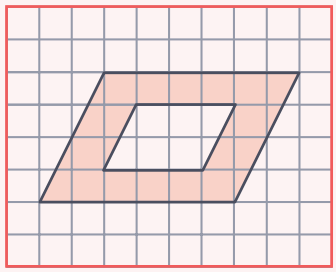


УПРАЖНЕНИЯ

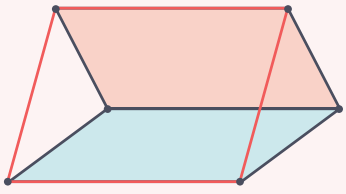
9. Сколько клеток составляет площадь каждого параллелограмма на рисунке?



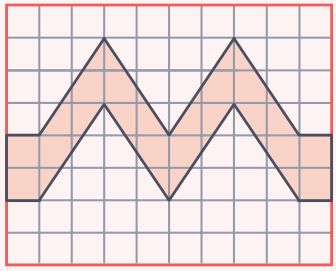
10. Сколько клеток составляет площадь рамки на рисунке?



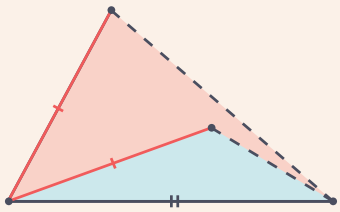
11. На данном рисунке изображено три параллелограмма. Верно ли, что площадь одного из них равна сумме площадей двух других?



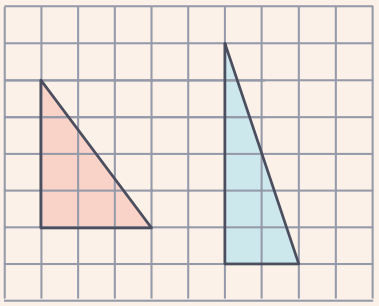
12. Сколько клеток составляет площадь рамки на рисунке?



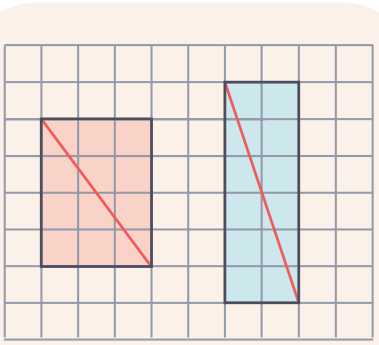
Площадь треугольника



От чего зависит площадь треугольника? Какие его элементы её определяют? Ясно, что только одной стороны треугольника для вычисления его площади недостаточно. Недостаточно для этого и двух его сторон. На приведённом рисунке показаны треугольники, которые имеют две одинаковые стороны, но один из них целиком находится внутри другого. Поэтому эти треугольники не могут иметь равные площади.

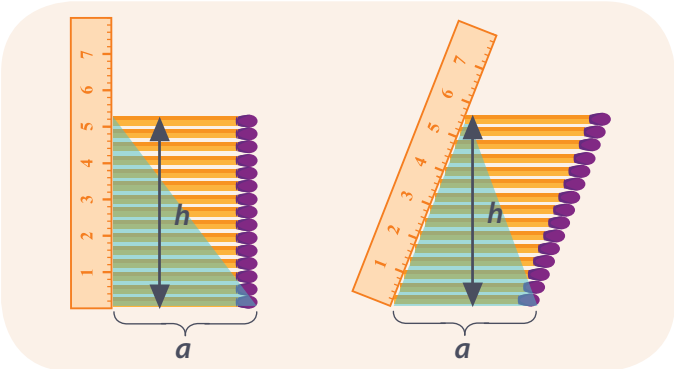


Может быть, для определения площади треугольника необходимо знать длины всех его сторон? Конечно, по трём сторонам площадь треугольника можно вычислить – для этого даже существует специальная формула. Но и без всякой формулы понятно, что два треугольника, все стороны которых одинаковы, будут равны по признаку как геометрические фигуры. Поэтому и площади у них будут равны.



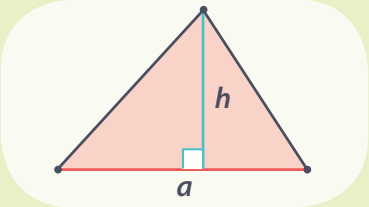
В то же время легко найти два треугольника с разными сторонами, площади которых будут одинаковы. Такие треугольники называют равновеликими. Пример двух равновеликих треугольников показан на втором рисунке. Площади этих треугольников одинаковы и равны 6 клеткам, поскольку каждый из них – это половина прямоугольника из 12 клеток. Любой прямоугольный треугольник – это всегда «половинка» от прямоугольника. Другими словами, прямоугольный треугольник всегда можно достроить до целого прямоугольника.

А что делать с произвольным треугольником? Не догадываетесь? Конечно, его так же можно достроить до целого параллелограмма! Но тогда площадь этого треугольника будет половиной от площади параллелограмма. И зависеть она будет, как и площадь параллелограмма, только от его стороны и высоты, проведённой к этой стороне. Для краткости данную сторону треугольника часто называют его основанием. Давайте запишем наше наблюдение как теорему.



ТЕОРЕМА О ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

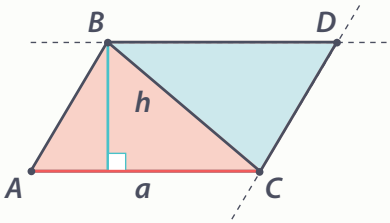
Площадь треугольника равна половине произведения любой его стороны на проведённую к ней высоту.



$$S = \frac{1}{2}ah$$

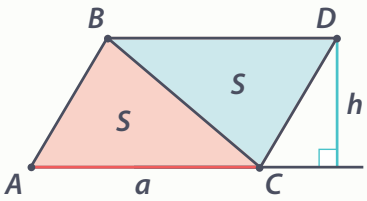
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть a *– длина основания* AC *треугольника* ABC, h *– длина опущенной на него высоты. Мы покажем, что площадь* S *этого треугольника зависит только от данных двух его элементов и равна* $\frac{1}{2}ah$.



Сделаем дополнительное построение: через точки B *и* C *проведём прямые, параллельные сторонам нашего треугольника. Точку пересечения этих прямых обозначим буквой* D. *Тогда четырёхугольник* $ABDC$ *будет параллелограммом по определению, а отрезок* BC *– его диагональю.*

Очевидно, что построенный нами параллелограмм будет иметь ту же высоту h *и основание* a, *что и данный нам треугольник. Очень легко доказать, что диагональ* BC *делит его на равные треугольники* ABC *и* DBC, *которые должны иметь одинаковую площадь* S. *Тогда площадь всего параллелограмма будет равна* $2S$. *По предыдущей теореме площадь параллелограмма равна* ah, *то есть произведению его высоты на основание. Отсюда сразу следует, что* $2S = ah$. *Поэтому* $S = \frac{1}{2}ah$.



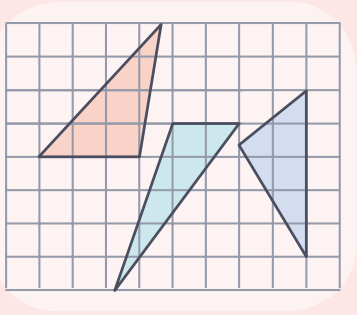
Данное рассуждение можно провести для любой из сторон треугольника. Значит, площадь треугольника равна половине произведения любой его стороны на проведённую к ней высоту.

Что и требовалось доказать.

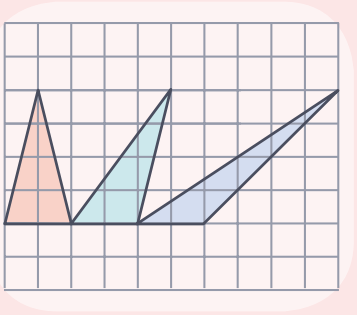
УПРАЖНЕНИЯ

13. Нарисуйте на клетчатой бумаге тупоугольный треугольник, площадь которого равна 7,5 клеток.

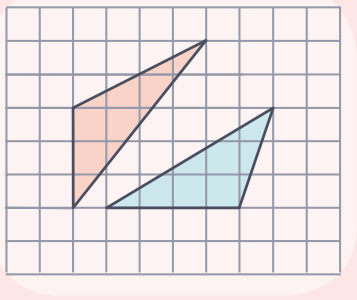
14. Сколько клеток составляет площадь каждого треугольника на рисунке?



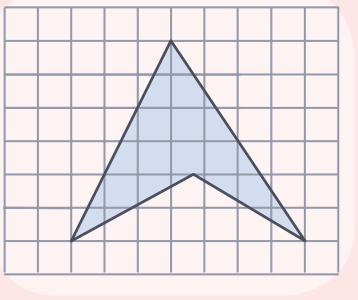
15. Какой из показанных на рисунке треугольников имеет самую большую площадь?



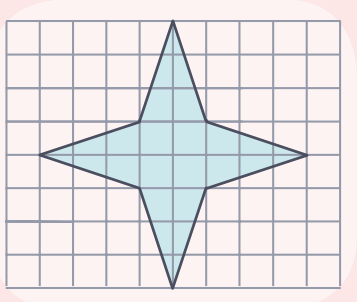
16. Верно ли, что два треугольника, показанные на этом рисунке, равновелики?



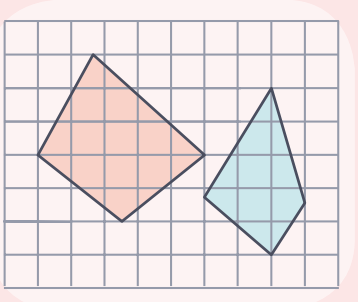
17. Сколько клеток составляет площадь четырёхугольника на рисунке?



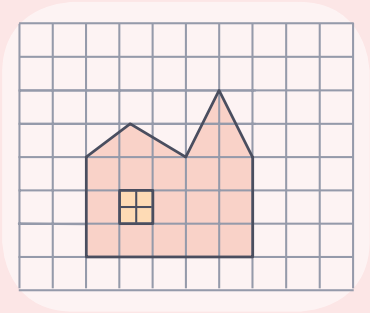
18. Сколько клеток составляет площадь четырёхугольной звезды на рисунке?



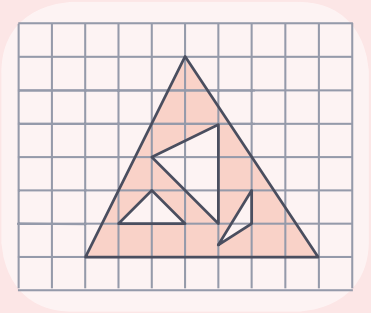
19. Сколько клеток составляет площадь каждой фигуры на данном рисунке?



20. Сколько клеток составляют площадь «домика» на данном рисунке?



21. Сколько клеток составляет площадь закрашенной фигуры на данном рисунке?

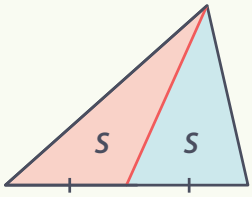


Свойство медианы треугольника

В равнобедренном треугольнике медиана может делить его на два равных треугольника. В произвольном же треугольнике любая медиана делит его на две равновеликие части. В этом и заключается главное

СВОЙСТВО МЕДИАНЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

Медиана треугольника делит его площадь пополам.

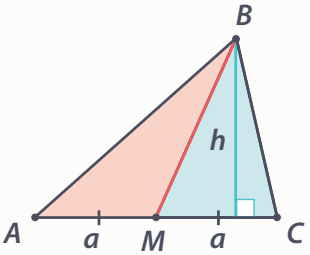


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Возьмём произвольный треугольник **ABC** и проведём в нём медиану **BM**. По определению точка **M** – середина стороны **AC**. Обозначим высоту треугольника, опущенную на сторону **AC**, буквой **h**, а длины равных отрезков **AM** и **CM** – буквой a. Тогда по теореме площадь каждого из треугольников **ABM** и **CBM** будет равна* $\frac{1}{2}$ *ah.*

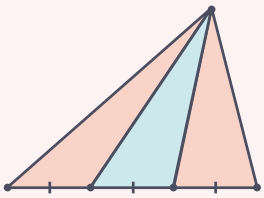
Следовательно, они равновелики. Это рассуждение проходит для любой медианы, поэтому любая медиана делит площадь треугольника пополам.

Что и требовалось доказать.

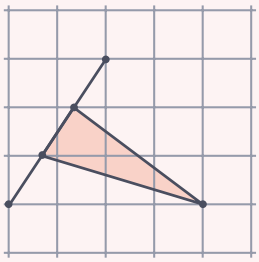


УПРАЖНЕНИЯ

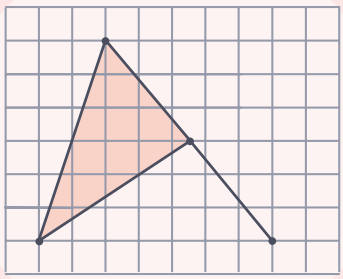
22. Сторону треугольника разделили на три равные части. Точки её деления соединили с противоположной вершиной двумя отрезками. Какая часть треугольника находится между этими отрезками?



23. Сколько клеток составляет площадь закрашенной фигуры на данном рисунке?



24. Скольким клеткам равна площадь закрашенной фигуры на данном рисунке?

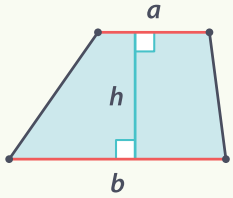


Площадь трапеции

Так же, как для параллелограмма и треугольника, точную формулу площади можно получить и для любой трапеции. Мы с вами увидим, что площадь трапеции зависит только от её высоты и оснований. А конкретнее – только от высоты и длины средней линии трапеции. Давайте запишем это как теорему.

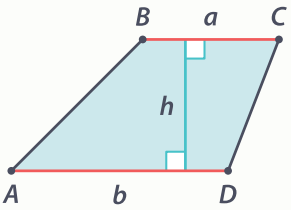
ТЕОРЕМА О ПЛОЩАДИ ТРАПЕЦИИ

Площадь трапеции равна половине произведения её высоты на сумму оснований.



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



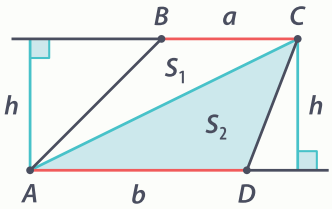
*Пусть длины оснований **BC** и **AD** трапеции **ABCD** равны **a** и **b**, а её высота имеет длину **h**. Диагональ **AC** разбивает всю трапецию на два треугольника, площади которых мы обозначим как S_1 и S_2. Поскольку прямые **BC** и **AD** параллельны и расстояние между ними всюду одинаково, то высоты треугольников **ABC** и **ADC**, опущенные из их вершин **A** и **C**, будут равны высоте трапеции **h**. Давайте запишем площади этих треугольников:*

$$S_1 = \frac{1}{2}ah, S_2 = \frac{1}{2}bh.$$

*Площадь всей трапеции **S** равна сумме площадей этих треугольников, поэтому*

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a+b)h.$$

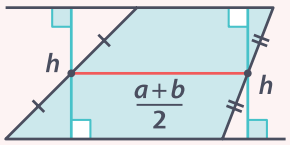
Что и требовалось доказать.



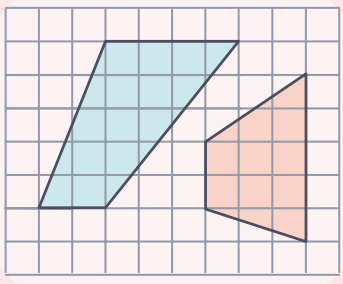
Замечание: Поскольку средняя линия трапеции равна среднему арифметическому её оснований, из доказанной формулы сразу следует, что площадь любой трапеции равна произведению её высоты на среднюю линию.

УПРАЖНЕНИЯ

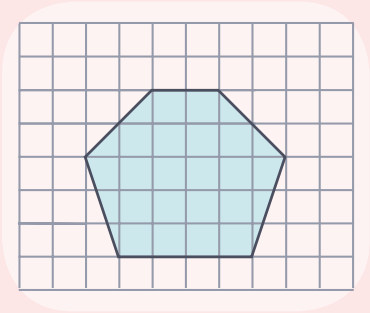
25 Пользуясь данным чертежом, докажите, что площадь трапеции равна произведению её высоты на среднюю линию.



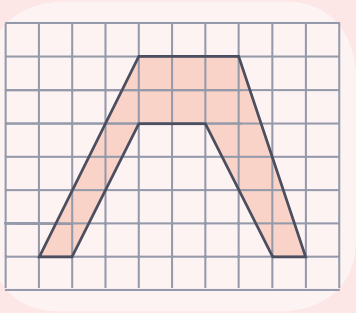
26. Скольким клеткам равны площади фигур на этом рисунке?



27. Сколько клеток составляют площадь шестиугольника на данном рисунке?



28. Сколько клеток составляет площадь восьмиугольника на данном рисунке?

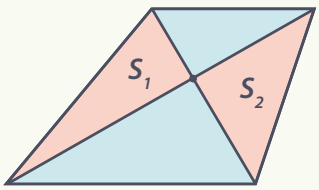


Свойство трапеции

Диагонали трапеции разбивают её на четыре треугольника. Два из них всегда будут иметь одинаковую площадь. Какие же это треугольники? Они прилегают к боковым сторонам трапеции и имеют общую вершину – точку пересечения её диагоналей. Образно можно даже сказать, что два этих треугольника вместе образуют «бабочку» с «крыльями» равной площади. Давайте запишем это утверждение о «крыльях бабочки», как свойство трапеции.

СВОЙСТВО ТРАПЕЦИИ

Площади треугольников, образованных боковыми сторонами трапеции и точкой пересечения её диагоналей, равны.

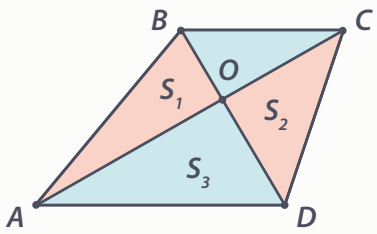


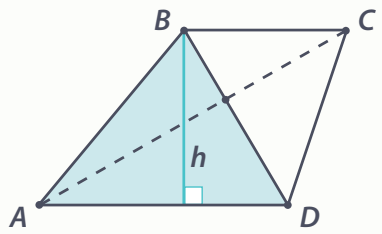
$S_1 = S_2$

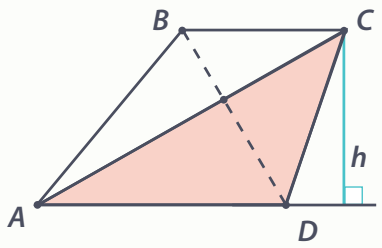
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Пусть диагонали **AC** и **BD** трапеции **ABCD** пересекаются в точке **O**. Мы докажем, что площади треугольников **ABO** и **CDO** равны. Давайте обозначим их площади как S_1 и S_2. А теперь рассмотрим*

*треугольники **ABD** и **ACD**. Эти два треугольника имеют общее основание **AD**, а их высоты из точек **B** и **C** равны по свойству параллельных прямых. Значит, данные треугольники должны иметь и одинаковые площади. Обозначим как S_3 площадь их общей части — треугольника **AOD**. Поскольку треугольники **ABD** и **ACD** равновелики, то мы получаем уравнение $S_1 + S_3 = S_2 + S_3$. Откуда $S_1 = S_2$.*





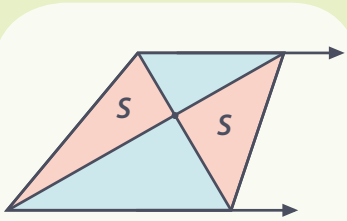


Что и требовалось доказать.

Интересно, что данное рассуждение можно провести в обратную сторону. Тогда из равенства площадей *ABO* и *CDO* «крыльев бабочки» в четырёхугольнике *ABCD* будет следовать, что прямые *BC* и *AD* должны быть параллельны. Мы запишем это как признак четырёхугольника, две стороны которого параллельны.

ПРИЗНАК ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТОРОНАМИ

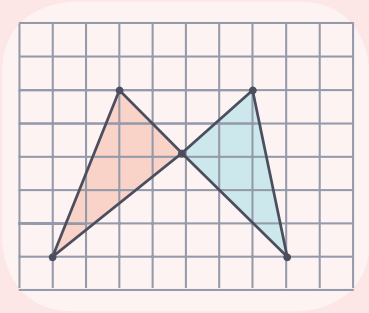
Если между диагоналями и противоположными сторонами четырёхугольника образуются два треугольника одинаковой площади, то другие стороны этого четырёхугольника параллельны.



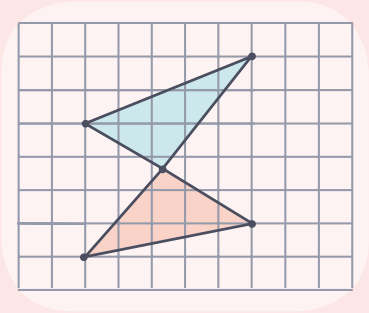
УПРАЖНЕНИЯ

29. Докажите данный признак.

30. Докажите, что два треугольника на рисунке равновелики.



31. Докажите, что два треугольника на рисунке равновелики.



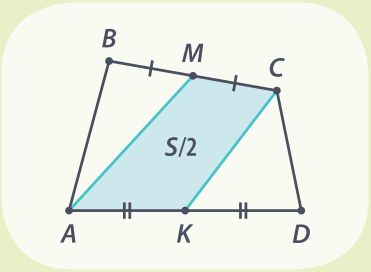
Группировка площадей

Иногда на чертеже нельзя найти точное значение площади каждого из треугольников, но зато можно вычислить сумму их площадей. Такой приём называют ***методом группировки*** площадей. Мы покажем его на трёх примерах.

Первый пример связан с произвольным четырёхугольником. Соедините две его противоположные вершины с серединами двух сторон так, как это показано на рисунке. Тогда между полученными отрезками окажется ровно половина площади всего четырёхугольника. Давайте запишем это как ещё одно свойство четырёхугольника.

СВОЙСТВО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА

Если точки M и K – середины сторон BC и AD четырёхугольника ABCD, то четырёхугольник AMCK составляет половину площади ABCD.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

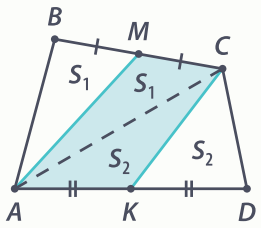
*Сделаем дополнительное построение: проведём диагональ **AC** данного нам четырёхугольника. А теперь рассмотрим треугольники **ABC** и **ACD**. В треугольнике **ABC** отрезок **AM** является медианой,*

поэтому он делит его на две равновеликие части. Обозначим площади этих частей как S_1. *Отрезок* CK *– медиана треугольника* ACD, *он тоже делит его площадь на две равные части. Обозначим их как* S_2. *Тогда для площади* S *всего четырёхугольника* $ABCD$ *можно записать уравнение:*

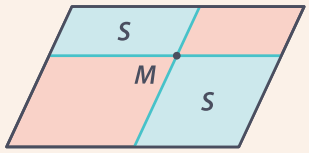
$S = 2S_1 + 2S_2 = 2(S_1 + S_2)$. *Откуда* $S_1 + S_2 = \frac{S}{2}$.

Значит, площадь четырёхугольника $AMCK$ *равна* $S_1 + S_2 = \frac{S}{2}$.

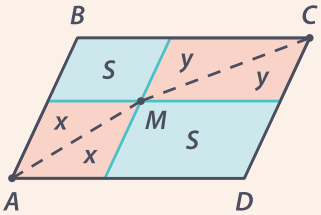
Что и требовалось доказать.



Второй пример связан с параллелограммом. Он очень древний и разбирался ещё в «Началах» Евклида.



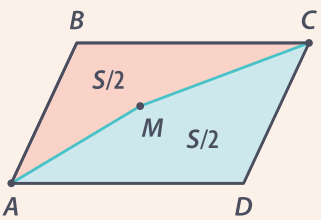
Возьмите точку M внутри параллелограмма и проведите через неё две прямые параллельно его сторонам. Эти прямые разрежут весь параллелограмм на четыре меньших параллелограмма. Где должна находиться точка M, чтобы площади двух из этих параллелограммов, которые не имеют общих сторон, были одинаковы? Понять это сразу совсем не просто. Мы же с вами применим метод группировки площадей и сейчас это выясним.

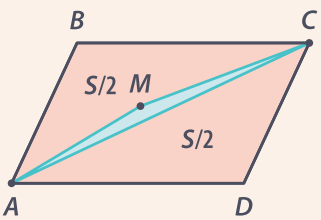


Давайте соединим точку M с вершинами A и C параллелограмма. Отрезки AM и CM являются диагоналями двух малых параллелограммов, поэтому они делят их на треугольники равной площади. Обозначим эти площади буквами x и y. Тогда площадь четырёхугольника $ABCM$ будет равна $S + x + y$. И тому же будет равна площадь четырёхугольника $ADCM$.

Значит, каждый из этих четырёхугольников составляет ровно половину от площади параллелограмма $ABCD$. А теперь давайте проведём диагональ AC. Очевидно, что она тоже делит площадь всего параллелограмма $ABCD$ пополам.

Что же из этого следует? Только то, что на долю треугольника AMC ничего не остаётся – его площадь должна быть равна нулю! Когда такое может быть? Конечно, это будет только тогда, когда точка M лежит на самой диагонали AC. И очень легко проверить, что для любой точки на этой диагонали два малых параллелограмма с вершинами в точках B и D будут равновелики. Итак, все нужные нам точки M лежат на диагонали AC нашего параллелограмма.

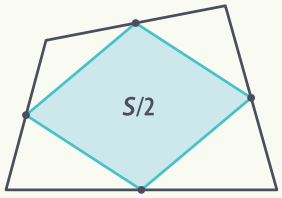




Третий пример связан с параллелограммом Вариньона. Вы помните, что середины сторон любого четырёхугольника образуют параллелограмм? Обычно его называют параллелограммом Вариньона. Оказывается, что площадь параллелограмма Вариньона составляет всегда ровно половину от площади всего четырёхугольника. Причём это верно как для выпуклых, так и для невыпуклых четырёхугольников. Значит, каждый из этих четырёхугольников составляет ровно половину от площади параллелограмма *ABCD*. А теперь давайте проведём диагональ *AC*. Очевидно, что она тоже делит площадь всего параллелограмма *ABCD* пополам.

ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА ВАРИНЬОНА

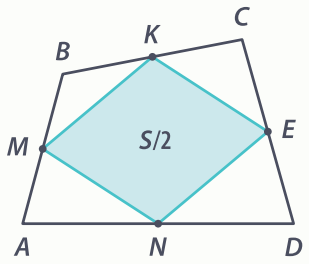
Параллелограмм, образованный серединами сторон любого четырёхугольника, составляет половину его площади.

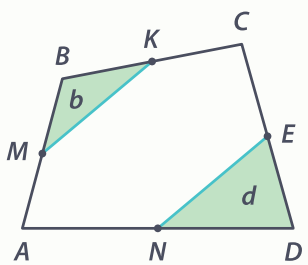


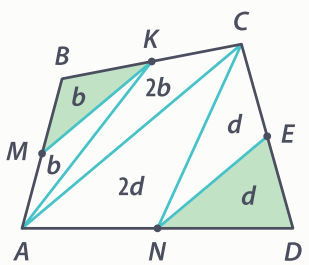
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Мы рассмотрим случай выпуклого четырёхугольника ***ABCD****. Пусть его площадь равна* ***S****, а середины сторон образуют параллелограмм* ***MKEN****. Давайте обозначим площади треугольников* ***MBK*** *и* ***NED*** *буквами* ***b*** *и* ***d*** *и попробуем найти их сумму* ***b*** *+* ***d****. Для этого в данном четырёхугольнике мы проведём диагональ* ***AC****, отрезки* ***AK*** *и* ***CN****. Отрезок* ***NE*** *– медиана треугольника* ***CND****, поэтому площадь* ***CNE*** *тоже равна* ***d****.*

Отрезок ***CN*** *– медиана треугольника* ***ACD****, значит, площадь треугольника* ***ACN*** *равна* ***2d****. Площадь же всего треугольника* ***ACD*** *будет тогда равна* ***4d****. Точно так же можно получить, что площадь треугольника ABC будет равна* ***4b****.*







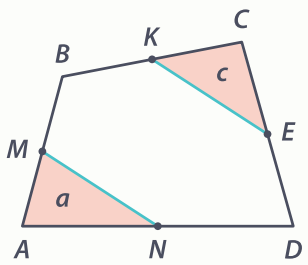
Запишем теперь через b *и* d *площадь* S *всего четырёхугольника* $ABCD$: $S = 4b + 4d = 4(b + d)$.

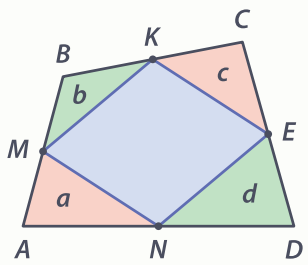
Откуда $b + d = \frac{S}{4}$.

Что делать дальше? Обозначить площади треугольников AMN *и* CEK *буквами* a *и* c *и так же получить, что* $a + c = \frac{S}{4}$.

Для того чтобы теперь найти площадь параллелограмма Вариньона, нужно из площади S *всего четырёхугольника вычесть площади четырёх «угловых» треугольников. Тогда его площадь будет равна*

$$S - (a + b + c + d) = S - (a + c) - (b + d) = S - \frac{S}{4} - \frac{S}{4} = \frac{S}{2}.$$





Что и требовалось доказать.

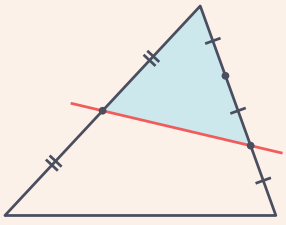
УПРАЖНЕНИЯ

32. Докажите данное утверждение для невыпуклого четырёхугольника.

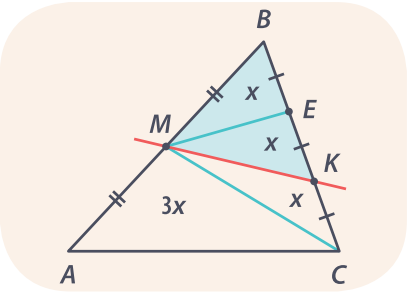
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1 ★☆☆

Прямая делит одну сторону треугольника пополам, а другую – в отношении 2 : 1, считая от их общей вершины. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?



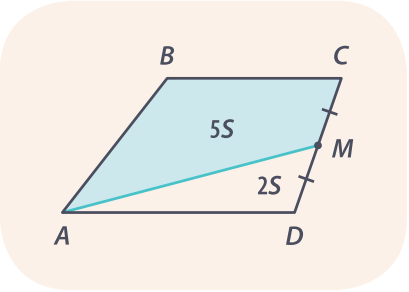
РЕШЕНИЕ: Пусть прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и K, причём $AM = BM$ и $BK : CK = 2$. Отметим точку E – середину отрезка BK. Тогда треугольники MBE, MEK и MKC будут иметь равные площади, поскольку они имеют общую высоту и равные основания. Обозначим их площади буквой x. Отрезок CM – медиана треугольника ABC, значит, он делит его площадь пополам. Следовательно, площадь треугольника AMC равна площади BMC и равна $3x$. Тогда площадь треугольника MBK будет равна $2x$, а площадь четырёхугольника $AMKC$ равна $3x + x = 4x$. Значит, прямая MK делит площадь треугольника ABC в отношении $2x : 4x = 1 : 2$.



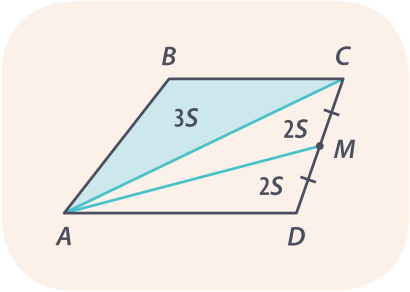
ОТВЕТ: **1 : 2**

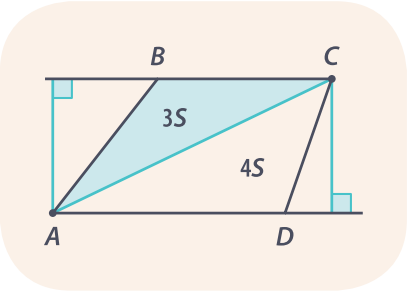
ПРИМЕР 2

Вершину трапеции соединили с серединой её противоположной стороны. Известно, что полученный отрезок делит её площадь в отношении 2 : 5. Найдите отношение оснований трапеции.



РЕШЕНИЕ: Пусть основания трапеции BC и AD, а точка M – середина её боковой стороны CD. Поскольку отрезок AM делит площадь трапеции в отношении 2 : 5, давайте обозначим площади её частей как $2S$ и $5S$. Если мы проведём диагональ AC трапеции, то отрезок AM окажется медианой треугольника ACD. Поэтому площадь треугольника ACM будет равна $2S$. Площадь же треугольника ABC тогда будет равна $5S - 2S = 3S$. Рассмотрим теперь треугольники ABC и ACD. Поскольку прямые BC и AD параллельны, то высоты этих треугольников к этим сторонам будут одинаковы и равны высоте трапеции h. Значит, площади этих треугольников относятся как основания данной трапеции, следовательно $BC : AD = 3S : 4S = 3 : 4$.

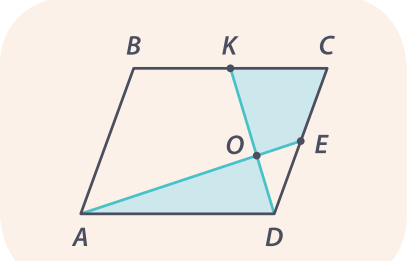




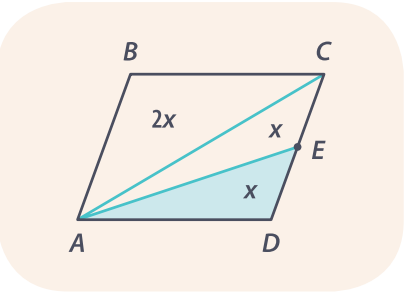
ОТВЕТ: **1 : 2**

ПРИМЕР 3

Точки K и E – середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Отрезки AE и DK пересекаются в точке O. Докажите, что площадь треугольника AOD равна площади четырёхугольника $KOEC$.



РЕШЕНИЕ: Обозначим площадь всего параллелограмма S и выразим через неё площадь треугольника AED. Обозначим её буквой x и проведём диагональ AC. Поскольку AE – медиана треугольника ACD, то площадь треугольника ACE тоже равна x. Диагональ AC делит параллелограмм на два равных треугольника. Значит, площадь треугольника ABC будет равна $2x$. Тогда для площади всего параллелограмма мы получаем уравнение $S = x + x + 2x = 4x$. Откуда $x = \frac{S}{4}$. То есть треугольник AED составляет четверть площади всего параллелограмма. Аналогично находим, что площадь треугольника CDK тоже равна $\frac{S}{4}$.

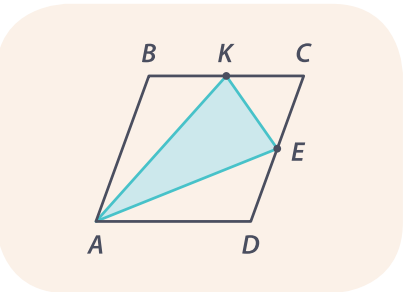


Итак, мы доказали, что площади треугольников AED и CKD равны. Но эти треугольники имеют общую часть – треугольник DOE. Если мы вычтем его площадь из площадей данных двух треугольников, то получим площадь треугольника AOD и площадь четырёхугольника $KOEC$. Следовательно, эти площади тоже равны.

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 4 ★★☆

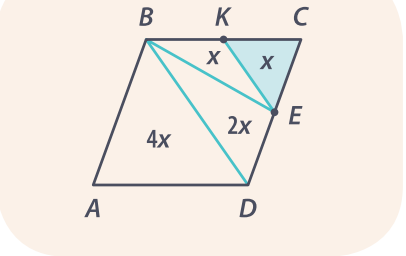
Точки K и E – середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Какую часть площади параллелограмма составляет треугольник AKE?



РЕШЕНИЕ: Обозначим площадь всего параллелограмма буквой S и вычислим площадь треугольника AKE. Для этого из площади параллелограмма мы вычтем площади «крайних» треугольников ABK, AED и CEK.

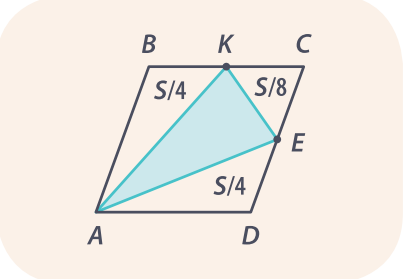
Как при решении предыдущей задачи, мы найдём, что площадь каждого из треугольников ABK и AED равна $\frac{S}{4}$.

Вычислим теперь площадь треугольника CEK. Обозначим её буквой x и проведём отрезки BE и BD. Поскольку KE – медиана треугольника BEC, то площадь треугольника BKE будет тоже равна x. В треугольнике BCD отрезок BE – тоже медиана, значит, площади треугольников BED и BEC равны $2x$. Диагональ BD параллелограмма делит его на два равных треугольника, поэтому площадь ABD будет равна $4x$. Тогда мы получаем уравнение $S = x + x + 2x + 4x = 8x$. Откуда $x = \frac{S}{8}$.



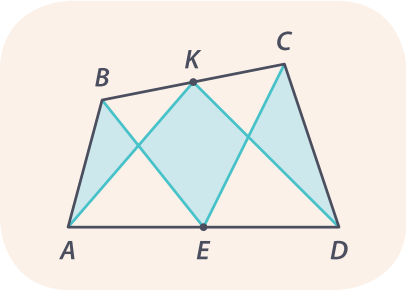
Следовательно, площадь треугольника AKE равна $S - \frac{S}{4} - \frac{S}{4} - \frac{S}{8} = \frac{3}{8}S$.

Поэтому площадь этого треугольника составляет $\frac{3}{8}$ от площади параллелограмма.



ОТВЕТ: $\frac{3}{8}$

ПРИМЕР 5



Середины *K* и *E* двух противоположных сторон четырёхугольника *ABCD* соединили с его вершинами так, как это показано на рисунке. Докажите, что площадь закрашенного на нём четырёхугольника равна сумме закрашенных треугольников.

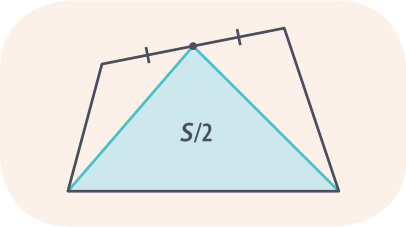
РЕШЕНИЕ: Обозначим всего четырёхугольника буквой *S*. По доказанному ранее нами свойству площадь четырёхугольника *AKCE* равна $\frac{S}{2}$. Площадь четырёхугольника *BEDK* равна тоже $\frac{S}{2}$.

Если мы сложим площади этих четырёхугольников, то получим $\frac{S}{2} + \frac{S}{2} = S$, то есть, площадь всего четырёхугольника *ABCD*.

При этом мы не учтём площади двух закрашенных треугольников, но зато два раза посчитаем площадь закрашенного четырёхугольника. Значит, площадь этого четырёхугольника должна быть равна сумме площадей закрашенных треугольников.

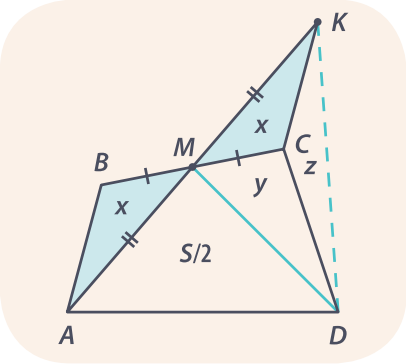
Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 6



Середину стороны четырёхугольника соединили с противоположными вершинами. Оказалось, что полученный треугольник составляет половину его площади. Докажите, что у этого четырёхугольника две стороны параллельны.

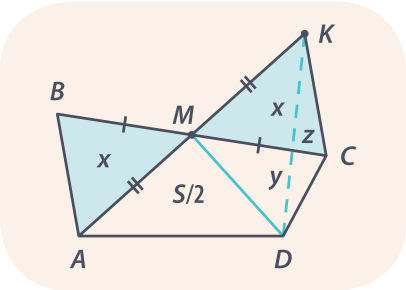
РЕШЕНИЕ: Пусть *M* – середина стороны *BC* четырёхугольника *ABCD*, причём треугольник *AMD* составляет ровно половину площади *S* всего четырёхугольника. Мы докажем, что стороны *AB* и *CD* этого четырёхугольника должны быть параллельны.



Сделаем дополнительное построение: продлим отрезок *AM* на свою длину. То есть мы построим такую точку *K*, что *AM* = *MK*. Легко доказать, что треугольники *ABM* и *KCM* равны по первому признаку, а прямые *AB* и *CK* параллельны (проверьте это!) Значит, площади данных треугольников равны – мы обозначим их буквой *x*. Площадь же треугольника *CMD* обозначим буквой *y*.

По условию должно быть $x + y = \frac{S}{2}$.

Кроме того, треугольники *AMD* и *KMD* имеют одинаковую площадь $\frac{S}{2}$, поскольку *DM* – медиана в треугольнике *ADK*.



Нам осталось совсем немного. Посмотрите на треугольник *CKD* – мы обозначим его площадь буквой *z*.

Если точка C находится внутри треугольника *DMK*, то должно быть

$x + y + z = \frac{S}{2}$.

Но мы помним, что $x + y = \frac{S}{2}$. Поэтому $z = 0$.

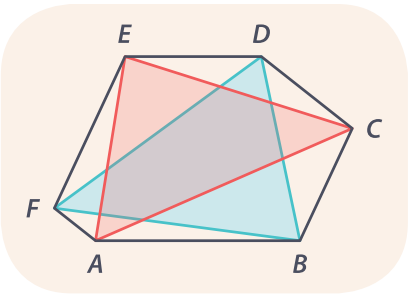
Если же точка *C* окажется вне треугольника *DMK*, то будет $x + y = \frac{S}{2} + z$.

Значит, и в этом случае $z = 0$. Когда такое может быть? Только тогда, когда точка C лежит на прямой DK! Но тогда прямая CD совпадёт с прямой CK, которая параллельна прямой AB.

Значит, стороны AB и CD данного нам четырёхугольника должны быть параллельны.

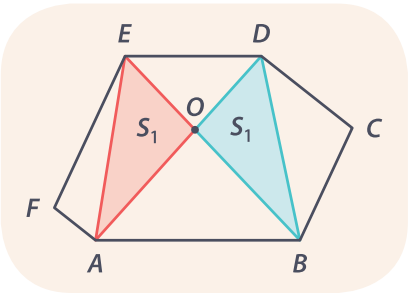
Что и требовалось доказать.

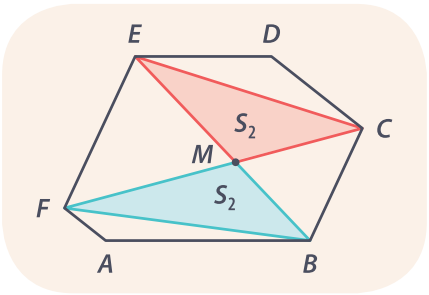
ПРИМЕР 7 ★ ★ ★

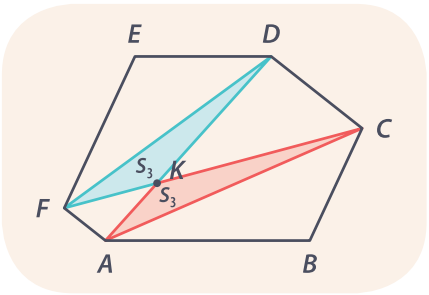


Противоположные стороны шестиугольника $ABCDEF$ попарно параллельны. Докажите, что треугольники AEC и BFD равновелики.

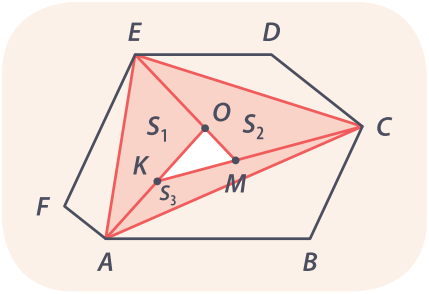
РЕШЕНИЕ: Рассмотрим точку O пересечения его диагоналей AD и BE. Поскольку прямые AB и ED параллельны, то треугольники AEO и BDO будут равновелики по свойству трапеции. Обозначим площади этих треугольников как S_1. Теперь рассмотрим точку M пересечения диагоналей BE и FC шестиугольника. Поскольку его стороны BC и EF тоже параллельны, то треугольники ECM и BFM будут равновелики по свойству трапеции. Обозначим их площади как S_2. Так же из параллельности сторон AF и CD будет следовать равенство площадей треугольников ACK и DFK, где K – точка пересечения диагоналей AD и CF данного шестиугольника. Мы обозначим их площади как S_3.

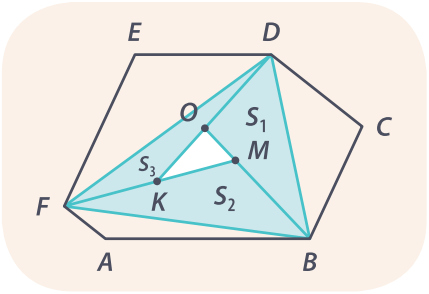






Посмотрите теперь на нужные нам треугольники AEC и BFD. Первый из них состоит из треугольника OMK и трёх жёлтых треугольников с площадями S_1, S_2 и S_3. Второй – из того же треугольника OMK и трёх синих треугольников с такими же площадями S_1, S_2 и S_3.





Значит, эти треугольники имеют равную площадь.

Что и требовалось доказать.

ВОПРОСЫ

1. В чем измеряют площади?
2. Сколько квадратных сантиметров в одном квадратном метре?
3. Что такое палетка? Как ей измеряют площадь?
4. Верно ли, что две фигуры равны, если они имеют одинаковую площадь?
5. Какие основные свойства площади вы знаете?
6. Как измерить площадь прямоугольника?
7. Как изменится площадь прямоугольника, если каждую его сторону увеличить в 2 раза?
8. Чему равна площадь параллелограмма?
9. Верно ли, что каждая диагональ параллелограмма делит его площадь пополам?
10. Верно ли, что высоты параллелограмма относятся как его стороны?
11. Чему равна площадь треугольника?
12. Может ли треугольник иметь площадь 1, если каждая его сторона больше 100?
13. Вершины A и B треугольника неподвижны, а вершина C третья движется по прямой, параллельной AB. Как меняется площадь этого треугольника?
14. Чему равна площадь трапеции?
15. Верно ли, что площадь трапеции равна произведению её высоты на среднюю линию?
16. Каким свойством обладает медиана любого треугольника?
17. Какие треугольники равновелики в любой трапеции?
18. Что вы знаете о площади параллелограмма Вариньона?
19. Верно ли, что отрезок, который соединяет середины двух оснований любой трапеции, делит её площадь пополам?
20. Верно ли, что диагонали параллелограмма разбивают его на четыре треугольника равной площади?
21. У двух параллелограммов совпадают три вершины. Верно ли, что площади этих параллелограммов равны?
22. Точку на стороне параллелограмма соединили с его противоположными вершинами. Какую часть площади параллелограмма составляет полученный треугольник?
23. Два разных треугольника имеют две соответственно равные стороны и одинаковую площадь. Что можно сказать об углах этих треугольников между данными сторонами?

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

1 ★☆☆ Как изменится площадь квадрата, если его сторону увеличить в 3 раза? А если уменьшить её в 2 раза?

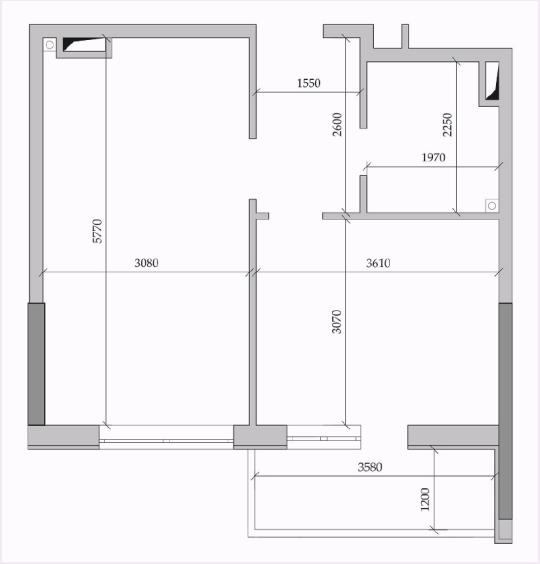
2 ★☆☆ Найдите ребро куба, если площадь полной его поверхности равна 150 см^2.

3 ★☆☆ Сколько нужно плиток кафеля размером 10 х 10 см, чтобы ими выложить стену длиной 4 м 70 см и высотой 2 м 60 см?

4 ★☆☆ Забор высотой 2 м окружает участок 20 х 30 м. Сколько нужно взять банок краски, чтобы покрасить его со всех сторон, если одной банки хватает на 25 м^2 поверхности этого забора?

5 ★☆☆ Жилая комната имеет размеры 4х6 м, а высота её потолка 3 м. Высота дверного проёма 210 см, а его ширина 95 см. В комнате есть окно размерами 150 х 200 см. Какое наименьшее число рулонов обоев нужно для оклейки стен этой комнаты, если полотно в рулоне имеет ширину 0,5 м, а его длина равна 10 м?

6 ★☆☆ На чертеже показан план однокомнатной квартиры с балконом. Все размеры на нём даны в миллиметрах. Найдите по нему общую площадь квартиры. Ответ округлите до целого числа квадратных метров.



7 ★☆☆ До революции в России небольшие расстояния мерили в саженях. Казённая сажень составляла 7 английских футов, что примерно равно 213 см. Поле, имеющее в длину 240, а в ширину 150 сажен, засевают овсом. Сколько для этого нужно взять пудов семян овса, если одного пуда хватает на то, чтобы засеять им 180 квадратных саженей земли?

8 ★☆☆ Площадь земельного участка равна 0,02 км^2. Чему равна его площадь в гектарах?

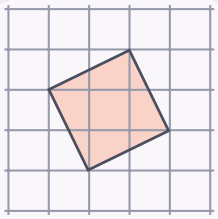
9 ★☆☆ Найдите периметр квадрата, площадь которого равна 2,5 м^2.

10 ★☆☆ Прямоугольный участок земли имеет площадь 400 га. Найдите его периметр, если:

а) в длину он имеет 10 км.

б) участок имеет форму квадрата.

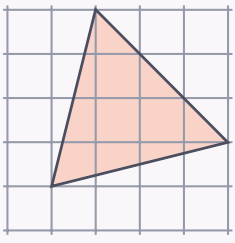
11 ★☆☆ Сколько клеток составляет площадь квадрата на рисунке? Как вы думаете, чему может быть равна сторона этого квадрата?



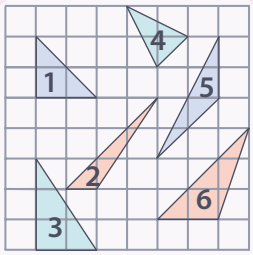
к задаче 11

12 ★☆☆ Постройте на клетчатой бумаге квадрат, площадь которого равна 2 клетки.

13 ★☆☆ Сколько клеток составляет площадь треугольника на рисунке?



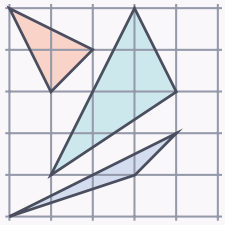
к задаче 13



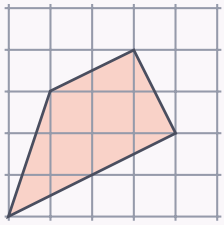
к задаче 14

14 ★☆☆ Каждый из треугольников на рисунке отмечен своей цифрой. Напишите все пары цифр, которые соответствуют на нём треугольникам равной пощади.

15 ★☆☆ Сколько клеток составляет площадь каждого треугольника на этом рисунке?



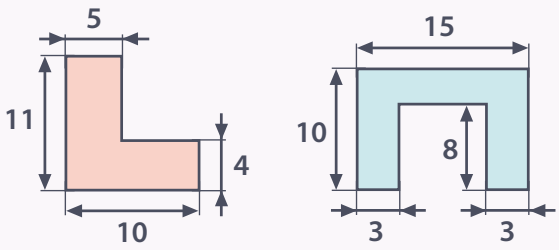
к задаче 15



к задаче 16

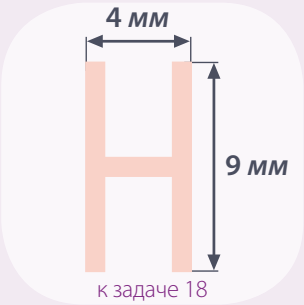
16 ★☆☆ Сколько клеток составляет площадь трапеции на рисунке?

17 ★☆☆ Найдите площадь прямоугольных фигур на рисунках.



к задаче 17

18 ★☆☆ Буква Н имеет всюду одинаковую толщину линии. Найдите эту толщину, если общая ширина буквы равна 4 мм, её высота 9 мм, а площадь равна 5,25 мм^2.



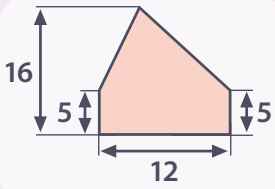
к задаче 18

19 ★☆☆ Пол в зале покрывают плитками размером 20 x 20 см, у каждой их которых «отрезан» один угол. В дырки, получающиеся при укладке этих плиток, вставляют маленькие квадратики. Какое наименьшее количество таких квадратиков необходимо иметь, чтобы таким образом покрыть зал размером 6 x 7 м?

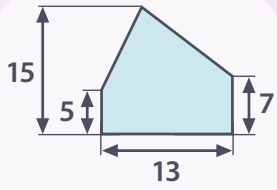
20 ★☆☆ Найдите площадь ромба, диагонали которого равны 4 и 6.

21 ★☆☆ На клетчатой бумаге постройте ромб с вершинами в узлах сетки, площадь которого равна 12 клеткам.

22 ★☆☆ Найдите площадь фигуры, показанной на рисунке.



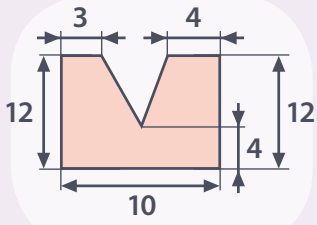
к задаче 22



к задаче 23

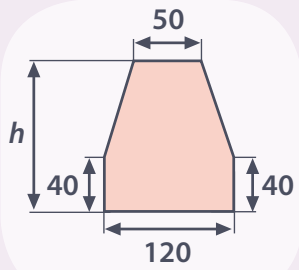
23 ★☆☆ Найдите площадь фигуры, показанной на рисунке.

24 ★☆☆ Найдите площадь фигуры, показанной на рисунке.

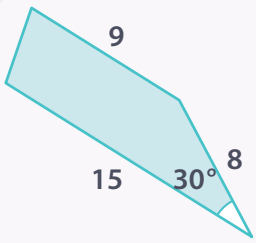


к задаче 24

25 ★☆☆ Размеры шестиугольной детали на рисунке указаны в миллиметрах. Найдите высоту этой детали, если её площадь равна 12 110 мм^2.



к задаче 25



к задаче 26

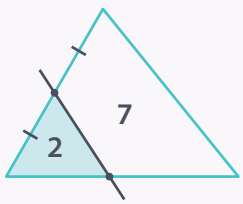
26 ★☆☆ Основания трапеции равны 9 и 15, а боковая её сторона равна 8. Найдите площадь трапеции, если угол при данной боковой стороне равен 30°.

27 ★☆☆ Основание трапеции равно 7, а два угла при нём равны 45°. Найдите другое основание этой трапеции, если её площадь равна 10.

28 ★☆☆ Через вершину параллелограмма провели прямую, которая делит его площадь в отношении 5 : 7. В каком отношении эта прямая делит сторону параллелограмма?

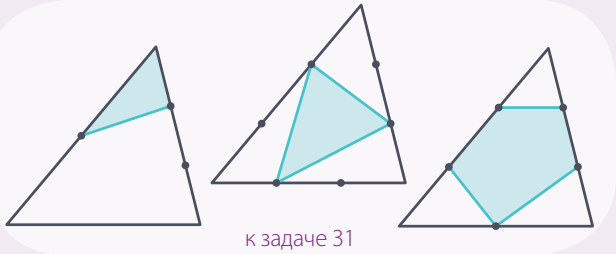
29 ★☆☆ В каком отношении делит площадь треугольника его средняя линия?

30 ★☆☆ Через середину стороны треугольника провели прямую, которая делит его на две части, площади которых равны 2 и 7. В каком отношении эта прямая делит другую сторону этого треугольника?



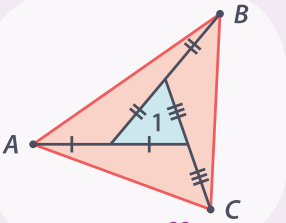
к задаче 30

31 ★☆☆ Площадь треугольника равна 1. Каждая его сторона отмеченными точками делится на равные части. Найдите площади закрашенных фигур на рисунках.

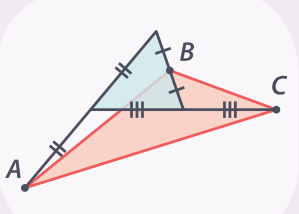


к задаче 31

32 ★☆☆ Площадь закрашенного треугольника равна 1. Его стороны продолжили так, как показано на рисунке. Найдите площадь треугольника ABC.



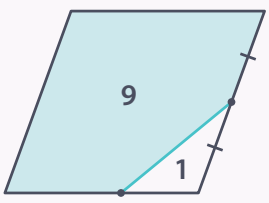
к задаче 32



к задаче 33

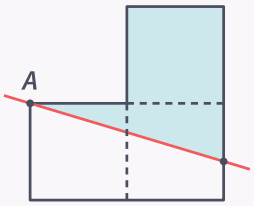
33 ★★☆ Площадь закрашенного треугольника равна 1. Его стороны продолжили так, как показано на рисунке. Найдите площадь треугольника ABC.

34 ★★☆ Через середину стороны параллелограмма провели прямую, которая делит его на две части, площади которых равны 1 и 9. В каком отношении эта прямая делит другую сторону параллелограмма?

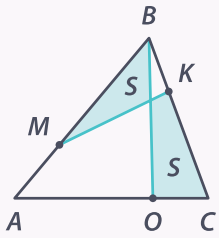


к задаче 34

35 ★★☆ Фигура, показанная на рисунке, состоит из трёх квадратов. Через точку A этой фигуры провели прямую, которая делит её площадь пополам. В каком отношении данная прямая делит сторону самой фигуры?



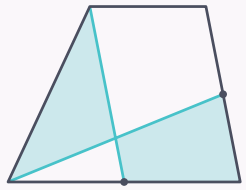
к задаче 35



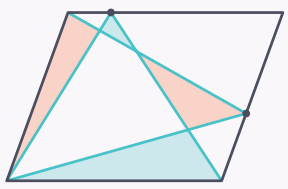
к задаче 36

36 ★★☆ На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли точки M и K так, что AM : MB = BK : KC = 1 : 2. Вершину B соединили отрезком с такой точкой O на стороне AC, чтобы площади закрашенных на рисунке треугольника и четырёхугольника были равны. Найдите AO : OC.

37 ★★☆ Отмеченные на рисунке точки – середины сторон трапеции. Докажите, что площади закрашенных фигур равны.



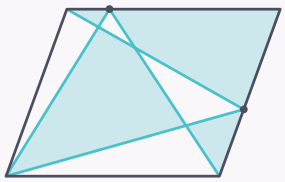
к задаче 37



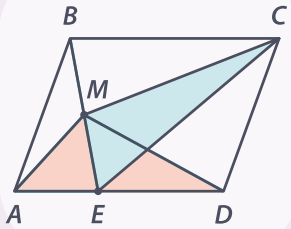
к задаче 38

38 ★★☆ Две точки на сторонах параллелограмма соединили с тремя его вершинами так, как это показано на рисунке. Докажите, что на нём сумма площадей жёлтых треугольников равна сумме площадей синих.

39 ★★☆ Две точки на сторонах параллелограмма соединили с тремя его вершинами так, как это показано на рисунке. Докажите, площадь одной из отмеченных на рисунке частей равна сумме площадей других.



к задаче 39

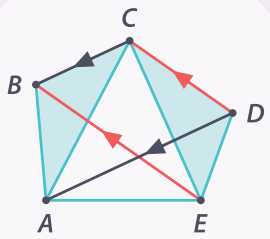


к задаче 40

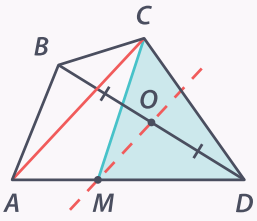
40 ★★☆ Внутри параллелограмма ABCD взяли произвольную точку M. Прямая BM пересекает AD в точке E. Докажите, что площади треугольников AMD и CME равны.

41 ★★☆ Отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырёхугольника, делит его площадь пополам. Докажите, что две стороны четырёхугольника параллельны.

42 ★★☆ В пятиугольнике ABCDE стороны BC и CD параллельны соответственно диагоналям AD и BE. Докажите, что треугольники ABC и CDE равновелики.



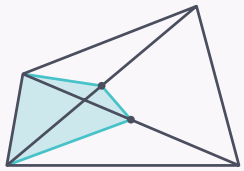
к задаче 42



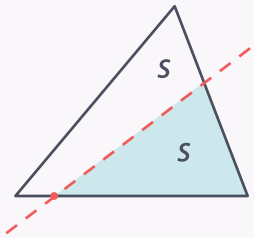
к задаче 43

43 ★★☆ Точка O – середина диагонали BD четырёхугольника ABCD. Через неё параллельно его диагонали AC провели прямую. Она пересекла сторону AD в точке M. Докажите, что отрезок CM делит площадь четырёхугольника пополам.

44 ★★☆ Середины диагоналей выпуклого четырёхугольника соединили с двумя его вершинами так, как это показано на рисунке. Какую часть от площади четырёхугольника составляет закрашенная фигура?



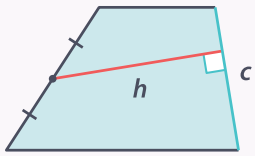
к задаче 44



к задаче 45

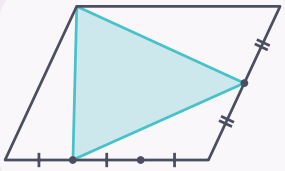
45 ★★☆ Через данную точку на стороне треугольника проведите прямую так, чтобы она делила его площадь пополам. Сколько таких прямых можно провести?

46 ★★☆ Боковая сторона трапеции равна c, а расстояние до неё от середины другой боковой её стороны h. Найдите площадь трапеции.



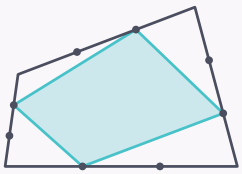
к задаче 46

47 ★☆☆ Отмеченные на рисунке точки делят стороны параллелограмма на равные части. Какую часть площади параллелограмма составляет закрашенный треугольник?



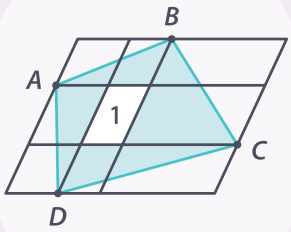
к задаче 47

48 ★★☆ Каждую сторону выпуклого четырёхугольника разделили на три равные части. Соответствующие точки соединили так, как это показано на рисунке. Какую часть исходного четырёхугольника составляет закрашенная фигура?



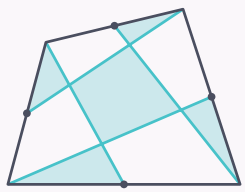
к задаче 48

49 ★★☆ Параллелограмм разбили на девять меньших параллелограммов так, как это показано на рисунке. Найдите площадь четырёхугольника ABCD, если площадь центрального параллелограмма равна 1, а площадь исходного – 13.



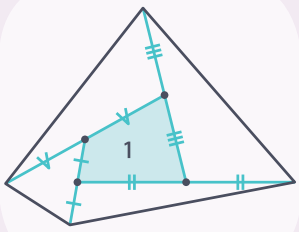
к задаче 49

50 ★★☆ Середины сторон четырёхугольника соединили с его вершинами так, как показано на рисунке. Докажите, что площадь закрашенного четырёхугольника равна сумме площадей закрашенных треугольников.



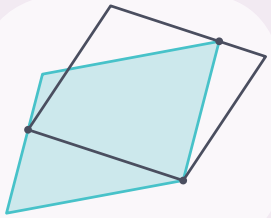
к задаче 50

51 ★★★ Площадь закрашенного четырёхугольника равна 1. Все его стороны продолжили на свою длину так, как это показано на рисунке. Найдите площадь получившегося большого четырёхугольника.



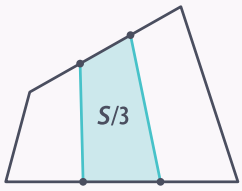
к задаче 51

52 ★★★ Два параллелограмма расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что их площади равны.



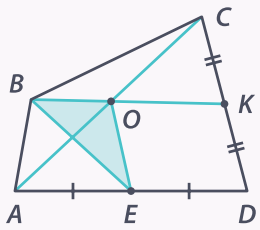
к задаче 52

53 ★★★ Две противоположные стороны выпуклого четырёхугольника разделили на три равные части. Соответствующие точки деления соединили так, как показано на рисунке. Докажите, что между получившимися отрезками находится ровно треть его площади.

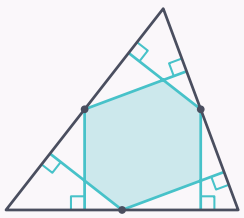


к задаче 53

54 ★★★ Точки E и K – середины сторон AD и CD четырёхугольника ABCD. Отрезок BK пересекает диагональ AC в точке O. Докажите, что площадь треугольника OBE в два раза меньше площади треугольника ABC.



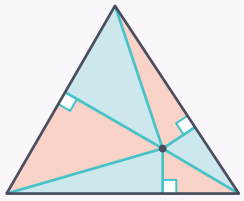
к задаче 54



к задаче 55

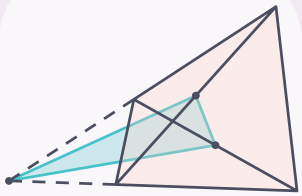
55 ★★★ Площадь треугольника равна 1. Из середины каждой стороны треугольника опустили перпендикуляры на другие его стороны. Найдите площадь образованного ими шестиугольника.

56 ★★★ Внутри равностороннего треугольника взяли точку. Её соединили со всеми его вершинами, а также опустили перпендикуляры на все стороны. Получившиеся при этом шесть треугольников покрасили в синий и оранжевый цвета так, как это показано на рисунке. Докажите, что сумма площадей синих треугольников равна сумме площадей оранжевых.



к задаче 56

57 ★★★ Середины диагоналей выпуклого четырёхугольника соединили с точкой пересечения продолжений двух его противоположных сторон. Докажите, что площадь получившегося треугольника равна ¼ площади четырёхугольника.



к задаче 57

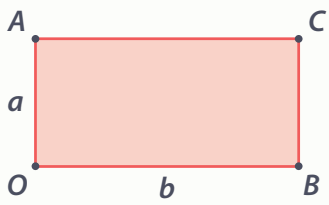
ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Площадь прямоугольника

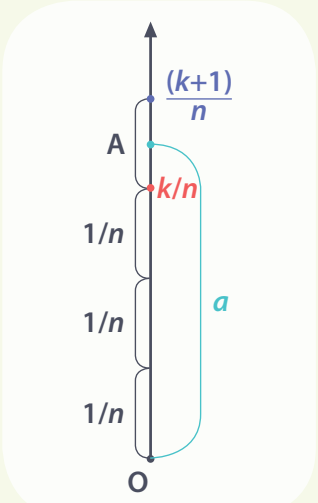
Мы с вами доказали теорему о площади прямоугольника для всех треугольников с «дробными» или рациональными сторонами. Но, как вы помните, в геометрии не все отрезки соизмеримы друг с другом, поэтому и длина любого отрезка по отношению к единице измерения не всегда может быть выражены дробью или отношением двух натуральных чисел. Останется ли справедливой теорема о площади прямоугольника в общем случае, то есть для прямоугольников с любыми сторонами? Мы с вами покажем, что это так, и площадь прямоугольника всегда равна произведению его сторон.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Пусть длины соседних стороны **OA** и **OB** данного нам прямоугольника **OABC** равны **a** и **b**, причем эти числа уже не обязательно соизмеримы с **1**. Мы покажем, что площадь этого прямоугольника должна равняться их произведению **ab**. Здесь нам с вами опять понадобится аксиома Евдокса-Архимеда. По этой аксиоме даже самый маленький отрезок нельзя сколько угодно раз «отрезать» от другого отрезка – рано или поздно этот процесс закончится.*



Давайте возьмём маленький отрезок с длиной $\frac{1}{n}$ *и будем последовательно «отрезать» или откладывать его от точки* O *на отрезке* OA. *Если на данном отрезке поместится не больше* k *отрезков длины* $\frac{1}{n}$, *то это значит, что*



$$\frac{k}{n} \le a < \frac{(k+1)}{n}. \quad (\mathrm{I})$$

Точно так же мы будем откладывать отрезки с длиной $\frac{1}{n}$ *от точки* O *на отрезке* OB. *Пусть на отрезке с длиной* b *поместится не более* m *таких отрезков. Это будет значить, что*

$$\frac{m}{n} \le b < \frac{(m+1)}{n}. \quad (\mathrm{II})$$

Если мы просто перемножим эти два неравенства, то получим, что

$$\frac{km}{n^2} \le ab < \frac{(k+1)(m+1)}{n^2}$$

Посмотрим теперь на данный нам прямоугольник $OACB$. *Ясно, что он содержит внутри себя меньший прямоугольник с рациональными сторонами* $\frac{k}{n}$ *и* $\frac{m}{n}$.

Значит, его площадь S *должна быть больше площади этого прямоугольника, которая равна произведению его сторон* $\frac{k}{n} \cdot \frac{m}{n} = \frac{km}{n^2}$, *ведь теорема для таких прямоугольников нами уже доказана.*

Точно так же легко можно видеть, что данный нам прямоугольник $OACB$ *целиком содержится в большем прямоугольнике, стороны которого* $\frac{(k+1)}{n}$ *и* $\frac{(m+1)}{n}$.

Отсюда следует, что его площадь S *меньше* $\frac{(k+1)}{n} \cdot \frac{(m+1)}{n} = \frac{(k+1)(m+1)}{n^2}$

Итак, числа S *и* ab *одновременно больше числа* $\frac{km}{n^2}$ *и одновременно меньше числа* $\frac{(k+1)(m+1)}{n^2}$.

Это значит, что на числовой прямой они находятся на одном отрезке между ними. Но тогда расстояние между числами S *и* ab *должно быть меньше разности концов этого отрезка, то есть*

$$|S - ab| < \frac{(k+1)(m+1)}{n^2} - \frac{km}{n^2} = \frac{(k+m+1)}{n^2}. \quad (\mathrm{III})$$

Мы с вами сейчас покажем, что $S = ab$. *Из неравенства* (I) *сразу следует, что* $k \le a\,n$.

Точно также из неравенства (II) *следует, что* $m \le b\,n$.

Поэтому должно быть $\frac{(k+m+1)}{n^2} < \frac{(a\,n + b\,n + 1)}{n^2} < \frac{(a+b+1)}{n}$

Значит, для любого натурального числа n *должно быть верно, что*

$|S - ab| < \frac{(a+b+1)}{n}$. *Если мы обе части этого неравенства умножим на положительное число* n, *то получим:*

$n\,|S - ab| < (a + b + 1)$.

Обозначим разность $|S - ab|$ *как* ε. *А теперь предположим, что числа* S *и* ab *различаются, тогда* ε *– будет длиной отрезка между ними. Но разве может быть, что для любого натурального числа* n *всегда выполнялось* $n\varepsilon < (a + b + 1)$? *Ведь это противоречит как раз аксиоме Евдокса-Архимеда!*

Что отсюда следует? Именно то, что $\varepsilon = 0$.

Но тогда $S = ab$*, то есть площадь любого прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.*

Что и требовалось доказать.

Когда верна Египетская формула?

В начале параграфа мы с вами говорили о том, что на протяжении веков в древнем Египте для вычисления площади земельного надела в форме четырёхугольника писцы брали среднее арифметическое двух его противоположных сторон и умножали на среднее арифметическое двух других сторон.

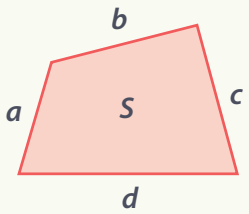
Эта формула была неточной и, как мы выясним, правильную площадь по ней можно вычислить только для прямоугольника. Во всех остальных случаях эта формула даёт большую площадь – в некотором смысле писцы работали в пользу фараона, ведь от площади надела зависела подать, которую необходимо было платить за пользование землёй. Можно подумать, что жрецы делали так специально, но что гораздо вероятнее – другой формулы у них просто не было, ведь только её нашли в сохранившихся до нас папирусах.

Итак, мы с вами докажем, что

Для площади S любого четырёхугольника со сторонами a, b, c и d выполняется неравенство:

$$S \le \frac{(a+c)}{2} \cdot \frac{(b+d)}{2}$$

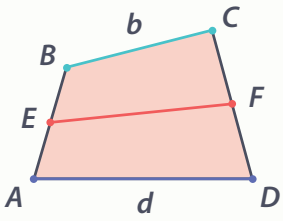
Причём, равенство верно только для прямоугольника.



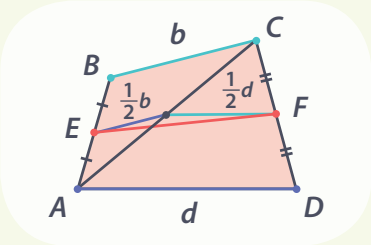
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть длины сторон BC *и* AD *четырёхугольника* $ABCD$ *равны* b *и* d*. Отметим середины* E *и* F *двух других его сторон. Как вы помните, отрезок* EF *называют средней линией четырёхугольника.*

Давайте покажем, что его средняя линия $EF \le \frac{1}{2}(b+d)$.



Для этого мы проведём диагональ AC *и отметим её середину* P.

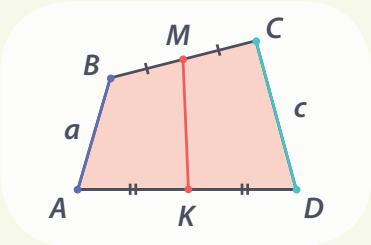


Отрезок EP *– средняя линия треугольника* ABC, *поэтому он равен* $\frac{1}{2}b$.

Отрезок PF *– средняя линия треугольника* ACD, *значит, его длина* $\frac{1}{2}d$.

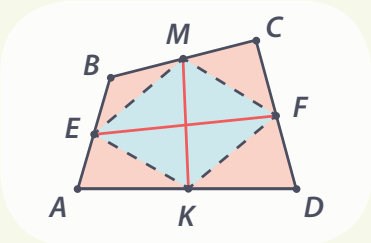
Теперь посмотрите на треугольник EPF: *по неравенству треугольника средняя линия* $EF \le EP + PF = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}(b+d)$.

Причём, равенство будет лишь тогда, когда точка P *лежит на отрезке* EF, *и тогда стороны* BC *и* AD *должны быть параллельны.*



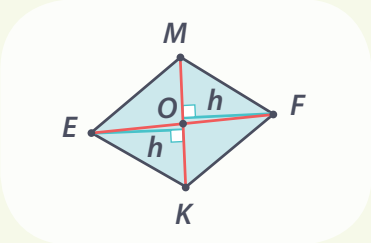
Как связать средние линии четырёхугольника с его площадью? Здесь нам поможет теорема Вариньона. По этой теореме середины сторон четырёхугольника образуют параллелограмм. Более того – мы с вами уже доказали, что площадь этого параллелограмма всегда равна ровно половине площади всего четырёхугольника.

Две его средние линии – это диагонали данного параллелограмма. Пусть они пересекаются в точке O. *По свойству диагонали параллелограмма делят друг друга пополам, поэтому* $EO = OF$.



Давайте теперь опустим из точек E *и* F *высоты на прямую* MK. *Они будут иметь одинаковую длину* h *– это легко следует из равенства треугольников (знаете, каких?). Поскольку перпендикуляр к прямой всегда короче наклонной, проведённой к ней из той же точки, то* $h \le EO$ *и* $h \le OF$.

Поэтому должно быть $h \le \frac{1}{2}EF$.



Теперь давайте оценим площадь параллелограмма Вариньона $EMFK$. *Она складывается из площадей треугольников* MEK *и* MFK *и равна* $\frac{1}{2}MK \cdot h + \frac{1}{2}MK \cdot h = MK \cdot h$.

Значит, его площадь не больше $\frac{1}{2}MK \cdot EF$.

Но как мы уже выяснили $MK \le \frac{1}{2}(a+c)$ *и* $EF \le \frac{1}{2}(b+d)$.

Поэтому должно быть $\frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{EMFK} \le \frac{1}{2}MK \cdot EF \le \frac{1}{2}\frac{(a+c)}{2}\cdot\frac{(b+d)}{2}$

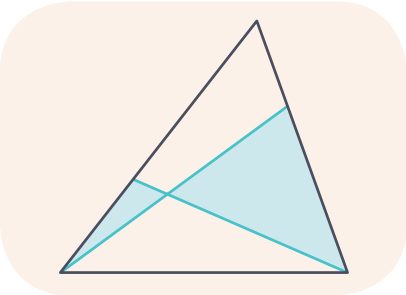
Откуда следует, что всегда $S_{ABCD} \le \frac{(a+c)}{2}\cdot\frac{(b+d)}{2}$.

Что и требовалось доказать.

Когда же египетская формула может дать верную площадь четырёхугольного надела земли? Для этого необходимо, чтобы одновременно выполнялись равенства $MK = ½\ (a + c)$ и $EF = ½\ (b + d)$. Кроме того, нужно чтобы $2h = EF$. Первые два равенства будут только, если противоположные стороны четырёхугольника параллельны друг другу, а третье – когда его средние линии MK и EF перпендикулярны.

Но тогда четырёхугольник $ABCD$ должен быть прямоугольником. Очевидно, для прямоугольников египетская формула даёт верную площадь. Если же надел земли не имел такой формы, ошибка при подсчёте его площади могла быть очень существенна. Например, для участка земли, имеющего форму параллелограмма с углом 30°, она уже составляет 100%.

§ 12 ПЛОЩАДИ ЧАСТЕЙ ФИГУР



В этом параграфе мы разберём несколько методов, с помощью которых можно вычислять площади частей треугольника или четырёхугольника. Несколько прямых могут делить треугольник на части. Если известно, как они делят его стороны, то можно найти, в каком отношении эти прямые делят и площадь треугольника.

В данном параграфе мы научимся это делать. И начнем с самого простого случая, когда одна прямая проходит через вершину треугольника. Если она пересекает его противоположную сторону, то отрезок этой прямой, лежащий внутри треугольника, обычно называют чевианой. Данное название связано с именем итальянского инженера и математика XVII века Джовани Чевы – он первый доказал теорему о пересечении таких отрезков в треугольнике. Мы эту теорему разберём в следующем параграфе.

А пока давайте запишем:

Чевианой треугольника называют отрезок, который соединяет его вершину с любой точкой на противоположной стороне.

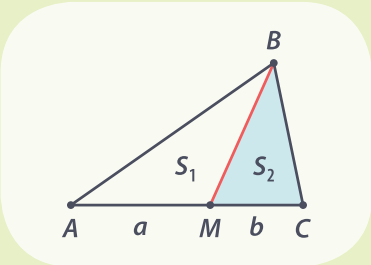
Значит, и медиана, и биссектриса треугольника являются его чевианами. А высота будет чевианой треугольника в том случае, когда она падает на сторону треугольника.

Давайте подумаем: в каком отношении чевиана делит площадь всего треугольника? Оказывается, в том же самом отношении, в котором она делит его сторону. И мы запишем это как

СВОЙСТВО ЧЕВИАНЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

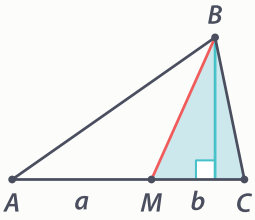
Чевиана делит площадь треугольника и его сторону в одинаковом отношении.

$$S_1 : S_2 = a : b$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Проведём в треугольнике **ABC** любую чевиану **BM** и докажем, что она делит его площадь и сторону **AC** в одном отношении. Обозначим длины отрезков **AM** и **CM** как **a** и **b**. А теперь опустим из вершины **B** на прямую **AC** высоту **h** и выразим через неё площади треугольников **ABM** и **CBM**.*



*Площадь S_1 треугольника **ABM** будет равна $\frac{ah}{2}$, а площадь S_2 треугольника **BMC** равна $\frac{bh}{2}$.*

Значит, отношение их площадей

$$S_1 : S_2 = \frac{ah}{2} : \frac{bh}{2} = a : b.$$

Что и требовалось доказать.

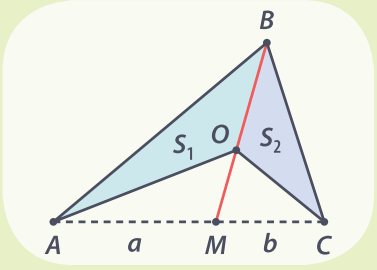
Теперь давайте на чевиане ***BM*** возьмём любую точку ***O***. Оказывается, отношение площадей треугольников ***OAB*** и ***OBC*** не будет зависеть от выбора этой точки на чевиане и всегда равно $a : b$.

Давайте запишем этот факт как теорему. Но как назвать данное утверждение? Сам рисунок к нему немного напоминает дельтаплан, поэтому мы назовём его

СВОЙСТВО «ДЕЛЬТАПЛАНА»

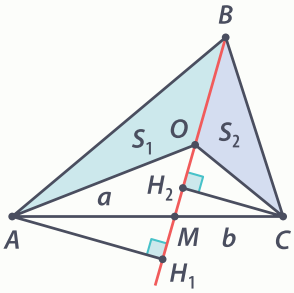
Для любой точки ***O* на чевиане ***BM*** треугольника ***ABC*** площади треугольников ***ABO*** и ***BCO*** относятся как отрезки ***AM*** и ***BM*.**

$$S_1 : S_2 = a : b$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Опустим из точек A *и* C *перпендикуляры* AH_1 *и* CH_2 *на прямую* BM. *Пусть их длины равны* h_1 *и* h_2.



Треугольники AH_1M *и* CH_2M *будут подобны по двум углам, значит,* $h_1 : h_2 = AM : CM = a : b$.

Обозначим общую сторону OB *треугольников* ABM *и* CBM *как* c *и выразим через неё их площади:*

$S_1 = \frac{ch_1}{2}$ *и* $S_2 = \frac{ch_2}{2}$.

Тогда для любой точки O *на чевиане* BM *мы получим, что*

$S_1 : S_2 = \frac{ch_1}{2} : \frac{ch_2}{2} = h_1 : h_2 = a : b$.

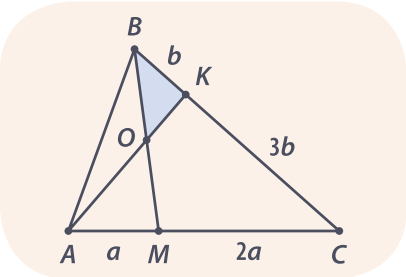
Что и требовалось доказать.

Нам пора уже проверить нашу теорию в действии. Давайте это сделаем на конкретном примере.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1

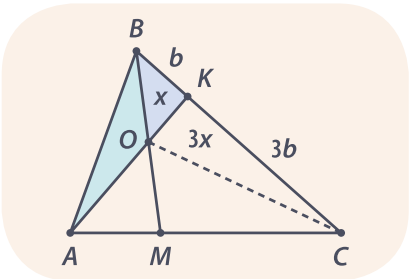
Площадь треугольника ABC равна 1. На его сторонах BC и AC взяли точки K и M так, что $AM : CM = 1 : 2$, $BK : CK = 1 : 3$. Отрезки AK и BM пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника BOK.

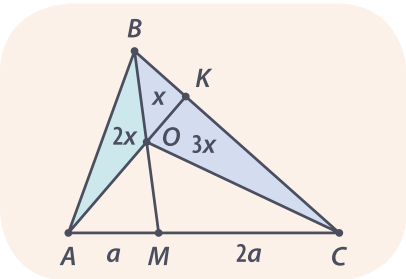


РЕШЕНИЕ: Обозначим площадь треугольника BOK буквой x и проведём отрезок OC. Теперь по свойству чевианы в треугольнике BOC найдём площадь треугольника COK. Она будет равна $3x$. Значит, весь треугольник BOC будет иметь площадь $4x$.

А теперь посмотрите на чевиану BM. По свойству «дельтаплана» площади треугольников AOB и COB должны относиться как отрезки AM и CM. Поэтому должно быть $S_{AOB} : 4x = 1 : 2$.

Откуда $S_{AOB} = 2x$.



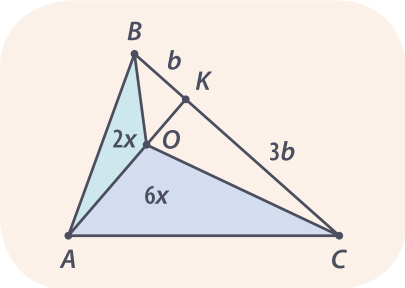


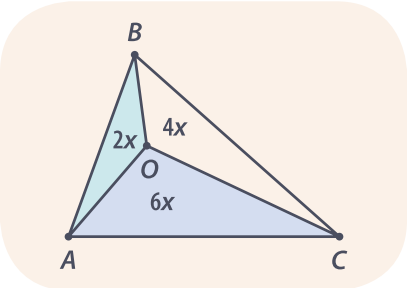
Нам осталось применить свойство «дельтаплана» ко второй чевиане AK. На ней площади его «крыльев» AOC и AOB относятся как отрезки CK и BK.

Значит, $S_{AOC} : 2x = 1 : 3$. Откуда получаем $S_{AOC} = 6x$.

Площадь всего треугольника ABC равна сумме площадей его частей. Если мы сложим площади треугольников AOB, BOC и AOC, то получим уравнение $2x + 4x + 6x = 1$.

Откуда получаем, что $x = \frac{1}{12}$.

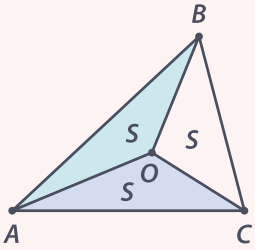




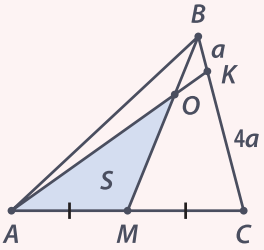
ОТВЕТ: $\frac{1}{12}$.

УПРАЖНЕНИЯ

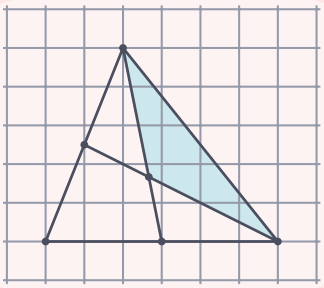
1. Внутри треугольника ABC взяли такую точку O, что треугольники AOB, BOC и AOC равновелики. Где может находиться такая точка?



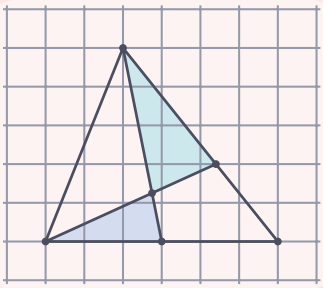
2. На стороне BC треугольника ABC взяли точку K так, что BK : CK = 1 : 4. Отрезок AK пересекает медиану BM треугольника в точке O. Какую часть площади треугольника ABC составляет треугольник BOK?



3. Сколько клеток составляет площадь закрашенного треугольника на рисунке?



4. Сколько клеток составляет площадь каждого из закрашенных треугольников на рисунке?



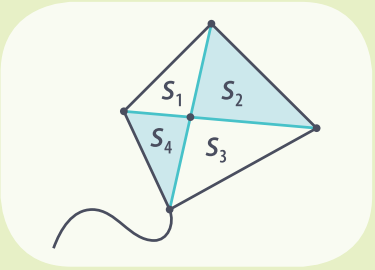
Свойство четырёхугольника

Оба крыла «дельтаплана» вместе образуют невыпуклый четырёхугольник. Это означает, что свойство «дельтаплана» так же является и свойством невыпуклого четырёхугольника. А что будет, если четырёхугольник выпуклый? Давайте проведем в нём диагонали и посмотрим, на что будет похож наш чертёж. Диагонали разделят весь четырёхугольник на четыре треугольника. Если их раскрасить разными цветами, то сам четырёхугольник будет напоминать нам «воздушного змея». Для площадей всех треугольников, которые составляют «воздушный змей», тоже можно сформулировать утверждение. И логично назвать его так:

СВОЙСТВО «ВОЗДУШНОГО ЗМЕЯ»

Если диагонали разбивают четырёхугольник на четыре треугольника, то произведение площадей треугольников, прилегающих к его противоположным сторонам, равны.

$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

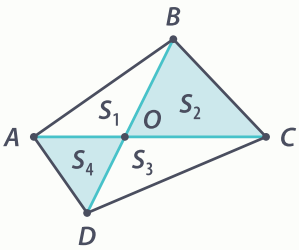


ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Пусть диагонали четырёхугольника **ABCD** пересекаются в точке **O**. В треугольнике **ABC** отрезок **BO** является чевианой, поэтому он должен делить его площадь и отрезок **AC** в одном отношении. Значит, по свойству чевианы* $S_1 : S_2 = AO : OC$.

*Поскольку отрезок **OD** – чевиана треугольника ADC, по тому же свойству должно быть* $S_4 : S_3 = AO : OC$. *Следовательно, выполняется пропорция* $S_1 : S_2 = S_4 : S_3$. *Откуда сразу следует, что* $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

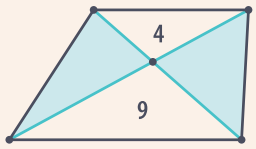
Что и требовалось доказать.



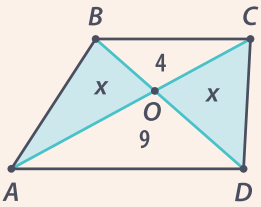
Давайте посмотрим, как можно использовать свойство «воздушного змея» для решения задач. И в качестве примера мы решим такую задачу.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 2



Диагонали трапеции разбивают её на четыре треугольника. Площади двух из них, прилегающих к её основаниям, равны 4 и 9. найдите площадь трапеции.

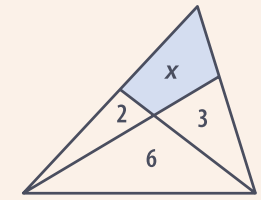


РЕШЕНИЕ: Пусть диагонали трапеции *ABCD* пересекаются в точке *O*, а площади треугольников *BOC* и *AOD* равны 4 и 9. По свойству трапеции треугольников *AOB* и *COD* должны иметь одинаковые площади. Обозначим их буквой *x*. А теперь ко всей трапеции применим свойство «воздушного змея». Тогда мы получим уравнение $x^2 = 4 \cdot 9 = 36$. Откуда $x = 6$. А площадь всей трапеции будет равна $4 + 9 + 6 + 6 = 25$.

ОТВЕТ: 25.

Следующий пример нам покажет, как в одной задаче можно одновременно применить свойства «воздушного змея» и чевианы треугольника.

ПРИМЕР 3

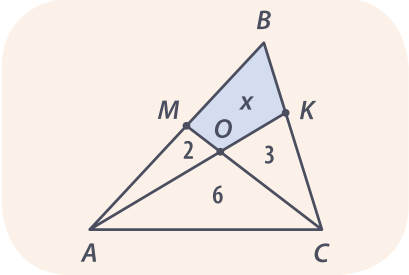


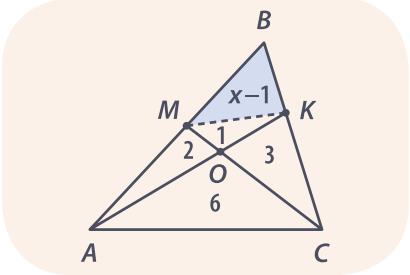
Две прямые делят треугольник на три треугольника и один четырёхугольник. На рисунке цифрами обозначены площади этих треугольников. Найдите площадь четырёхугольника.

РЕШЕНИЕ: Пусть чевианы *AK* и *CM* треугольника *ABC* пересекаются в точке *O* и делят его на четырёхугольник *MOBK* и треугольники *AMO*, *COK* и *AOC* с площадями 2, 3 и 6.

Давайте обозначим площадь данного четырёхугольника буквой *x* и сделаем дополнительное построение: проведём отрезок *MK*. А теперь применим свойство «воздушного змея» к четырёхугольнику *AMKC*: $6 \cdot S_{MOK} = 2 \cdot 3$. Откуда следует $S_{MOK} = 1$.

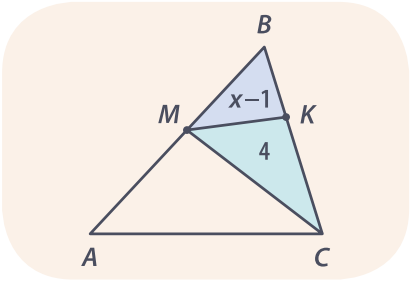
Значит, площадь треугольника MBK будет равна $x - 1$.

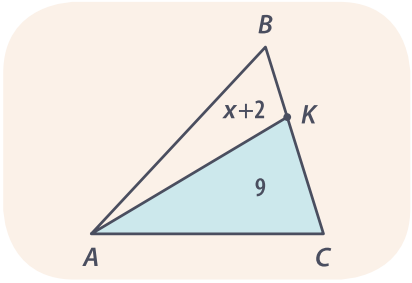




Как нам составить уравнение для неизвестной x? Посмотрите на треугольник CMB: чевиана MK делит его на два треугольника с площадями $x-1$ и 4. Поэтому для них можно записать пропорцию $BK : CK = (x-1) : 4$.

А теперь давайте такую же пропорцию запишем для треугольника ABC и его чевианы AK. Тогда мы получим, что $BK : CK = (x+2) : 9$. Значит, должно выполняться уравнение $(x-1) : 4 = (x+2) : 9$. Откуда следует, что $x = 3{,}4$.

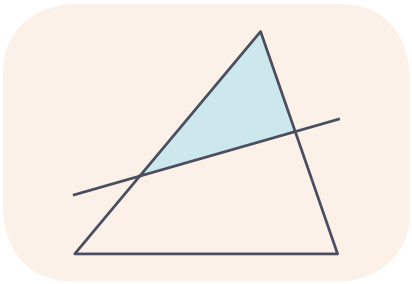




ОТВЕТ: 3,4.

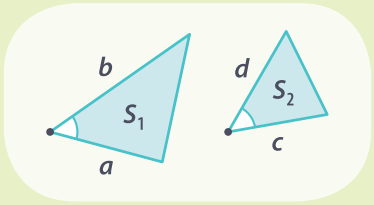
Отношение площадей треугольников с равными углами

Когда прямая не проходит через вершину треугольника, она отсекает от него меньший треугольник с тем же углом. Чтобы найти отношение площадей таких треугольников, удобно применить общее правило, которое мы сформулируем как *теорему об отношении площадей треугольников с равным углом*.



ТЕОРЕМА

Площади двух треугольников с равным углом относятся как произведения их сторон, заключающих этот угол.



$$S_1 : S_2 = ab : cd$$

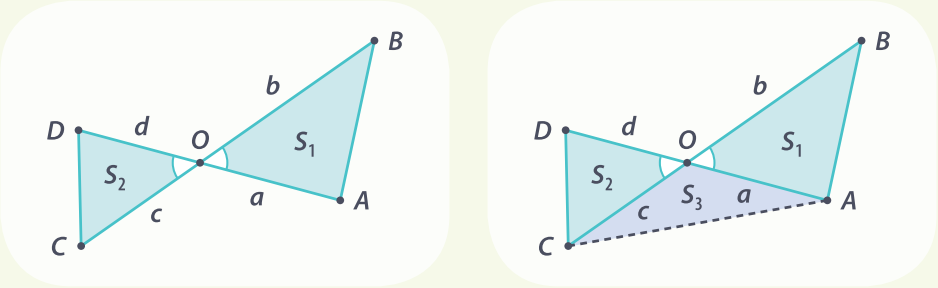
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть два треугольника имеют одинаковый угол, который в одном треугольнике лежит между сторонами с длинами a *и* b*, а во втором – между сторон* c *и* d*. Мы докажем, что площади* S_1 *и* S_2 *этих треугольников относятся как произведения* ab *и* cd *данных сторон. Для этого давайте расположим эти треугольники так, чтобы их равные углы стали вертикальными с общей вершиной* O*. Другие же их вершины мы обозначим соответственно буквами* A*,* B*,* C *и* D*.*

*Пусть треугольник **AOC** имеет некоторую площадь S_3.*

*В треугольнике **ABC** по свойству чевианы **AO** можно записать $S_1 : S_3 = b : c$.*

*Точно так же для чевианы **CO** треугольника **ACD** имеем $S_3 : S_2 = a : d$. Нам осталось перемножить два эти равенства . Откуда сразу получим, что $S_1 : S_2 = ab : cd$.*

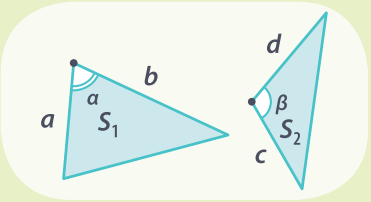


Что и требовалось доказать.

Необходимо сказать, что утверждение теоремы останется верным и в случае, когда равные углы двух треугольников заменить на углы, сумма которых равна 180°. Мы запишем его тоже как теорему

ТЕОРЕМА

Если два треугольника имеют углы, сумма которых равна 180°, то площади этих треугольников относятся как произведения их сторон, заключающих данные углы.



$$\alpha + \beta = 180°$$

$$S_1 : S_2 = ab : cd$$

УПРАЖНЕНИЯ

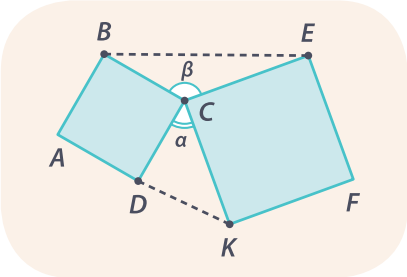
1. Докажите данное утверждение.

Давайте посмотрим, как можно применить данные теоремы для расчета площади части треугольника.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 4

Квадраты *ABCD* и *CEFK* имеют общую вершину *C*. Докажите, что треугольники *BCE* и *DCK* равновелики.

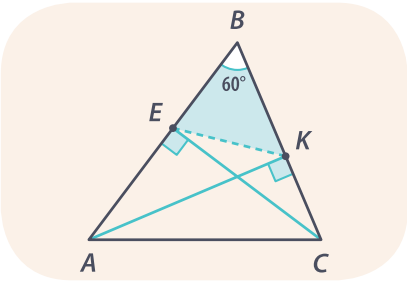


РЕШЕНИЕ: Обозначим величины углов *DCK* и *BCE* за α и β. Поскольку углы квадратов 90°, то $\alpha + \beta + 90° + 90° = 360°$ Откуда следует, что $\alpha + \beta = 180°$. Треугольники *BCE* и *DCK* имеют две соответственно равные стороны, а сумма углов между этими сторонами равна 180°. Значит, отношение их площадей равно 1, то есть они равновелики.

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 5

В треугольнике *ABC* провели высоты *AK* и *CE*. Найдите отношение, в котором отрезок *EK* делит площадь треугольника, если угол *ABC* равен 60°.

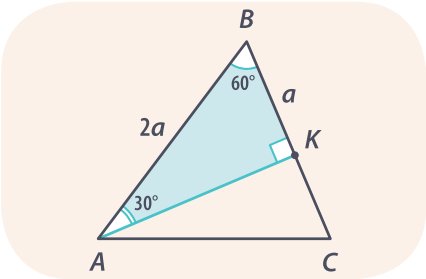


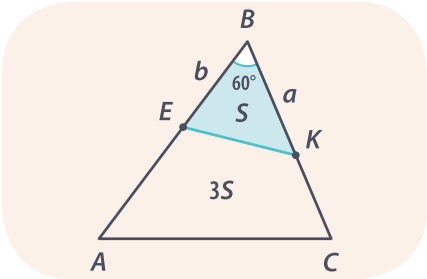
РЕШЕНИЕ: Рассмотрим прямоугольный треугольник *ABK*. Его угол при вершине *A* равен 90° – 60° = 30°. По свойству в таком треугольнике катет, лежащий против данного угла, должен быть в два раза меньше его гипотенузы. Обозначим длину катета *BK* за *a*. Тогда его гипотенуза *AB* должна иметь длину $2a$.

А теперь рассмотрим треугольник *CBE*. Его угол при вершине *C* тоже равен 30°, поэтому катет *BE* должен быть в два раза меньше гипотенузы *BC*. Поэтому мы обозначим длины отрезков *BE* и *BC* как b и $2b$.

Нам осталось сравнить площади треугольников *BEK* и *ABC*. Они имеют общий угол с вершиной *B*, и по теореме их площади относятся как произведения сторон этих треугольников, заключающих данный угол. То есть $S_{BEK} : S_{ABC} = ab : (2a \cdot 2b) = 1 : 4$.

Значит, отрезок *EK* отсекает от треугольника *ABC* четверть его площади, и делит его площадь в отношении 1 : 3.

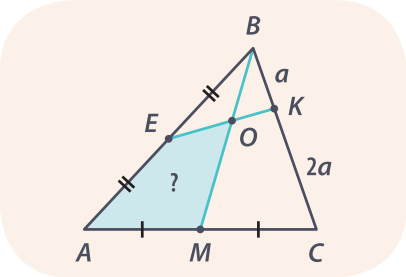




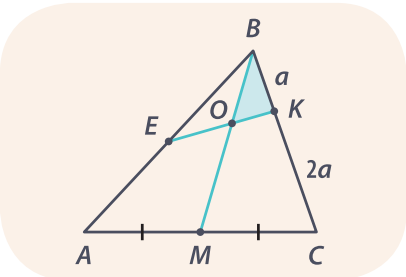
ОТВЕТ: 1 : 3

ПРИМЕР 6 ★★☆

Точки E и M – середины сторон AB и AC и треугольника ABC. На его стороне BC взяли такую точку K, что $BK : CK = 1 : 2$. Отрезки EK и BM пересекаются в точке O. Какую часть от площади треугольника ABC составляет четырёхугольник $AEOM$?

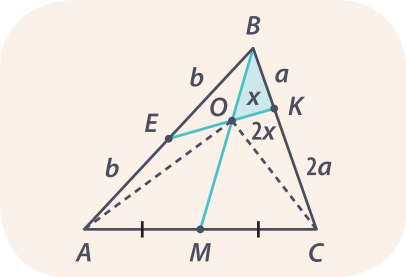


РЕШЕНИЕ: Обозначим площадь треугольника BOK буквой x и проведём отрезки AO и CO. Так как точка K делит сторону BC в отношении $1 : 2$, то площадь треугольника COK будет равна $2x$. Поскольку BM – медиана треугольника ABC, то площадь треугольника AOB будет равна $3x$ по свойству «дельтаплана». Медиана OE делит площадь этого треугольника пополам, поэтому $S_{BOE} = \frac{3x}{2}$.



Значит, площадь треугольника BEK равна $x + \frac{3x}{2} = \frac{5x}{2}$.

Посмотрим теперь на треугольники BEK и ABC. Поскольку они имеют общий угол, их площади должны относиться как произведения их сторон $S_{BEK} : S_{ABC} = \frac{a \cdot b}{3a \cdot 2b} = \frac{1}{6}$. Следовательно, $S_{ABC} = 30x$.

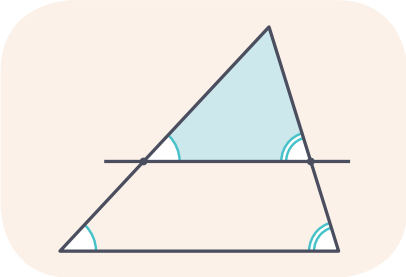


Та как BM – медиана треугольника ABC, то площадь треугольника ABM равна $15x$. Тогда площадь искомого четырёхугольника $AEOM$ будет равна $15x - \frac{3x}{2} = \frac{27x}{2}$.

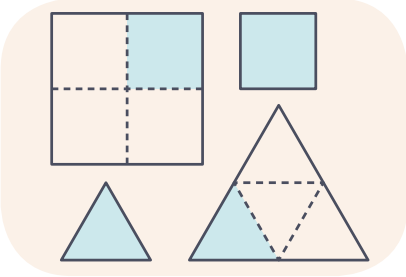
Значит, его площадь относится к площади всего треугольника ABC как $\frac{27x}{2} : 30x = \frac{9}{20} = 0{,}45$.

ОТВЕТ: 0.4

Отношение площадей подобных треугольников



Если прямая пересекает две стороны треугольника и параллельна его третьей стороне, то она всегда отсекает от него меньший подобный ему треугольник. Как относятся площади таких треугольников? Очевидно, это должно быть связано с коэффициентом их подобия. Здесь уместно будет сказать о том, как вообще могут относиться между собой площади подобных фигур.

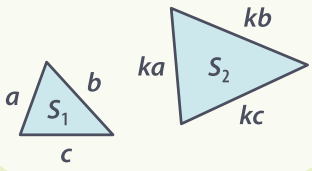


Посмотрите на данные рисунки. Можно спросить обывателя, во сколько раз на первом рисунке один квадрат больше другого. Или тот же вопрос задать про два треугольника на втором рисунке. Отвечая на такой вопрос, многие скажут: «в четыре раза». И ошибутся. Это вполне естественно, поскольку все живые существа интуитивно оценивают отношение размеров двух предметов по тому, сколько копий одного из этих предметов можно поместить в другом.

Если говорить о фигурах на плоскости, по сути это означает, что интуитивно мы сравниваем не размеры, а площади самих фигур. И лучше всего это заметно на тех фигурах, которые имеют одинаковую форму, то есть подобных между собой. Как же относятся площади двух подобных фигур, коэффициент подобия которых равен k? Ответ на этот вопрос дает

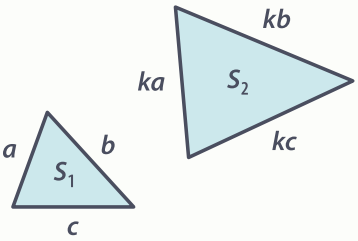
ТЕОРЕМА ОБ ОТНОШЕНИИ ПЛОЩАДЕЙ ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента их подобия.



$$S_2 : S_1 = k^2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Пусть два треугольника подобны с коэффициентом k. Вы уже знаете, что у таких треугольников все углы должны быть соответственно равны, а все стороны пропорциональны. То есть отношение всех соответственных сторон этих треугольников должно быть равно одному и тому же числу k.

Пусть длины двух сторон первого треугольника равны a и b. Тогда соответственные стороны второго треугольника будут равны ka и kb.

Поскольку углы между этими сторонами в подобных треугольниках равны, то их площади S_1 и S_2 по теореме должны относиться как произведения данных сторон. Значит, отношение площадей подобных треугольников с коэффициентом k равно $S_2 : S_1 = (ka \cdot kb) : (a \cdot b) = k^2$. То есть оно равно квадрату коэффициента их подобия.

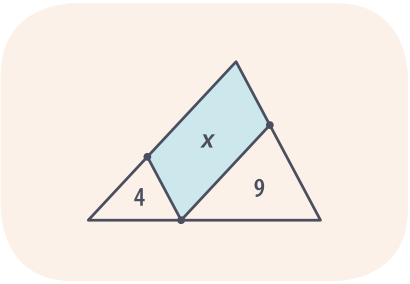
Что и требовалось доказать.

Замечание: данная теорема верна не только для подобных треугольников, но и для любых подобных многоугольников и вообще для всех подобных фигур. Связано же это с тем, что два подобных многоугольника всегда можно разбить на несколько соответственно подобных треугольников с одним и тем же коэффициентом подобия.

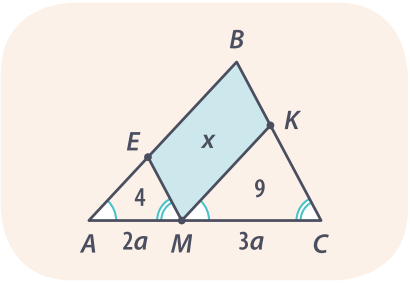
Давайте посмотрим на нескольких примерах, как можно использовать данную теорему.

ПРИМЕР 7

Треугольник разрезали на параллелограмм и два треугольника, площади которых равны 4 и 9. Найдите площадь параллелограмма.



РЕШЕНИЕ: Пусть треугольник ABC разрезали на параллелограмм $BEMK$ и треугольники AEM и MKC. Поскольку противоположные стороны параллелограмма параллельны, то треугольники AEM и MKC будут подобны треугольнику ABC. Если коэффициент подобия треугольников AEM и MKC равен k, то по теореме их площади должны относиться как k^2. Значит, должно быть $k^2 = \frac{4}{9}$. Откуда следует, что $k = \frac{2}{3}$.



Стороны AM и CM в этих треугольниках соответственные, поэтому $AM : CM = k = 2 : 3$. Удобно обозначить длины отрезков AM и CM как $2a$ и $3a$. Тогда вся сторона AC будет иметь длину $5a$. А теперь давайте сравним площади треугольников AEM и ABC. Коэффициент их подобия равен отношению соответственных сторон AM и AC. Значит, он равен $\frac{2a}{5a} = \frac{2}{5}$.

Отношение площадей этих треугольников должно равняться квадрату коэффициента их подобия, то есть должно быть равно $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$.

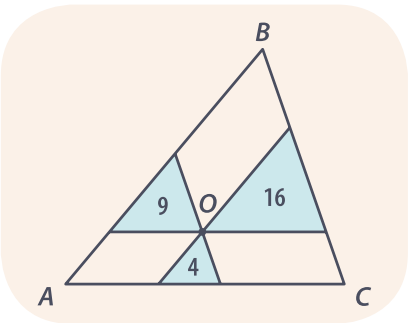
Следовательно $\frac{4}{S_{ABC}} = \frac{4}{25}$. Откуда получаем, что $S_{ABC} = 25$.

Давайте теперь обозначим площадь параллелограмма буквой x и выразим через неё площадь всего треугольника ABC. Тогда мы получим уравнение: $4 + 9 + x = 25$. Откуда следует, что $x = 12$.

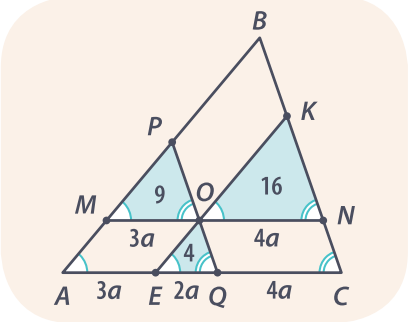
ОТВЕТ: 12

ПРИМЕР 8

Через точку O внутри треугольника ABC проведены три прямые, параллельные его сторонам. Найдите площадь треугольника ABC, если площади отмеченных на рисунке треугольников равны 4, 9 и 16.



РЕШЕНИЕ: Обозначим отрезки данных прямых, лежащие внутри треугольника ABC, как MN, PQ и EK. Поскольку каждая из этих прямых параллельна своей стороне треугольника ABC, то все отмеченные на рисунке треугольники OEQ, OMP и OKN будут подобны треугольнику ABC, а также между собой.



Площади этих треугольников должны относиться как квадраты коэффициентов их подобия. Значит, их соответственные стороны относятся как $2 : 3 : 4$. Поэтому длины отрезков EQ, MO и ON можно обозначить как $2a$, $3a$ и $4a$. Поскольку четырёхугольники $AMOE$ и $ONCQ$ по определению являются параллелограммами, то $AE = MO = 3a$, $CQ = ON = 4a$. Значит, вся сторона AC равна $2a + 3a + 4a = 9a$.

А теперь давайте сравним площадь всего треугольника ABC с площадью треугольника EOQ.

Они подобны с коэффициентом $k = \frac{AC}{EQ} = \frac{9a}{2a} = \frac{9}{2}$.

Площади этих треугольников относятся как квадрат коэффициента их подобия.

Следовательно $\frac{S_{ABC}}{4} = \frac{81}{4}$. Откуда $S_{ABC} = 81$.

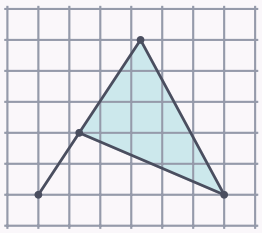
ОТВЕТ: 81

ВОПРОСЫ

1. Что такое чевиана треугольника? Верно ли, что она делит площадь треугольника и одну его сторону в одном отношении?
2. В чем заключается свойство «дельтаплана»?
3. Верно ли, что все медианы треугольника делят его на шесть равновеликих частей?
4. Как относятся площади подобных треугольников?
5. Как относятся площади треугольников, имеющих одинаковые углы?
6. Диагонали разбивают четырехугольник на 4 треугольника. Какое вы знаете соотношение между площадями этих треугольников?

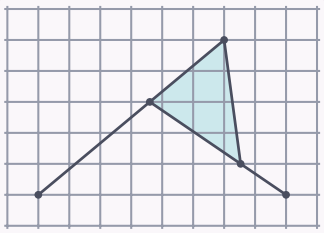
РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

1 ★☆☆ Сколько клеток составляет площадь треугольника на рисунке?



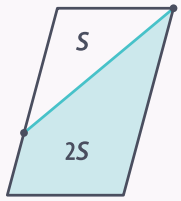
к задаче 1

2 ★★☆ Сколько клеток составляет площадь треугольника на рисунке?

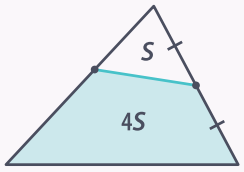


к задаче 2

3 ★☆☆ Прямая проходит через вершину параллелограмма и делит его площадь в отношении 1 : 2. В каком отношении эта прямая делит его сторону?



к задаче 3

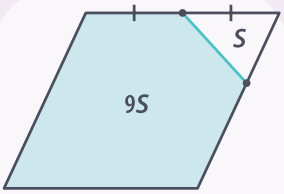


к задаче 4

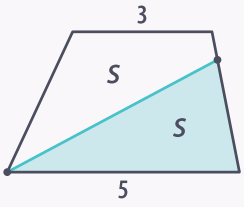
4 ★☆☆ Прямая проходит через середину стороны треугольника и делит его площадь в отношении 1 : 4. В каком отношении эта прямая делит другую сторону этого треугольника?

5 ★★☆ Прямая проходит через вершину параллелограмма и делит его диагональ в отношении 2 : 3. В каком отношении эта прямая делит площадь параллелограмма?

6 ★☆☆ Прямая проходит через середину стороны параллелограмма и делит его площадь в отношении 1 : 9. В каком отношении эта прямая делит другую сторону параллелограмма?



к задаче 6

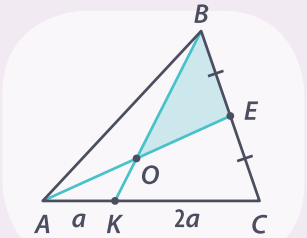


к задаче 7

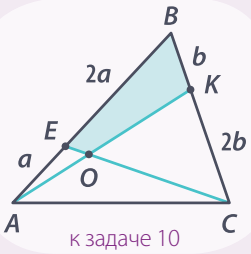
7 ★★☆ Основания трапеции равны 3 и 5. Прямая проходит через вершину трапеции и делит её площадь пополам. В каком отношении эта прямая может делить другую сторону трапеции?

8 ★☆☆ Медианы AM и CK треугольника ABC пересекаются в точке O. Какую часть площади этого треугольника занимает четырёхугольник BKOM?

9 ★☆☆ На стороне AC треугольника ABC взяли такую точку K, что 2AK = CK. Отрезок BK пересекает медиану AE треугольника в точке O. Найдите площадь треугольника BOE, если площадь треугольника ABC равна 1.



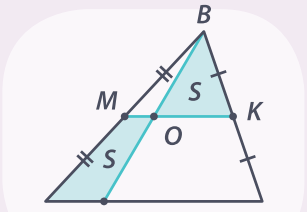
к задаче 9



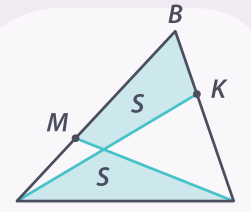
к задаче 10

10 ★★☆ На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли точки E и K так, что AE : EB = BK : KC = 1 : 2. Отрезки AK и CE пересекаются в точке O. Какую часть площади треугольника ABC составляет четырёхугольник BEOK?

11 ★★☆ На основании AC треугольника ABC взяли точку E. Отрезок BE пересекает среднюю линию MK треугольника в точке O. В каком отношении точка E делит основание треугольника, если четырехугольник AMOE имеет площадь, равную треугольнику BOK.



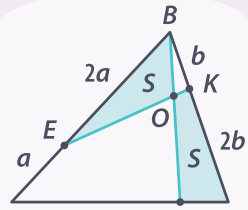
к задаче 11



к задаче 12

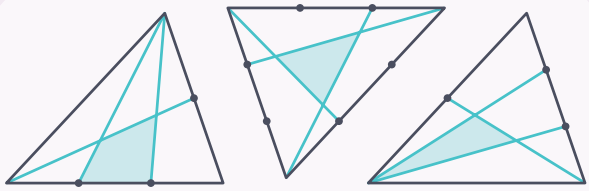
12 ★★☆ Точки M и K на сторонах треугольника соединили с противоположными вершинами. Оказалось, что закрашенные на рисунке треугольник и четырехугольник равновелики. Докажите, что точки M и K делят стороны в одинаковом отношении.

13 ★★☆ На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли точки E и K так, что AE : EB = BK : KC = 1 : 2. На стороне AC взяли некоторую точку M. Отрезки BM и EK пересекаются в точке O. Известно, что треугольник BOM равновелик четырёхугольнику MOKC. Найдите AM : CM.

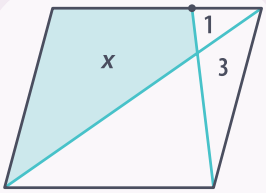


к задаче 13

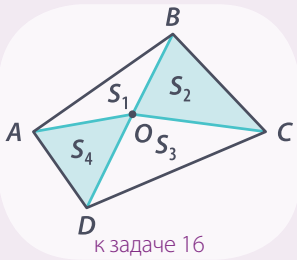
14 ★★☆ Каждую сторону треугольника на рисунке разбили на равные части. Какую часть его площади составляют закрашенные фигуры?


к задаче 14

15 ★★☆ В параллелограмме провели диагональ, а через не лежащую на ней вершину – прямую. Они разбили параллелограмм на три треугольника и четырехугольник. Площади двух треугольников на рисунке равны 1 и 3.



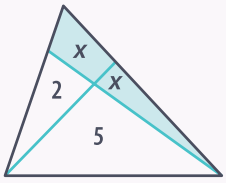
к задаче 15



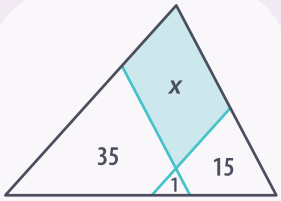
к задаче 16

16 ★★☆ В выпуклом четырехугольнике ABCD взяли такую точку O, что $S_{ABO} \cdot S_{CDO} = S_{BCO} \cdot S_{ADO}$. Докажите, что все такие точки лежат на диагоналях четырёхугольника.

17 ★★☆ Две прямые делят треугольник на три треугольника и четырехугольник. Площади двух треугольников на рисунке равны 2 и 5. Найдите площадь четырехугольника, если он равновелик третьему треугольнику.



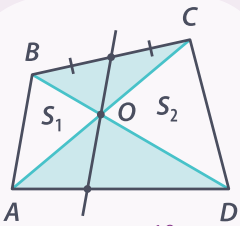
к задаче 17



к задаче 18

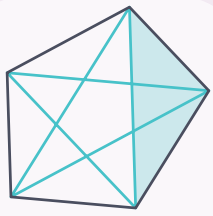
18 ★★☆ Параллельно двум сторонам треугольника ABC провели две прямые. Они разбили треугольник на две трапеции, треугольник и параллелограмм. Цифрами обозначены площади трапеций и треугольника. Найдите площадь параллелограмма.

19 ★★★ Диагонали четырёхугольника ABCD пересекаются в точке O. Прямая, проходящая через точку O и середину стороны BC, пересекает сторону AD точке M. Докажите, что $AM : MD = S_{ABO} : S_{CDO}$.

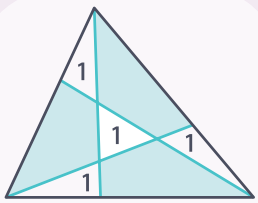


к задаче 19

20 ★★★ Каждая диагональ пятиугольника отсекает от него треугольник единичной площади. Найдите площадь пятиугольника.


к задаче 20

21 ★★★ Через каждую вершину треугольника провели прямую. Эти прямые разбивают треугольник на четыре меньших треугольника и три четырехугольника. Площади каждого из указанных треугольников равны 1. Докажите, что площади всех четырехугольников равны и найдите площадь исходного треугольника.



к задаче 21